Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 9/1/2024

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $i^{124} =$

- $z = 1 + 4i \implies z^{-1} =$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \;,\; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$

vero	falso

- Determinare una base di W

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$$

- $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies m.g.(1) =$$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} : \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$$

- Le soluzioni del sistema $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ costituiscono uno spazio affine di dimensione =

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = -2\overline{z} \\ e^{\pi z} = -e^{\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 2$, dire se $\mathbb{R}^3 = Im(\mathcal{L}_A) \bigoplus (ker(\mathcal{L}_A))$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che :

$$Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad f \text{ suriettiva}$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.