Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2018/2019

Prova scritta del 20/12/2018
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Scrivere z nella rappresentazione cartesiana $z = x + iy$: $z =$ ☐

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

• $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

• Determinare una rappresentazione intrinseca di Z

☐

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) =$ ☐ $\dim(Ker(l_A)) =$ ☐

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ ☐

• $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

• Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = ☐

• Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 2)$ della matrice A^{-1} : ☐

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-i)^2 = 2i \cdot (\overline{z}+i) \\ |e^z| \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & t \\ t & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\quad A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \}$,

determinare al variare di t una base di $Im(f_t) \cap W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \ , \ Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \}$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.