Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta del 20 / 12 / 2021
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	MARCO (Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{8 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W + Z$ ~~vero~~ falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{4} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{1}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{7}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A$ è triangolarizzabile (su $\mathbb{R}$) ~~vero~~ falso

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione $= \boxed{2}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{\frac{1}{2}}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

20/12/2021

1 $\begin{cases} z^4 = -36\,\bar{z}^2 \\ e^{\pi z} = 1 \end{cases}$

(i) $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

eq $\Longleftrightarrow$ $\rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 36 \cdot \rho^2 \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i2\vartheta}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \rho^4 = 36\,\rho^2, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = \pi - 2\vartheta + 2k\pi \quad, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

sol. distinte $\quad \rho = 0 \quad (\Longleftrightarrow z = 0)$

$\begin{cases} \rho = 6 \\ \vartheta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{6} \end{cases} \quad k = 0, \dots, 5$

$z_0 = 3\sqrt{3} + 3i$

$z_1 = 6i$

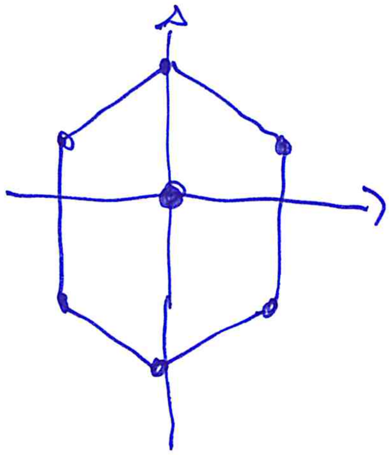
$z_2 = -3\sqrt{3} + 3i$

$z_3 = -3\sqrt{3} - 3i$

$z_4 = -6i$

$z_5 = 3\sqrt{3} - 3i$

$z_6 = 0$



(ii) $e^{\pi z} = 1 \iff$

$\pi z = 0 + i\, 2k\pi \iff$

$z = 0 + i\,2k \quad , k \in \mathbb{Z}$

SOL. SISTEMA : $z_1 = 6i$

$z_4 = -6i$

$z_6 = 0$

---

2 $\quad A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad 3\times 3$

$\det(A_t) = 2t^2 - 12t + 18 = 2\cdot(t-3)^2$

$\det = 0 \iff t = 3$

(i)

- $t \neq 3 \to \det \neq 0 \to \begin{cases} \rho = 3 \\ \dim \ker = 0 \end{cases}$

- $t = 3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \to \begin{cases} \rho = 2 \\ \dim \ker = 1 \end{cases}$

ii) $t \neq 3$ $\quad rg(A_t) = 3$

$$\Rightarrow \quad Im(\delta_{A_t}) = \mathbb{R}^3$$

Quindi per $t \neq 3$ va bene qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$

Ad esempio $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

N.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ con $t \neq 3$

VA BENE

$t = 3$ $\quad rg(A_t) = 2$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sceglieremo come base le colonne 2, 3 di A

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

iii) $\ker \neq \{0_v\} \iff t = 3$

$t=3$:

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$(3) \leftrightarrow (3) - 3\cdot(1)$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -13x_2 - 13x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = t$

$x_2 = -t$

$x_1 = -3t$

BASE: $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\mathcal{L}_{A_t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

- $t \neq 3$ $\qquad rg(A_t) = 3$

$(A_t | b)$ matrice $3 \times 4 \Rightarrow rg \leq 3$

$\Rightarrow t \neq 3 \quad \exists !$ SOL.

- $t = 3$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot$ colonne 1 di A

$\Rightarrow rg(A_t) = rg(A_t | b) = 2$

$\Rightarrow \exists \infty$ SOL.

$\dim\{\text{SOLUZIONI}\} = 1$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im}(f) = \{ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \}$

$\mathrm{Ker}(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$f \leftrightarrow A$ matrice 3×3

$\mathrm{Ker}(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ colonna 1 di $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

BASE $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Posso scegliere colonne 2, 3 di $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

CONCLUSIONE:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (-2-\lambda)^2 \cdot (-\lambda)^2$$

AUTOVALORI: $\lambda_0 = 0$ $\quad$ m.a. = 2

$\lambda_1 = -2$ $\quad$ m.a. = 2

$$m.g.(0) = 4 - rg(A) = 4 - 3 = 1$$

$$m.g.(-2) = 4 - rg(A + 2\,Id) = 4 - 3 = 1$$

poiché $A + 2\,Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg = 3$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det \neq 0$

AUTOSPAZI: $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$