Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 23/7/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1 + \sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

• $z = 1 + \sqrt{3}i \implies z^{-1} =$

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \implies \dim(W + Z) =$$

Determinare una base di $W \cap Z$:

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) =$ $\dim(Ker(l_A)) =$

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile vero falso

• Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all' autovalore $\lambda = 2$ per l'app. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} =$

• $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \implies m.g.(5) =$

• Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1, 2)$ della matrice A^{-1} :

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{\pi z} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ |z-1| \leq 6 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ t & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -t \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad f^2 = 0$$

Esercizio 4. [punteggio: 0-7]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iv) Dire se A^2 è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.