

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Informatica
prova scritta del 12-1-1999

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} 4^x \equiv 3 \pmod{13} \\ 4^x \equiv 17 \pmod{19} \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^8 - 256 = 0 \\ |z|^8 + 16\bar{z}^4 \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si determini il numero degli interi n , $100 \leq n \leq 1000$, che verificano:

- n non contiene cifre pari;
- la somma delle cifre di n è multipla di 5.

Esercizio 4. Al variare del parametro reale β , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinino i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui A è triangolarizzabile e quelli per cui A è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia $V \subset \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale su \mathbf{R} generato dalle funzioni

$$1, \sin x, \cos x$$

e sia $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$\langle f, g \rangle = (f \cdot g)'(0)$$

- (i) Dimostrare che \langle , \rangle è un prodotto scalare.
- (ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- (iii) Determinare, se esiste, una funzione $\varphi \in V$ tale che $\langle \varphi, \varphi \rangle = -4$.