Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica - Corso di Algebra - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 19/12/2011
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Scrivere nella forma cartesiana $z = x + iy$ il seguente numero complesso: $z = \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \implies z = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{3}{2}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{, allora si ha : } \boxed{\cancel{\mathbb{R}^3 = W + Z}} \ \boxed{\mathbb{R}^3 \neq W + Z}$$

- Dato W il seguenti sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \} \text{ determinare } Z \subset \mathbb{R}^3 \text{ tale che } \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z:$$

$$\boxed{Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \rangle}$$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3} \qquad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{1}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \implies$ il coefficiente di posto $(1,2)$ della matrice $A \cdot B$ è $: = \boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 6 è $= \boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{19 - 12 - 2011}$

1 $\begin{cases} (z-i)^2 = 2\cdot(\bar{z}+i) \\ |e^z| > 1 \end{cases}$

I $\bar{z}+i = \overline{(z-i)}$

Poniamo $w = z - i$ $\qquad (z = w+i)$

$w^2 = 2\bar{w}$ $\qquad w = \rho\cdot e^{i\vartheta}$

$\Updownarrow$

$\rho^2\cdot e^{i2\vartheta} = 2\cdot\rho\cdot e^{-i\vartheta} \iff \begin{cases} \rho^2 = 2\rho, & \rho\in\mathbb{R}^+ \\ 2\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

SOLUZIONI DISTINTE:

$\rho = 0 \quad (\iff w = 0)$ $\qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0,1,2$

$w_0 = 2$

$w_1 = -1 + i\sqrt{3}$

$w_2 = -1 - i\sqrt{3}$

$w_4 = 0$

$\Longrightarrow$ $z = w+i$

$z_0 = 2+i$

$z_1 = -1 + i(1+\sqrt{3})$

$z_2 = -1 + i(1-\sqrt{3})$

$z_4 = i$

II $\boxed{z=x+iy}$ $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} =$

$= |e^x| = e^x > 1 \iff x > 0$

y qualsiasi

CONCLUSIONE: soluzione del sistema $z_0 = 2+i$

---

2 $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 \\ 0 & -5 & t \end{pmatrix}$ matrice 3×3

i) $\det(A_t) = -t^2 - t + 30$

$\det(A_t) = 0 \iff t = 5, -6$

$rg(A_t) = 3 \iff t \neq 5, -6$

$t = 5$: $\begin{pmatrix} & & \\ 5 & 2 & \\ 0 & -5 & \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

$t = -6$: $\begin{pmatrix} & & \\ 6 & 2 & \\ 0 & -5 & \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

CONCLUSIONE: $t \neq 5, 6$ $\begin{cases} \dim(\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{A_t}) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}\, \mathcal{L}_{A_t}) = 3-3 = 0 \end{cases}$

$t = 5, 6 \qquad \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{A_t}) = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}\, \mathcal{L}_{A_t}) = 3-2 = 1 \end{cases}$

---

ii)

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A_t \quad 3 \times 3 \qquad \left(A_t \,\vdots\, \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}\right) \quad 3 \times 4$

Per $t \neq 5, 6 \qquad 3 = rg(A_t) \leq rg\left(A_t \,\vdots\, \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}\right) \leq 3$

$\Rightarrow \quad \exists$ unico soluzione del sistema

<u>$t=5$</u>: $\quad A_{t=5} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

$$(A \,\vdots\, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

b = IV colonne = I col.

$\Downarrow$

$rg(A) = rg(A \,\vdots\, b)$

CIOE' per $t=5$ $\exists$ soluzione

&

$\dim \{\text{soluzioni}\} = 3 - rg(A) = 1$

$t=-6$: $A_{t=6} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad r = 2$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{c:ccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow r(A \vdots b) = 3$$

CIOE' $\quad r(A) = 2 < 3 = r(A \vdots b)$

Per $t = 6$ non $\exists$ soluzione

---

iii) $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 0 \right\}$

<u>dim $W = 2$</u> $\qquad$ Base di $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus \ker(\mathcal{L}_{A_t}) \iff \begin{cases} \dim(\ker(\mathcal{L}_{A_t})) = 1 \\ \ker(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W = \{0_V\} \end{cases}$$

dobbiamo determinare base $\ker(\mathcal{L}_{A_t})$ per $t = 5$
$t = -6$

$t=5$: $\text{Ker} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

II eq. è
dipendente
perché $rg = 2$

$\iff \text{Ker} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Base $\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W \iff$

sostituiamo $\begin{matrix} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{matrix}$

nell'eq. di W

$-t + t = 0$

$0 = 0$

vera $\forall t$

$\Downarrow$

$\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W = \text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t})$

CIOÈ per $t = 5$

$\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) + W$ non è somma diretta

$\underline{t=-6}$: Ker $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W \Leftrightarrow$ sostituiamo $\begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = -12s \\ x_3 = 10s \end{array}$

nell'eq. di W

$\Downarrow$

$s + (-12 \cdot s) = 0$

$-11 \cdot s = 0$

$s = 0$

$\Downarrow$

$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \cap W = \{0_V\}$

Per $t=-6$: $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \oplus W$

OPPURE: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

$\Updownarrow$

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) \oplus W$

3 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - 2x_3 = 0 \right\}$

- $f(W) \subseteq W$
- $rg(f) = 1$

i) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è univocamente determinata dal valore sui vettori di una base di $\mathbb{R}^3$

Base di $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

completiamo ad una base di $\mathbb{R}^3$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Una f tale che $\begin{cases} f(W) \subseteq W \\ rg(f) = 1 \end{cases}$ è data da

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) La matrice A soddisfa

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

---

oppure : Per definizione

$$\text{I colonna di } A = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II colonna di } A = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{III colonna di } A = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rimane da determinare $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \dots = \lambda^2(2-\lambda)^2$$

autovalori $\lambda_1 = 0$ $\quad m.a.(0) = 2$

$\lambda_2 = 2$ $\quad m.a.(2) = 2$

$$m.g.(0) = \dim \operatorname{Ker}(A) = 4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$$

(poiché III col. $= 0$, IV col $=$ II col. $\quad$ I, II lin. ind.)

$$m.g.(2) = \dim \operatorname{Ker}(A - 2\,Id)$$

$$A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rg \le 3$ poiché 2 è autovalore

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \implies rg(A - 2\,Id) = 3$$

$$\implies m.g.(2) = 4 - 3 = \underline{1}$$

La matrice è triang. La matrice non è diag. poiché $m.g.(2) = 1 < 2 = m.a.(2)$