Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria ____________ (Corso di Laurea)

prova scritta del 5-02-2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si trovino tutte le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2\bar{z} = z^3 \\ e^{\sqrt{2}\pi z} = 1 \end{cases}$$

Eserczio 2. Al variare del parametro t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ t & -1 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione di $\operatorname{Ker} f_t$ e di $\operatorname{Im} f_t$.
(ii) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini se il sistema:

$$f_t(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

ammette una, nessuna o infinite soluzioni.

Eserczio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si dimostri che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
(ii) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(iii) Si dica se f è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.

Esercizio 4. [Ingegneria Biomedica, Elettrica, Energetica e Informatica]

Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 2 e sia $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(2) \cdot q(2)$$

(i) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
(ii) Dire se esistono vettori isotropi.
(iii) Determinare, se esiste, un vettore v tale che $\langle v,\ v\rangle = 2$.

Esercizio 5.[Ingegneria Informatica]

Si determinino le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} 3^x \equiv 14 \quad (mod\ 17) \\ 3x \equiv 14 \quad (mod\ 17) \end{cases}$$