Statistica I - A.A. 2017-2018

Prova scritta - 16 febbraio 2018

Exercise 1 *(pt 20, $\sim$ 4+4+4+4+4) Un'azienda produce filtri per l'aria. Chiamiamo Y la durata del filtro in situazioni di laboratorio (dove si applica un criterio quantitativo preciso per decidere quando il filtro va sostituito). Si supponga Y gaussiana. Il filtro ormai in commercio da anni ha statistica $N\left(875, 56^2\right)$ (in ore).*

1. Calcolare la probabilità che il filtro duri almeno 800 ore, raffigurando la risoluzione con un disegno.

2. Ultimamente arrivano segnalazioni dei rivenditori, secondo cui pare che la gente sostituisca questi filtri troppo spesso. L'azienda sottopone nuovamente a prove di laboratorio i filtri attualmente prodotti per capire se possano essere davvero peggiorati. Prova 10 filtri (le prove richiedono tanto tempo, per questo sono così poche) e trova una durata media di 782 ore, con deviazione standard pari a 58. E' una dimostrazione di un peggioramento? Si accetti una probabiltà pari a 0.05 di dichiarare ingiustamente un peggioramento (spiegare come si è usato questo dato).

3. Quale probabilità di dichiarare ingiustamente un peggioramento avremmo dovuto fissare affinché il test fosse risultato significativo? Spiegare accuratamente e con spirito critico la risoluzione.

4. Un nuovo tipo di macchina ha bisogno di un livello maggiore di pulizia e quindi il filtro si considera sporco prima che nelle macchine precedenti. In laboratorio, si misura la durata del filtro in queste nuove condizioni trovando una durata media di 659 ore, con deviazione standard pari a 64. Se questi dati derivano dalla prova su 10 filtri, di quanto potremmo aver sbagliato la media vera, nelle condizioni nuove di utilizzo, basandoci sul valore sperimentale 659? Rispondere al 90 ed al 99 per cento.

5. In queste nuove condizioni di utilizzo, calcolare la probabilità che il filtro duri almeno di 600 ore, dando la risposta più cautelativa possibile.

Exercise 2 *(pt 10, $\sim$ 3+4+3) Sia T un tempo esponenziale di parametro $\lambda = 1$.*

1. Calcolare il tempo t tale che $P(T > t) = 0.1$.

2. Posto $S = \log T$, trovare la densità di probabilità di S.

3. Supponiamo ora che T sia un tempo esponenziale di parametro λ incognito. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di λ.

1 SOLUZIONI

Esercizio 1.
1)
$$P(Y < 800) = ... = 0.9.$$

2) La probabiltà di dichiarare ingiustamente un peggioramento è la probabiltà dell'errore di prima specie. Con le ipotesi $\mathcal{H}_0$) nuova media ≥ 875, $\mathcal{H}_1$) nuova media < 875 e la regione di rifiuto:

$$\left\{(t_1, ..., t_{20}) : \frac{\bar{t} - 875}{58}\sqrt{10} < -t_{9,0.05}\right\}$$

si esegue il test.
3) Si tratta di calcolare il valore p.
4) Potremmo aver sbagliato di 34 ore e di 57 ore, nei due casi.
5) Si fa il conto con la media pari a 659-57 ore.
Esercizio 2.
1) Integrando la densità si trova $P(T > t) = e^{-t} = 0.1$ che poi si risolve.
2) Si imposta $P(S \leq s) = P(\log T \leq s) = P(T \leq e^s)$ per trovare la F_S, da cui si trova la f_S derivando.
3) Svolto a lezione.