

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = -2|z|^2 \\ |z+i| \geq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 0$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

Sia f un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im}(f) = W$, $\text{Ker}(f) \subset W$.

Si determini $A \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-7]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino gli autovettori di A .
- (iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
- (iv) Calcolare A^2 e dire se A^2 è diagonalizzabile.