Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria gestionale
Prova scritta del 25/01/2022
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = i \implies z^{61} = \boxed{}$ • $z = 3 - 2i,\ w = 2 + 2i \implies Im(z \cdot w) = \boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Determinare una base di $W \cap Z$: $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies m.a.(1) = \boxed{}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-i)^4 = -64 \\ e^{i\pi z} = e^{\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -t & -1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 4$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-2] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle; \; Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2 \times 2; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-7]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Calcolare A^2 e verificare che ogni autovettore di A é autovettore per A^2.