Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 15 / 02 / 2018

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Scrivere z nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$: $z = \boxed{\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W + Z$ ~~vero~~ falso

- Determinare una base di W

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = \boxed{2} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{2}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{3}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

15-2-2018

Treccia SOL

(1)
$$\begin{cases} e^{\pi z} = -\dfrac{1}{e^{\pi}} \\ z^8 = 16 \end{cases}$$

I eq: $$e^{\pi z} = e^{-\pi + i\pi}$$

$$\iff \pi z = -\pi + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = -1 + i(1+2k)$$

II eq:

$\underline{z = \rho \cdot e^{i\vartheta}}$

$$\begin{cases} \rho^8 = 16 \\ 8\vartheta = \underline{0 + 2h\pi} \end{cases}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[8]{16} = \sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{2h\pi}{8} \end{cases} \quad h = 0, 1, \dots, 7$$

SOL. SISTEMA: $z_3 = -1 + i$

$z_5 = -1 - i$

2

2

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ t & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

elimino riga 3:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(M) = 0 \iff t = 2$$

$$\Rightarrow \quad t \neq 2 \quad \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 0 \end{cases}$$

$\underline{t = 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

riga 4 = 2 riga 1 − riga 2

riga 3 = riga 1 + riga 2

(sapevamo già che erano lin DIP per il calcolo precedente)

o, equiv., $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M_2) = 0$

$t=2$ $\quad \begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(\ker(\mathcal{L}_A)) = 3-2 = 1 \end{cases}$

---

ii) $$(A_t | b) = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ t & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice 4×4

$$\det(A_t | b) = 0 \iff t = 2, -4$$

cioè

$t \neq 2, 4$ $\quad rg(A_t|b) = 4 > 3 \geq rg(A)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ soluz.

$t = 2$ $\quad rg(A_t|b) = 3 > 2 = rg(A)$

non $\exists$ sol.

$t = -4$ $\quad rg(A_t|b) = 3 = rg(A)$

$\exists !$ soluzione

iii)

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

$\dim W = 2$

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus (\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A)) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A)) = 2$$

$\Rightarrow$ Unico caso Possibile : $t = 2$

$\underline{t=2}$: Base Im $= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ sono in somma diretta

(5)

(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\3 & 0 & b\\3 & 2 & c\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \\ f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \end{matrix}\end{array}$$

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 5a = 0 \\ 3 + 5b = 0 \\ 3 - 4 + 5c = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= -\frac{1}{5} \\ b &= -\frac{3}{5} \\ c &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 3 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 3 & 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

---

4 $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2$$

autovalori: $\quad 0 \quad m.a. = 2$

$\qquad\qquad\quad 2 \quad m.a. = 2$

$m.g.(0) = \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2$

$m.g.(2) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 2\,Id)) = 4 - \mathrm{rg}(A - 2\,Id) = 1$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizz.

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$