Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Disegnare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z-4)^4 = -4$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot e^z = -\sqrt{3} + i \\ |z - \log 2| < 10 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in W$

(ii) Determinare l'equazione intrinseca di uno spazio $Z \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $W \cap Z = \langle v \rangle$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SECONDA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-5]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 \\ & tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & +5x_2 & +x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-6]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 \neq Im(f) \bigoplus Ker(f)$

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Disegnare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z+4)^4 = -4$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot e^z = \sqrt{3} - i \\ |z - \log 2| < 8 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \in W$

(ii) Determinare l'equazione intrinseca di uno spazio $Z \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $W \cap Z = \langle v \rangle$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

SECONDA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-5]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +6x_2 & +2x_3 \\ & tx_2 & +tx_3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-6]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 \neq Im(f) \bigoplus Ker(f)$

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Disegnare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z - 4i)^4 = -4$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot e^z = 1 + i\sqrt{3} \\ |z - \log 2| < 12 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che il vettore $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \in W$

(ii) Determinare l'equazione intrinseca di uno spazio $Z \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $W \cap Z = \langle v \rangle$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008
TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SECONDA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-5]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +5x_2 & +x_3 \\ & tx_2 & +tx_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-6]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 \neq Im(f) \bigoplus Ker(f)$

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-4]

Disegnare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$(z+4i)^4 = -4$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot e^z = -\sqrt{3}+1 \\ |z-\log 2| < 10 \end{cases}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-5]

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in W$

(ii) Determinare l'equazione intrinseca di uno spazio $Z \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $W \cap Z = \langle v \rangle$

Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

prova scritta del 16/1/2008

TEMPO A DISPOSIZIONE: 70 minuti per ciascuna parte

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

SECONDA PARTE (70 minuti)

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 4. [punteggio: 0-5]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 \\ & tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & +6x_2 & +2x_3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Esercizio 5. [punteggio: 0-6]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 \neq Im(f) \bigoplus Ker(f)$

- **Esercizio 6. [punteggio: 0-4]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$