Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria gestionale
Prova scritta del 15/02/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 1 + i \implies z^6 =$ ☐ • $z = 4 + 2i$, $w = 2 + 2i \implies Re(z \cdot w) =$ ☐

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, .$$

• $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

Determinare una base di W: ☐

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ ☐ $\dim(Ker(l_A)) =$ ☐

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies m.a.(1) =$ ☐

- Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : ☐

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^4 = 4(\overline{z}-i)^2 \\ |e^z| = e \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 1$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-2] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle; \; Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \}$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-7]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2.
(v) Si dica se A^2 è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.