Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2021/2022
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta del 20 / 12 / 2021
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ ☐

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

- Determinare una base di $W \cap Z$

☐

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ ☐ $\quad \dim(Ker(l_A)) =$ ☐

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A$ è triangolarizzabile (su $\mathbb{R}$) | vero | falso |

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = ☐

- Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 3)$ della matrice A^{-1} : ☐

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = -36 \cdot \overline{z}^2 \\ e^{\pi z} = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-7] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Al variore di $t \in \mathbb{R}$ determinare una base di $(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(iii) Per i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t})) > 0$, determinare una base di $(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(iv) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$Im(f) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-5] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.