Ingegneria Gestionale - Elettronica - delle telecomunicazioni
Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2010/2011

prova scritta del 23/2/2011
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Sia z_0 il numero complesso espresso nella forma trigonometrica come: $z_0 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

i) Esprimere z_0 nella forma "Cartesiana" $z_0 = x_0 + iy_0$
ii) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_0^{-1}
iii) Disegnare nel piano di Gauss $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \geq Re(z_0)\}$
iv) Dato $w_0 = 1 + i$ determinare $z_0 \cdot w_0$.

Esercizio 2 Sia W il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$: $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

i) determinare una base di W.
ii) Determinare un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = V \bigoplus W$.

Esercizio 3 Sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 0 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 0 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) Specificare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è unica e i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione ≥ 1.

Esercizio 4 Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Risolvere il sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ii) Determinare tutte le matrici $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $A \cdot B = B$

Esercizio 5 Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $W = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Big\}$

i) Si indichi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
- $f(W) \subseteq W$,
- $\dim(Ker(f)) = 1$

ii) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.