Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2018/2019

Prova scritta del 20/12/2018
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) MARCO (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Scrivere z nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$: $z =$ $\boxed{-1+i\sqrt{3}}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ vero ~~falso~~

- Determinare una rappresentazione intrinseca di Z

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{3} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{6}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile vero ~~falso~~

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{3}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 2)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{-\frac{2}{5}}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

20-12-18

TRACCIA SOLUZIONI

1

$$\begin{cases} (z-i)^2 = 2i\,(\bar{z}+i) \\ |e^z| \leq 1 \end{cases}$$

1^e eq: $z - i = w$ $\qquad z = w + i$

$\bar{z} + i = \bar{w}$

$\hookrightarrow \quad w^2 = 2i\,\bar{w}$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow \quad w^2 = \rho^2 \cdot e^{i2\vartheta}, \quad \bar{w} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

1^e eq $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \rho^2 = 2\rho \\ 2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

sol. distinte

$\rho = 0 \Leftrightarrow w = 0$ $\quad$ & $\quad \begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$

$$w_0 = \sqrt{3} + i \qquad w_1 = -\sqrt{3} + i \qquad w_2 = -2i \qquad w_3 = 0 \implies \begin{cases} z_0 = \sqrt{3} + 2i \\ z_1 = -\sqrt{3} + 2i \\ z_2 = -i \\ z_3 = i \end{cases}$$

2^{eq}:

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$

$$= e^x$$

poiché $\cdot\ |e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 + \operatorname{sen}^2} = 1$

$\cdot\ |e^x| = e^x$

$$|e^z| \le 1 \iff \begin{cases} e^x \le 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \le 0 \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

SOL. SISTEMA: z_1, z_2, z_3

2

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & t \\ t & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $\det(A_t) = t^2 - 9$

- $t \neq 3, -3$ $\quad \begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 0 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det \neq 0 \Rightarrow rg \geq 2 \quad \forall t$

$\overset{\Pi}{\nabla}$

- $t = 3, -3$ $\quad \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 1 \end{cases}$

(ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $t \neq 3, -3$ $\quad rg(A) = 3 = rg(A|b)$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione

- $t = -3$

$$(A_t|b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_3 & b \end{array}$$

$$v_3 = -\frac{3}{2} \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$rg(A_t) = rg(A_t|b) = 2$$

$$\Downarrow$$

$\exists\ \infty$ soluzioni

- $t = 3$

$$(A_t|b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(M) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad rg(A_t|b) = 3 > 2 = rg(A_t)$$

$\Rightarrow$ non $\exists$ soluzione

iii) • $t \neq 3, -3$

$$rg(A_t) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$Im(f_{A_t}) = \mathbb{R}^3$$

$$\Downarrow$$

$$Im(f_{A_t}) \cap W = W$$

$$\Downarrow$$

$$\text{BASE di } (Im(f_{A_t}) \cap W) = \text{Base di } W$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $t=3$ $\quad Im(f_{A_t}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \begin{cases} x_1 = t + 4s \\ x_2 = 3t \\ x_3 = t + s \end{cases}$$

$\Rightarrow$

6

$W \cap \mathrm{Im}(f_{A_t})$: $t+4s-3t-2t-2s=0$

$s = 2t$

BASE : $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $t = -3$ $\quad \mathrm{Im}(f_{A_t}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \begin{cases} x_1 = t + 4s \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t + s \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $W \cap \mathrm{Im}(f_{A_t})$: $t+4s+3t-2t-2s=0$

$s = -t$

BASE : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

③ ⑦

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ \; x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \; \}$$

$$\mathrm{rg}(f) = 1 \quad \& \quad \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$$

$$\Downarrow$$

a) Le colonne di A sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Le righe di A sono multiple della riga data dei coefficienti dell' eq. di $\mathrm{Ker}(f)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

8

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 3)^2$$

AUTOVALORI: 0 m.a. = 2 m.g. = 2

3 m.a. = 2 m.g. = 1

AUTOSPAZI:

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile