Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2008/2009

prova scritta del 15/9/2009

TEMPO A DISPOSIZIONE: 180 minuti (45 minuti per ogni parte)

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

Esercizio 1.1 [punteggio: 0-3]

Sia z_0 il numero complesso $i3$.

(i) Disegnare nel piano di Gauss $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq |z|\}$

(ii) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_0^{-1}.

Esercizio 1.2 [punteggio: 0-5]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = -\overline{z}^2 \\ z^2 \cdot \overline{z}^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

SECONDA PARTE

Esercizio 2.1 [punteggio: 0-6]

Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & t & 2 \\ 0 & t & t \\ 3 & t & t \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(iii) Determinare, se esistono, i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui : $Ker(f_t) \neq \{\mathbf{0_V}\}$ e $Ker(f_t) \bigoplus Im(f_t) = \mathbb{R}^3$

Esercizio 2.2 [punteggio: 0-2]

Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcolare A^2

TERZA PARTE

Esercizio 3.1 [punteggio: 0-5]
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f ?

Esercizio 3.2 [punteggio: 0-3]
Data la forma $\mathrm{f}_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \cdot \begin{pmatrix} t & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori del parametro t f_t è un prodotto scalare definito positivo.

QUARTA PARTE

Esercizio 4.1 [punteggio: 0-4]
Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 - 4x - y$$

Determinare i valori $\max, \min$ di $f(x,y)$ ristretta al dominio $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \le x \le 2 \; ; \; -2 \le y \le 2 \right\}$.

Esercizio 4.2 [punteggio: 0-3] Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = e^x + 2xy + \cos(y)$$

(i) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0))$
(ii) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in un intorno di $(0,0)$ della funzione