Statistica I - A.A. 2017-2018

Prova scritta - 12 dicembre 2017

Exercise 1 *(pt 16, ∼ 3+4+2+4+3) Un'azienda farmaceutica vende da tempo un prodotto che guarisce in 16 giorni in media, con deviazione standard di 5 giorni. Ha sviluppato un nuovo prodotto che dovrebbe guarire più in fretta ma non può esserne sicura senza una verifica sperimentale. In entrambi i casi si assuma la gaussianità del tempo di guarigione, chiamato* T *(i valori sperimentali dovranno essere indicati con* $t_1, ...$ *e le medie empiriche con* $\bar{t}$*). Quindi* $T \sim N(16, 25)$ *secondo il vecchio trattamento,* $T \sim N(\mu, 25)$ *secondo il nuovo (si assuma che la varianza non cambi e si indichi con* μ *il generico nuovo valore vero della media).*

1. L'azienda decide di svolgere un test unilaterale a livello di significatività del 90%, per capire se il nuovo farmaco produce una guarigione media migliore. Scrivere ipotesi nulla e ipotesi alternativa, spiegando perché si ha fatto tale scelta. Scrivere la regione di rifiuto, sia con simboli astratti sia in modo numerico, ovvero usando i numeri specifici del problema, relativamente ad un campione sperimentale di numerosità 50.
2. Prima di iniziare la lunga campagna sperimentale, già prevista di numerosità 50, quali miglioramenti della media sarà in grado di riconoscere questo test (per quali miglioramenti il test risulterà significativo), con probabilità $\geq 95\%$? E' essenziale che lo studente imposti con chiarezza il problema ("Dobbiamo trovare i valori di μ tali che ...) senza utilizzare formulette preconfezionate; poi svolgerà i calcoli, fin dove sarà in grado di svolgerli.
3. Svolta la campagna sperimentale, l'azienda ha trovato un numero medio di giorni pari a 12. Può affermare che il nuovo farmaco è migliore?
4. Scelta come definizione di p-value quella di punto di demarcazione tra α significativi e non, scrivere l'equazione che traduce tale definizione e, partendo da tale equazione, calcolare il valore numerico di p.
5. Usando il nuovo farmaco, che probabilità c'è che una persona impieghi più di 19 giorni a guarire? E invece, usando quello vecchio?

1 SOLUZIONI

1) $\mathcal{H}_0$) nuova media ≥ 16, $\mathcal{H}_1$) nuova media <16; abbiamo scelto come $\mathcal{H}_0$ l'ipotesi che si spera di rifiutare (si spera di concludere che il nuovo trattamento è migliore). Regione di rifiuto:

$$\left\{(t_1, ..., t_{50}) : \bar{t} < 16 - \frac{5 \cdot t_{49,0.1}}{\sqrt{50}}\right\}$$
$$\sim \quad \left\{(t_1, ..., t_{50}) : \bar{t} < 15.081\right\}$$

essendo $16-\frac{5\cdot t_{49,0.1}}{\sqrt{50}} \sim 16-\frac{5\cdot 1.299}{\sqrt{50}} = 15.081$ (oppure $\bar{t} < 16-\frac{5\cdot q_{0.9}}{\sqrt{50}}$ se si usa l'approssimazione gaussiana).

2) Dobbiamo trovare i valori di μ tali che

$$P^{\mu,5}\left(\overline{T} < 16-\frac{5\cdot q_{0.9}}{\sqrt{50}}\right) \geq 0.95.$$

Siccome $\overline{T} \sim N\left(\mu, \frac{25}{50}\right)$, riscriviamo l'identità precedente come

$$P\left(Z < \frac{16-\frac{5\cdot q_{0.9}}{\sqrt{50}}-\mu}{5}\sqrt{50}\right) \geq 0.95$$

dove $Z \sim N(0,1)$, quindi

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{16-\mu}{5}\sqrt{50}-q_{0.9}\right) &\geq 0.95\\ \frac{16-\mu}{5}\sqrt{50}-q_{0.9} &\geq q_{0.95}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &\leq 16-\frac{q_{0.95}+q_{0.9}}{\sqrt{50}}5\\ &= 16-\frac{1.64+1.29}{\sqrt{50}}5 = 13.928.\end{aligned}$$

(Al termine dello svolgimento, se si vuole indicare il miglioramento esso è $|\mu - 15|$.)

3) Sì, perché 12 cade nella regione di rifiuto (è < 15.081).

4) Il test è significativo per gli α tali che $\bar{t} < 16-\frac{5\cdot q_{1-\alpha}}{\sqrt{50}}$, cioè $12 < 16-\frac{5\cdot q_{1-\alpha}}{\sqrt{50}}$ Quindi il punto di demarcazione p soddisfa

$$12 = 16-\frac{5\cdot q_{1-p}}{\sqrt{50}}$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{5\cdot q_{1-p}}{\sqrt{50}} &= 16-12\\ q_{1-p} &= \frac{4}{5}\sqrt{50} = 5.657\\ 1-p &= \Phi(5.657) \sim 0\end{aligned}$$

quindi p è circa zero (inferiore a 0.00003).

5)

$$P^{12,5}(T > 19) = P\left(Z > \frac{19-12}{5}\right) = 1-\Phi(1.4) = 1-0.91924 = 0.08076$$

$$P^{16,5}(T > 19) = P\left(Z > \frac{19-16}{5}\right) = 1-\Phi(0.6) = 1-0.72575 = 0.274\,25.$$

C'è stato un buon miglioramento.