Dimostrazione alternativa di un passo del teorema di P. Lévy.

Data $\{X_n\}$, supponiamo che $\varphi_{X_n}(t)$ converga puntualmente ad una funzione $\psi(t)$, continua in $t=0$. Mostriamo che la famiglia $\{P_{X_n}\}$ è tesa.

Siccome $\varphi_{X_n}(0)=1$, il limite $\psi(0)$ vale 1. In particolare, $\operatorname{Re}\psi(0)=1$ e quindi, dalla continuità, fissato (per il resto della dimostrazione) $\epsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che per ogni t con $|t|\leq\delta$ vale

$$\operatorname{Re}\psi(t)\geq 1-\frac{\epsilon}{2}.$$

Vale quindi

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\cos(tX_n)\right]\geq 1-\frac{\epsilon}{2}\qquad\text{per ogni }\ |t|\leq\delta.$$

In particolare, esiste n_0, dipendente da ϵ, tale che per ogni $n\geq n_0$

$$\mathbb{E}\left[\cos(tX_n)\right]\geq 1-\epsilon\qquad\text{per } t=\delta \text{ e } t=\frac{\delta}{2}.$$

Ovvero

$$\int\cos x P_{tX_n}(dx)\geq 1-\epsilon\qquad\text{per } t=\delta \text{ e } t=\frac{\delta}{2}.$$

Intuitivamente questo significa che le leggi di δX_n e di $\frac{\delta}{2}X_n$ sono molto concentrate nelle vicinanze dei numeri $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Quantifichiamo questa intuizione. Si suggerisce di seguire con un disegno l'argomentazione seguente.

Per $\eta>0$ piccolo, sia A_η l'unione degli intervalli $[2k\pi-\eta,2k\pi+\eta]$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$. Per $x\in A_\eta^c$ vale $\cos x<\cos\eta$. Prendiamo $\eta>0$ tale che $1-\cos\eta=\frac{1}{10}$. Affermiamo che

$$P_{tX_n}\left(A_\eta^c\right)<10\epsilon$$

che sarà la nostra quantificazione dell'idea che le leggi di δX_n e di $\frac{\delta}{2}X_n$ sono molto concentrate nelle vicinanze dei numeri $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Infatti, supponiamo per assurdo che sia $P_{tX_n}\left(A_\eta^c\right)=\alpha\geq 10\epsilon$. Vale quindi anche $P_{tX_n}(A_\eta)=1-\alpha$. Pertanto

$$\begin{aligned}
1-\epsilon &\leq \int_{A_\eta}\cos x P_{tX_n}(dx)+\int_{A_\eta^c}\cos x P_{tX_n}(dx)\\
&< 1-\alpha+\cos\eta P_{tX_n}\left(A_\eta^c\right)\\
&= 1-\alpha(1-\cos\eta)\\
&= 1-\frac{\alpha}{10}\leq 1-\epsilon.
\end{aligned}$$

Abbiamo trovato un assurdo (una delle disuguaglianze è stretta).

Abbiamo dimostrato che

$$P_{tX_n}(A_\eta)\geq 1-10\epsilon\qquad\text{per } t=\delta \text{ e } t=\frac{\delta}{2}$$

dove $\eta > 0$ è tale che $1 - \cos\eta = \frac{1}{10}$. Questo implica

$$P_{\delta X_n}\left([-\eta,\eta]\right) \geq 1 - 20\epsilon$$

cioè quasi tutta la massa è nel singolo intervallo attorno all'origine. Infatti, supponiamo per assurdo che sia

$$P_{\delta X_n}\left(A_\eta \setminus [-\eta,\eta]\right) = p > 10\epsilon.$$

Ne discende

$$P_{\frac{\delta}{2} X_n}\left(B_\eta \setminus \left[-\frac{\eta}{2},\frac{\eta}{2}\right]\right) = p$$

dove B_η è l'unione degli intervalli $\left[k\pi - \frac{\eta}{2}, k\pi + \frac{\eta}{2}\right]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Ma $B_\eta \setminus \left[-\frac{\eta}{2},\frac{\eta}{2}\right] \subset A_\eta^c$, quindi

$$P_{\frac{\delta}{2} X_n}\left(B_\eta \setminus \left[-\frac{\eta}{2},\frac{\eta}{2}\right]\right) \leq P_{\frac{\delta}{2} X_n}\left(A_\eta^c\right) < 10\epsilon$$

che contraddice un'affermazione precedente.

Abbiamo dimostrato che

$$P_{\delta X_n}\left([-\eta,\eta]\right) \geq 1 - 20\epsilon.$$

Ma questo si può riformulare dicendo che

$$P_{X_n}\left(\left[-\frac{\eta}{\delta},\frac{\eta}{\delta}\right]\right) \geq 1 - 20\epsilon.$$

La proprietà di famiglia tesa è dimostrata.