

Statistica I
Laurea triennale in Ingegneria Gestionale
a.a. 2016/17
Registro delle lezioni

27/09/2016. Introduzione al corso. Vengono illustrati alcuni elementi di statistica descrittiva (Capitolo 2 del S. Ross), come le proporzioni, la media aritmetica di un campione sperimentale, il range e la deviazione standard come misure della dispersione, l'istogramma.

Problema: corredare i riassunti statistici con affermazioni circa la loro affidabilità. Esempio: si calcola la media aritmetica di un campione sperimentale; quanto dista dalla media vera? In altre parole, che errore si commette approssimando la media vera con una media empirica? E poi, capito che non può esistere una dichiarazione sempre vera di tale errore: con che fiducia facciamo una certa dichiarazione sull'errore?

28/09/2016. Alcuni elementi di teoria delle densità gaussiane: densità gaussiana standard, traslazioni e dilatazioni, media e coefficiente σ di dispersione (*deviazione standard*). Se un modello ha media μ e dispersione σ , le medie aritmetiche di un suo campione di numerosità n hanno media μ e dispersione σ/\sqrt{n} .

Funzione di distribuzione cumulativa $\Phi(x)$ associata alla densità gaussiana standard. Problema inverso: quantile associato ad un'area assegnata. Notazione q_α e z_α , relazione $q_{1-\alpha} = z_\alpha$.

Problema del range simmetrico rispetto a 0 di area $1 - \alpha$, per una densità gaussiana standard: l'estremo destro è $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$.

4/10/2016. Consolidamento di alcune nozioni a livello generale: concetto di densità f e di funzione di ripartizione F (distribuzione cumulativa), loro relazione; linguaggio delle v.a. e loro probabilità in relazione a f e F ; esempi (v.a. esponenziale di parametro λ ed altri esempi), seconda parte della sezione 4.2 del libro. Funzione di sopravvivenza S (calcolo di F ed S per l'esponenziale).

Richiami su densità gaussiane. Esercizio su quantili di ordine $\alpha < 0.5$, con tavole, e probabilità con x negative. Trasformazioni di gaussiane generiche in gaussiana standard (standardizzazione), calcoli tipici per riportare una probabilità gaussiana generica all'uso di $\Phi(x)$; relazione tra quantile di una gaussiana generica e quello standard: $q_\alpha^{\mu,\sigma} = \mu + \sigma q_\alpha$.

5/10/2016. Trasformazioni quantili - passaggi che spiegano la formula. Esempi dalla parte intermedia della sezione 5.5 del libro.

Range di variabilità di una grandezza aleatoria gaussiana, a meno di una certa probabilità.

Campione sperimentale X_1, \dots, X_n , range di variabilità di $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Da qui, formula $\mu = \bar{x} \pm \frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ (sezione 7.3, da riprendere più avanti) per la stima della media. [Resta il problema di capire varie basi teoriche a fondamento di questo risultato.]

Per casa: dal compito di settembre 2016 (homepage di Romito), svolgere domande 1,2 dell'esercizio 2 e provare a svolgere le domande 1,2 dell'esercizio 1.

11/10/2016. Soluzione esercizi assegnati.

Fondamenti del calcolo delle probabilità (dal Capitolo 3): universo, eventi ed eventi elementari, probabilità e sue regole generali; esempio del lancio di un dado ed esempio generale di spazio di cardinalità finita.

12/10/2016. Soluzione domande 1 e 3 del terzo esercizio di settembre 2016; trasformazione di una densità.

Fondamenti del calcolo delle probabilità, Capitolo 3. Esempio della probabilità associata ad una densità. Probabilità condizionale e indipendenza.

18/10/2016. Soluzione compito di luglio 2016 (homepage di Romito), domande 1,2 dell'esercizio 1 e dell'esercizio 2 (senza parte finale della domanda 2 es. 1).

Approfondimenti su regole della probabilità (probabilità del complementare ecc.), su probabilità condizionale e indipendenza di eventi. Formula delle probabilità totali (con dimostrazione), esempio. Enunciato della formula di Bayes.

19/10/2016. Variabili aleatorie discrete: Bernoulli, binomiali e Poisson (verifica della somma 1), enunciato del teorema che lega Bernoulli e binomiali (somma di Bernoulli indipendenti), enunciato del teorema degli eventi rari, che collega binomiali e Poisson. Soluzione - non quantitativa - tramite binomiali dell'esercizio 1.b del 20/7/2016. Enunciato del Teorema Limite Centrale (TLC) per v.a. di Bernoulli, che ne lega la somma S alle gaussiane; utilizzo per risoluzione quantitativa dell'esercizio suddetto.

Valore atteso di una v.a. discreta, esempi delle Bernoulli e delle binomiali, usando un teorema sulla somma che vedremo più avanti; da qui si spiega un termine della standardizzazione di S nel TLC.

Esercizio per casa: compito del 29/6/2016, problema 1.a, problema 2.a.b.

25/10/2016. Valore attesi di v.a. discrete (richiamo) e continue, esempi di esponenziale e gaussiana; interpretazione grafica. Motivazione del valore atteso per v.a. discrete partendo dalla media aritmetica di un campione sperimentale.

Definizione dei momenti e soprattutto della varianza e deviazione standard σ . Proprietà del valore atteso (per ora senza dimostrazione), proprietà della varianza (con dimostrazione). Esempio: varianza di una Bernoulli, valore atteso e varianza di una binomiale. Verifica che l'espressione che compare nel teorema limite centrale è la standardizzazione di S .

Soluzione primo esercizio per casa.

26/10/2016. Soluzione secondo esercizio per casa. Valore atteso di una trasformazione nel continuo.

Varianza delle altre variabili importanti. V.a. uniformi.

Mancanza di memoria delle esponenziali.

2/11/2016. Breve introduzione ai modelli statistici. Problema della stima parametrica, esempi. Stimatori e stime, esempi (media e varianza campionarie). Stimatori non distorti e asintoticamente non distorti. Bontà di uno stimatore attraverso l'errore quadratico.

9/11/2016. Introduzione al metodo dei momenti. Momenti teorici e momenti empirici, sistema dei momenti, esempi (esponenziale, gaussiana).

Introduzione al metodo della massima verosimiglianza. Idea generale, implementazione nel caso discreto e continuo, esempi (Bernoulli, esponenziale, Gaussiana, uniforme).

16/11/2016. Esercizi sulla stima parametrica attraverso il metodo dei momenti e il metodo della massima verosimiglianza (esercizi 8.1, 8.5, 8.7, 8.9 del foglio esercizi sulla stima parametrica relativo all'anno accademico 2015/16)

22/11/2016. (ore 12:00-13:30) Legge dei grandi numeri: enunciato base (v.a. i.i.d. ecc.), dimostrazione della convergenza in media quadratica, generalizzazione a v.a. scorrelate, con solo media e varianza uguali. Convergenza in probabilità e in media quadratica, legame, dimostrato con la disuguaglianza di Chebyshev, dimostrata con quella di Markov (per ora non dimostrata); se ne deduce la LGN secondo la convergenza in probabilità.

Esercizi per casa: 12/1/2016, es. 2.c (stimatore di MV) e 3.a, 3.b; 4/2/2016, es. 2.d (stimatore con metodo dei momenti); 3.a e 3.b.

23/11/2016. Fluttuazioni della LGN: teorema limite centrale (TLC).

Coppie e vettori di v.a., densità congiunta e densità marginali, loro legami (solo definizioni ed enunciati). Utilizzo per dimostrare proprietà del valore atteso (teorema sulla somma e sul prodotto).

Covarianza, sua riscrittura, covarianza nulla per v.a. indipendenti.

Soluzione esercizi: 12/1/2016, 2.c. Nota su esercizio 12/1/2016, 1.a.

29/11/2016. Introduzione ai test statistici, partendo a titolo di esempio da compito 20/7/2016 domanda 1.d. i) soluzione tramite intervalli di confidenza, bilateri per ora; ii) soluzione tramite calcolo della probabilità di un valore estremo.

Ipotesi nulla ed alternativa, significatività e regione di rifiuto, struttura dell'esecuzione di un test e sua conclusione.

Soluzione esercizi per casa (il 12/1/2016, es. 3.a, 3.b).

30/11/2016. Funzione generatrice, sue proprietà ed esempi e suo utilizzo per dimostrare che la somma di gaussiane indipendenti è gaussiana.

Distribuzioni χ^2 e t di Student (definizioni e grafici), uso delle tavole.

Per casa: ripercorrere vari esercizi visti fino ad ora sugli intervalli di confidenza sostituendo il quantile gaussiano con quello di Student.

Risolvere con i due metodi visti fino ad ora per i test (intervallo bilatero e probabilità di un valore estremo) gli esercizi 12/1/2016 1.b e 4/2/2016 1.c.

6/12/2016. Richiamo sulla costruzione di intervalli di confidenza bilateri quando la varianza è nota; la formula generale vale sempre ma diventa inutilizzabile quando la varianza non è nota. Teorema sulle v.a. t di student (senza dimostrazione); suo utilizzo per trovare intervalli di confidenza quando la varianza non è nota. Varianti unilaterali dei due casi. Rivisitazione degli esercizi, in particolare es. 1 del 12/1/2016.

Proseguimento introduzione ai test statistici: dopo aver richiamato i concetti di ipotesi nulla ed alternativa, chiarire quello di regione di rifiuto (critica) di livello α (la significatività); errore di prima specie. Esempificare nel caso gaussiano e t di Student, unilaterale e bilaterale.

7/12/2016. Discussione sul fatto se sia più potente un test unilaterale o bilaterale.

Range di livelli che inducono al rifiuto, valore minimo, valore p . Riformulazione del valore p come probabilità di assumere un valore estremo, capendo la riformulazione in un caso unilaterale. Riassunto sulle due strategie di test, esempi.

Per casa: rivedere e completare esercizio 1 del 20/7/2016.

13/12/2016. Errore di II specie, sua probabilità (come funzione del parametro indagato oppure della sua standardizzazione). Curve caratteristiche operative. Esercizio 1 del 4.2.2016.

14/12/2016. Approfondimenti sulla probabilità di errore di II specie, curve caratteristiche operative, potenza di un test. Caso unilaterale destro e sinistro; esercizio 23/2/2016 n. 1 (salvo punto b).

Cenno alla numerosità per avere una certa potenza (inquadrata nel problema del design of experiments).

Intervalli di confidenza (e cenno ai test) per la varianza.

Esercizi per casa: 23/2/2016, 1.b; 29/6/2016, 1.b,d; 12/9/2016, 1.c,d.

20/12/2016. Soluzione esercizi per casa ed esercizi di riepilogo.

i) Stima con MV e momenti; a titolo di esempio: es. 8/6/2016 e 12/9/2016.

ii) Calcolo di costanti di densità, valori attesi, probabilità, funzioni cumulative, densità di trasformazioni, TLC;

a titolo di esempio: 8/6/2016 n.2 e 3, 29/6/2016 n.3.a; 8/6/2016 es. 1.d.

Per mancanza di tempo non sono stati svolti esercizi sul calcolo di covarianze e correlazioni, come ad esempio il 29/6/2016 n.3.b. Tali esercizi non verranno dati nei compiti di questo anno accademico.

iii) Intervalli di confidenza, massimo e minimo di una v.a. a meno di una probabilità, test (regioni di rifiuto, valore p , potenza, curve caratteristiche); a titolo di esempio: 23/2/2016 es. 1.b, 8/6/2016 1.c.

Per mancanza di tempo non sono stati svolti esercizi su test per la varianza (o dev. st.) come il 29/6/2016 es. 1.d; o esercizi su test di confronto tra due campioni (differenza di medie, es. 23/2/2016 es 1.d). Tali esercizi non verranno dati nei compiti di questo anno accademico.