Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 26/1/2024
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	
(Nome)	
(Numero di matricola)	

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- Dato $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana : $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \right\} , \; Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W + Z$$

vero	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(Ker(L_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 = -16|z|^2 \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 2$, determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \bigoplus Im(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$Im(f) = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \Big\}, Ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tale che $f = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.