

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-1)^4 = -16 \\ |e^{i \cdot z}| \geq e \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6] Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & -1 \\ t & t & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\mathcal{L}_{A_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 0$, determinare tutte le soluzioni del sistema $\mathcal{L}_{A_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si determini una matrice $A \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-7] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

(iv) Si calcoli A^2 e si dica se A^2 è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.