Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2022/2023

Prova scritta del 21/01/2023

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 2 + i3$, $w = 2 + i \Rightarrow Re(z \cdot w) =$ $\boxed{}$

- Sia $z = -3\sqrt{3} + i3$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W + Z$$

vero	falso

- Determinare una base di $W \cap Z$

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \implies m.g.(4) =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $\quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = i|z| \cdot \overline{z} \\ |z+2i| = |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & -2 \\ 3 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 3$, determinare l'equazione intrinseca di $(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che :

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.