Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 30/01/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -1 + i$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 : $\boxed{2+2i}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} , Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | ~~vero~~ | falso |

- Dato W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$ determinare una base di W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{4} \qquad rg(A) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-2}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | ~~vero~~ | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è = $\boxed{1}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

30-1-2014

(1) $\begin{cases} z^6 = -729\pi^6 \\ e^z = -1 \end{cases}$

I: $\rho^6 \cdot e^{i6\vartheta} = [729 \cdot \pi^6] \cdot e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 729 \cdot \pi^6 \\ 6\vartheta = \pi + 2k\pi \end{cases}$

sol. distinte $\begin{cases} \rho = \sqrt[6]{729 \cdot \pi^6} = 3\pi \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$ $k = 0, \ldots, 5$

II: $-1 = e^{i\pi}$

$e^z = -1 \Leftrightarrow z = i\pi + 2k\pi i$

SOL. SISTEMA: $i3\pi, -i3\pi$

2 $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{4 \times 3}$

i)

$t \neq 3$ $\begin{cases} rk(A_t) = 3 \\ \dim(Ker) = 0 \end{cases}$

$t = 3$ $\begin{cases} rk(A_t) = 2 \\ \dim(Ker) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii)

$(A_t \vdots b) = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4×4

$\det(A_t \vdots b) = t^2 - 2t - 3$

$\det(A_t \vdots b) = 0 \iff t = -1, 3$

Quindi

SE $t \neq -1, 3$ $\quad \det(A_t : b) \neq 0$

CIOE' $\quad rk(A_t : b) = 4 > 3 \geq rk(A_t)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOLUZIONE

CASI PARTICOLARI

<u>$t = 3$</u>

$$rk(A_t : b) = 3$$

$$rk(A_t) = 2$$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOLUZIONE

$t = -1$

$$rk(A_t : b) = 3$$

$$rk(A_t) = 3$$

$\Rightarrow$ $\exists$ SOLUZIONE

iii) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim(W) = 2$

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus \operatorname{Im}(L_{A_t})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dim(\operatorname{Im}(L_{A_t})) = 2 \\ W \cap \operatorname{Im}(L_{A_t}) = \{0_V\} \end{cases}$$

vere per $t = 3$

③ $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ = I° colonne di A

$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

= 2° colonne di A

$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

= 3° colonne di A

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

f non è bigettiva perché $rk(A) = 2$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 \cdot \lambda^2$$

AUTOVALORI : 3 m.a. = 2 m.g. = 1

0 m.a. = 2 m.g. = 1

Autovettori:

$\lambda = 0$: $V_0 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s \neq 0 \right\}$

$\lambda = 3$ $V_3 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \neq 0 \right\}$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile