Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022

Prova scritta del 10 /1/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 - i2\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{4 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}}$

- Sia $z = 2 - i2\sqrt{3}$. Scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana : $z^3 =$ $\boxed{-64}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$ Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | ~~vero~~ | falso |

- Determinare una base di W

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = \boxed{4} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-1}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | ~~falso~~ |

- $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

10/1/2022

1 $\begin{cases} z^4 + 64 i z = 0 \\ |z-2| \le |z| \end{cases}$

(i) $z^4 + 64 i z = z \cdot (z^3 + 64 i) = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$z = 0$ sol. $\qquad z^3 = -64 i$

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow \quad z^3 = -64 i \Leftrightarrow \rho^3 \cdot e^{i 3\vartheta} = 64 \cdot e^{i \frac{3}{2}\pi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 64 \\ 3\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

sol. distinte: $\begin{cases} \rho = 4 \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$

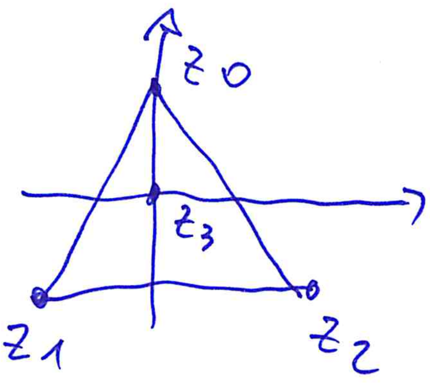
SOLUZIONI GLOBALI

$z_0 = 4i$

$z_1 = -2\sqrt{3} - i2$

$z_2 = 2\sqrt{3} - i2$

$z_3 = 0$



(2)

(ii) $|z-2| \leq |z| \iff$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \iff$$

$4-4x \leq 0$

$x \geq 1$ $\quad$ y qualsiasi

SOL: $z_2 = 2\sqrt{3} - i\,2$

SISTEMA

---

(2) $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

OSS: riga (1) = riga (4)

$\Rightarrow \quad rg(A_t) = rg\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2t-4$

$\det = 0 \iff t = 2$

i) $t \neq 2$ $\quad rg(A_t) = 3$

$\dim \ker = 0$

$t = 2$ $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(M) \neq 0$

$rg(A_t) = 2$

$\dim \ker = 1$

ii) $$(A_t | b) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{pmatrix}$$

matrice 4×4

$\det(A_t | b) = \ldots = 2t^2 - 6t + 4$

$\det = 0 \iff t = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

QUINDI :

$t \neq 2, 1$ $\quad \det(A_t | b) \neq 0$

$\Rightarrow rg(A_t | b) = 4 > 3 \geq rg(A_t)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOLUZIONE

$t = 1 \qquad rg(A_t) = 3 = rg(A_t | b)$

$\Rightarrow \quad \exists$ SOLUZIONE

$t = 2 \qquad rg(A_t) = 2 < 3 = rg(A_t | b)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOL.

iii) $\dim(W) = 1$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^4 = W \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \dim \operatorname{Im} = 3 \\ b) W \cap \operatorname{Im} = \{0\} \end{cases}$

$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ lin. IND} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \det \neq 0$

$\det = -4t + 8 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 2$

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ A 2×2 ⑤

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ colonne di A sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Proviamo $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 3 & 3s \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 + 3s = 0 \\ 3 + 9s = 0 \end{cases}$$

$$\iff s = -\frac{1}{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) (6)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \dots = -\lambda^3 (3-\lambda)$$

AUTOVALORI: 0 m.a. $= 3$

3 m.a. $= 1$

$rg(A) = 3 \Rightarrow$ m.g.$(0) = 1$

m.a.$(3) = 1 \Rightarrow$ m.g.$(3) = 1$

~~A è triang.le~~

A non è diag.le

AUTOSPAZI: $V_0 = \; = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$