Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2018/2019

**Prova scritta del 29 /1/2019**

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

## PRIMA PARTE

| PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; | risposta esatta = +1 | risposta sbagliata = -1 |
|---|---|---|
| calcoli e spiegazioni non sono richiesti | | |

- $z = \sqrt{3} + i \implies z^3 =$ $\boxed{8i}$

- Sia $z = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$. Scrivere $z$ nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$ : $z =$ $\boxed{2\sqrt{3} + i\,2}$

- Sia $Z$ il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$ : $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare una rappresentazione intrinseca di $Z$ :

$\boxed{x_1 + x_2 - x_3 = 0}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{L}_A$ è iniettiva ~~vero~~ falso

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{3}$ $\dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{0}$

- $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{8}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\cancel{A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice $A^{-1}$ : $\boxed{3}$

29 - 1 - 2019

1 $\begin{cases} (z-2i)^3 = -27i \\ |z-1| \geq |z| \end{cases}$

1 eq: $w = z - 2i$

$w^3 = -27i \iff \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 27 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$

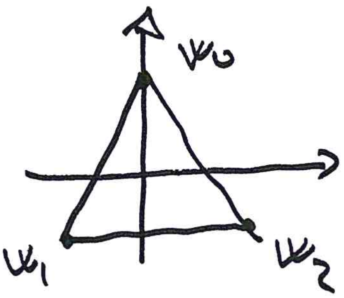
$\iff \begin{cases} \rho^3 = 27 \\ 3\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$

sol. distinte

$w_0 = 3i$

$w_1 = 3 \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$

$w_2 = 3 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$



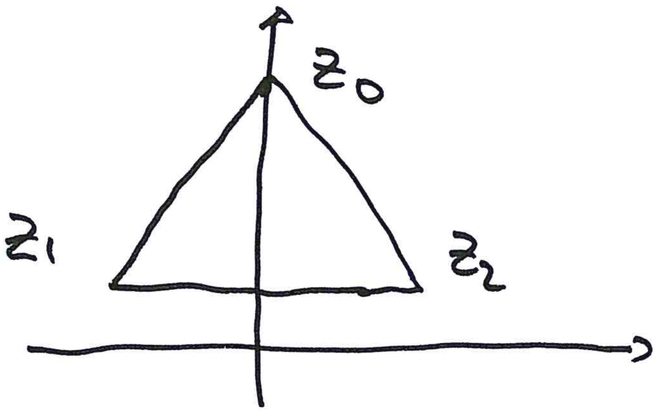

$z = w + 2i \implies$

$z_0 = 5i$

$z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

(2)




2 ep: $|z-1| \geq |z|$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq \sqrt{x^2+y^2} \iff$$

$$-2x+1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

Sol sisteme: $z_0 = 5i$

$$z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $3 \times 3$

i) $\det(A_t) = 2t^2 - 12t + 10$

$\det(A_t) = 0 \iff t = 1, 5$

$t \neq 1, 5$ $\begin{cases} rg = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$t = 1, 5$ $\begin{cases} rg = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

(ii)



$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A_t$ $3\times 3$ $\quad\quad$ $\left(A_t \,\vdots\, \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$ $3\times 4$

- $t \neq 1, 5$ $\quad$ $\text{rg}(A_t) = 3$

  $\Rightarrow \exists!$ SOL.

- $t = 5$ $\quad$ $\text{rg}(A_t) = 2$

$$(A_t \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot b$$

$\Rightarrow \text{rg}(A \vdots b) = \text{rg}(A) = 2$

$\Rightarrow \exists\ \infty$ SOL.

- $t = 1$ $\quad$ $\text{rg}(A_t \vdots b) = 3 > 2 = \text{rg}(A)$

  $\Rightarrow$ non $\exists$ SOL.

iii) $\underline{t=1}$ $\quad f_{A_t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \iff$



$$(*) \begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$rg(A) = rg(A \vdots b) = 2$ $\quad \Rightarrow \exists\ \infty$ sol.
&
eq.(3) inutile

$$(*) \iff \begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 = t \quad \text{par.} \\ x_1 = 2 - t \\ x_2 = \frac{1}{4}\left(6 - (2-t) - 5t\right) = 1 - t \end{cases}$$

$\underline{\text{Sol}}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ sottosp. affine

3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Suff. $B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

con $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)$

AD ESEMPIO : $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$$

AUTOVALORI: $\lambda_0 = 0$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

$\lambda_1 = 3$ m.a $= 1$ m.g. $= 1$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile

Autospazi

$$V_0 = \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot Id) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - 3\, Id) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

8

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$p_{A^2}(\lambda) = -\lambda^2 \cdot (\lambda - 9)$$

autovalori: $0$ m.a. $= 2 =$ m.g.

$9$ m.a $= 1 =$ m.g.

$A^2$ è diagonalizzabile