Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria

**Prova scritta del 09 / 01 / 2018**

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) | MARCO (Nome) | (Numero di matricola)

## PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 3i \implies z^3 = \boxed{-27i}$
- $z = 3 - 4i,\ w = 2 - i \implies Re(z \cdot w) = \boxed{2}$
- Dati $W$ e $Z$ i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \}\ ,\ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Determinare una base di $W \cap Z$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{0} \qquad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-14}$

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies m.g.(4) = \boxed{2}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{A_2 =} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

9/ 1/ 2018

(1) $$\begin{cases} e^{\pi z} = -e^{\pi} \\ |z-(1-5i)| \leq 4 \end{cases}$$

I eq: $$e^{\pi z} = e^{i\pi} \cdot e^{\pi} = e^{\pi + i\pi}$$

$$\iff \pi z = \pi + i\pi + i2k\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = 1 + i(1+2k)$$

sostituiamo nella II:

$$|1+i(1+2k) - (1-5i)| \leq 4 \iff$$

$$|\, i[(1+2k) + 5]\,| \leq 4 \iff$$

$$\underbrace{|i|}_{=1} \cdot |1+2k+5| \leq 4 \iff$$

$$|6+2k| \leq 4 \iff$$

$$-4 \leq 6+2K \leq 4 \iff$$

$$-5 \leq K \leq 1 \qquad K \in \mathbb{Z}$$

SOLUZIONE:

$$Z = 1+i(2K+1) \qquad K = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

---

2 $$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & t \\ t & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_t) = -t^2 + 16$$

$$\Rightarrow t \neq 4, -4 \qquad \det \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} rg = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$$

$t = 4$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} rg = 2 \\ \dim \ker = 1 \end{cases}$$

$t=-4$:

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

---

(ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$t \neq +4, -4$: $\quad rg(A_t) = 3$, $\quad rg(A_t|b) = 3 \implies \exists !$ SOL.

$t = 4$: $\quad rg(A_t) = 2$, $\quad rg(A_t|b) = 3 \implies$ non $\exists$ SOL.

$t = -4$: $\quad rg(A_t) = 2$, $\quad rg(A_t|b) = 2 \implies \exists\, \infty$ SOL.

(iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 7 \end{cases}$$

Algoritmo di Gauss: sistema è equiv. a:

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = t$

$x_2 = 1$

$x_1 = 2 - x_2 - 4x_3 = 1 - 4t$

SOLUZIONI: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sol. particolare; $\left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)$

3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ x_1 - 2x_2 = 0 \}$

$A$ $2 \times 2$ $\mathrm{rg}(A) = 1$

Im $\to$ colonne di $A$ multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ker $\to$ righe di $A$ multiple di $(1 \ \ -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (-3-\lambda)^2$$

AUTOVALORI:

$\lambda_0 = 0$    m.a. = 2    m.g. = 1

$\lambda_1 = -3$    m.a. = 2    m.g. = 1

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_0 = 0$

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_1 = -3$