Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2007/2008

Compitino n.2 17/12/2007

TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 risposta sbagliata = -2

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\dim(Ker\ (f)) = 2 \Rightarrow rk(f) = 3$.	☐	☐
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	☐	☐
A matrice 3×3, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \det(A^n) = n \cdot \det(A)$	☐	☐
v autovettore per $f \Rightarrow 2v$ è autovettore per f	☐	☐

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ la molteplicità geometrica dell'autovalore 5 è $= \boxed{}$

- Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{pmatrix}$

  se $t = \boxed{}$

- Determinare la matrice A, associata rispetto alla base canonica all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

• **Esercizio 1. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & tx_2 & +tx_3 \\ tx_1 & +2x_2 & +x_3 \\ 2x_1 & 4x_2 & +2x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$,

Determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-5]**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f ?

• **Esercizio 3. [punteggio: 0-3]**

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & \beta \end{pmatrix}$$