Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria ☐

Prova scritta del 15 / 02 / 2018

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Scrivere z nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$: $z =$ ☐

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \;,\; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

- $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

- Determinare una base di W ☐

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) =$ ☐ $\dim(Ker(l_A)) =$ ☐

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐

- $A= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = ☐

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : ☐

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{\pi z} = -\frac{1}{e^{\pi}} \\ z^8 = 16 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-7] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ t & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Sia W il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$: $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Determinare per quali t si ha $\mathbb{R}^4 = W \bigoplus (Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.