Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2023/2024

Prova scritta del 19/12/2023
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Determinare una base di $W \cap Z$

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $\quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-3)^4 = 4(\overline{z}-3)^2 \\ |e^z| = e^2 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ t & 2 & 3 \\ 0 & -5 & t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\quad A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle; \ Im(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.