PROBABILITA'
Laurea in Matematica
a.a. 2016/17
Registro delle lezioni

26/09/2016. Teorema delle classi monotone, con dimostrazione.

Corollario di unicità di misure coincidenti su classi chiuse per intersezione - dim facoltativa per esercizio.

Teorema di prolungamento. Tracce della dimostrazione viste fino ad ora: estensione a unioni monotone - con lemma che ne garantisce la buona definizione; enunciato delle sue buone proprietà; difetto che non è una sigma-algebra; definizione di P^* su tutte le parti, enunciato delle sue proprietà, mancanza di additività in generale; insiemi di Caratheodory ed enunciato finale (Teorema 1.1.8).

28/09/2016. Dimostrazione di varie parti dei teoremi precedenti. Ruolo dell'estensione $\mathcal{B}$, con un esempio. Diverse proprietà di P^*, se fosse stata definita a partire da $\mathcal{A}$. A questa parte del corso mancano per ora le dimostrazioni del lemma 1.1.6 e della proposizione 1.1.7 punto 3.

30/09/2016. Premesse su misure sigma-finite, densità, problema dell'esistenza della densità, formula empirica per la densità, condizione di assoluta continuità, enunciato del teorema di Radon-Nicodym. Spazi di Hilbert e spazi L^2, teorema di Riesz, legame intuitivo con l'enunciato da dimostrare. Dimostrazione del teorema di Radon-Nicodym. Esempio di due misure nulle in tutti i punti ma senza assoluta continuità.

3/10/2016. Iniziamo lo studio di due problemi: definire la misura prodotto di due misure, e la misura prodotto di una successione di misure.

Prodotto di due misure. Per esercizio, ragionare su come si potrebbe fare la costruzione nel caso di spazi metrici, approssimando gli insiemi di interesse con insiemi compatti contenuti, di misura circa uguale (come nel teorema del corso di EPS). Caso generale: definizione esplicita su eventi qualsiasi, verifica che è ben data (Prop. 2.3.1) e che estende il prodotto delle misure per i rettangoli.

Prodotto infinito (numerabile). Due definizioni di σ-algebra prodotto, loro equivalenza. Per esercizio, ragionare su diverse metriche (uniformi e non) sullo spazio prodotto e sul legame tra i corrispondenti boreliani e la σ-algebra prodotto; ragionare poi su come usare queste informazioni per ripetere una dimostrazione basata su compatti incapsulati.

5/10/2016. Completamento della costruzione della misura prodotto infinito (Teorema 2.5.1). Variabili aleatorie indipendenti, sia in numero finito che infinito, relazione con le costruzioni appena fatte. Esistenza di una successione di v.a. indipendenti con leggi date.

Esempi di problemi in cui serve l'intera successione. Tempo di primo accadimento, esercizio.

7/10/2016. Ricorrenza, come ulteriore esempio di eventi che dipendono dall'intera successione.

Criterio di misurabilità di Doob. Legge 0-1 di Kolmogorov.

Limite superiore di eventi e primo lemma di Borel-Cantelli.

10/10/2016. Secondo lemma di Borel-Cantelli (ultima parte rimasta da svolgere del Capitolo 2); applicazione a ricorrenza. Riformulazione del lim sup di insiemi, e quindi del primo lemma di Borel-Cantelli tramite un'affermazione che vale definitivamente. Applicazione alle fluttuazioni di una successione di v.a. i.i.d.; usando F ed usando Chebyshev; esempio delle v.a. esponenziali, coi due metodi.

Definizione di convergenza quasi certa (e richiamo delle definizioni di convergenza in probabilità ed in L^p). Enunciato dei legami tra convergenze q.c. e in probabilità.

Esercizio per casa: sulla falsariga dell'esercizio sulle fluttuazioni, cercare condizioni sufficienti affinché $|X_n - X| \leq \epsilon_n$ definitivamente, fatto che implica la convergenza quasi certa.

12/10/2016. Esempio di applicazione di Borel-Cantelli 1: condizioni sufficienti per convergenza quasi certa (esempio di criterio: se esistono $p \geq 1$ ed $\epsilon_n \to 0$ tali che $\sum_n E\left[|X_n - X|^p\right] / \epsilon_n < \infty$, allora vale la convergenza quasi certa). Applicazione alla dimostrazione della proposizione 4.1.2.c. Idea di applicazione alla LGN, sotto l'ipotesi $E\left[X_1^4\right] < \infty$, cercando di dimostrare che $E\left[\left|\overline{X}_n - \mu\right|^4\right] \leq \frac{C}{n^2}$.

Dimostrazione dei legami tra convergenze q.c., in probabilità ed in L^p ed altri criteri collegati (ancora da dimostrare il criterio 4.1.4); cenno ad una metrica per la convergenza in probabilità. Dimostrazione della stabilità della convergenza in probabilità sotto funzioni continue.

14/10/2016. Dal Capitolo 1: proposizione 1.3.6; misure equivalenti, esempi; definizione 1.3.11, sue riformulazioni, esempi di misure singolari; teorema 1.3.12 (solo dimostrazione esistenza). Esercizio per casa.

17/10/2016. Soluzione dell'esercizio, completamento di una probabilità. Con questo si considera concluso lo studio del capitolo 1; non vengono svolte le appendici se non limitatamente ai pochi elementi essenziali sugli spazi di Hilbert.

Definizione di funzione caratteristica, teoremi sulla caratteristica della somma di v.a. indipendenti e sulla caratteristica di un vettore con componenti indipendenti, primo teorema sulla derivata della funzione caratteristica.

Esempi: Bernoulli, binomiale, Poisson, gaussiana (in alcuni casi con metodi informali).

19/10/2016. Secondo teorema sulla derivata della funzione caratteristica.

Vettori gaussiani: due definizioni geometriche, loro interpretazioni (cenno alla generalizzazione a spazi di Hilbert). Matrice di covarianza, sua definita positività. Gaussiane degeneri, come esempi di misure singolari rispetto a Lebesgue. Alcuni enunciati sulla matrice di covarianza in connessione con trasrformazioni lineari.

21/10/2016. Sviluppo in serie delle funzioni caratteristiche. Criterio sulla coincidenza delle funzioni caratteristiche basato sui momenti, analogo criterio per le leggi, basato sulla Proposizione 3.2.1 che vedremo più avanti. Criterio di indipendenza tramite funzione caratteristica della coppia, enunciato della sua conseguenza per vettori gaussiani.

Esercizio su sviluppo in serie di Taylor: tentativo di richiedere la condizione del Corollario 3.1.5 solo per i momenti di ordine pari.

24/10/2016. Completamento della teoria dei vettori gaussiani (covarianza di una trasformazione affine, la gaussianità si conserva per trasformazioni affini, teorema di esistenza di v.a. gaussiane con covarianza data, funzione caratteristica di una gaussiana, la legge di una gaussiana dipende solo da media e covarianza, densità gaussiana nel caso non degenere).

Dimostrazione del criterio 4.1.4 e sue prime conseguenze (pag 57, svolte per esercizio, in più modi).

26/10/2016. Completamento della sezione sulle convergenze in probabilità, in L^p e quasi certa: teorema di tipo Lebesgue per la convergenza in probabilità; successioni di Cauchy in probabilità e relativo teorema; enunciato della completezza di altri spazi; metrizzabilità della convergenza in probabilità.

Convergenza in legge di v.a. e suoi primi legami con la convergenza in probabilità.

Definizioni di convergenza stretta, vaga e debole; esempio che converge vagamente ma non strettamente; enunciato del teorema che lega convergenza vaga a stretta.

28/10/2016. Dimostrazione del teorema che lega convergenza vaga a stretta. Altri legami.

Teorema di Helly (dimostrato), definizione di famiglia tesa e teorema di Prohorov (da dimostrare).

4/11/2016. Enunciati e dimostrazioni dei fatti 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3.

Per quanto riguarda 3.2.3, è stato mostrato che per le variabili Gamma la formula di inversione puo' valere solo

per $r > 1$; è stata poi calcolata la funzione caratteristica della densità di Cauchy partendo dalla v.a. che ha densità $1/2 \cdot exp(-|x|)$.

E' stato esaminato il controesempio al "problema dei momenti" svolgendo il primo esempio dell'appendice. Il paragrafo sulla funzione generatrice dei momenti è stato (almeno per il momento) tralasciato.

11/11/2016. Definita la tensione, è stato dimostrato il teorema di Prohorov. Citato 4.2.8 senza dimostrazione; dimostrazione del fatto che la convergenza stretta deriva da una metrica.

Convergenza in legge: osservazione 4.3.3, 4.3.4 e teorema 4.3.6 con estensione al caso vettoriale. Dimostrato 4.3.7.

18/11/2016. Osservazioni ed esempi sulla convergenza debole delle coppie di v.a., a seconda di varie ipotesi sulla convergenza delle marginali; teorema di Slutsky.

Teorema di rappresentazione di Skorohod, dimostrazione per ora solo nel caso di funzioni di distribuzione continue e strettamente crescenti. Osservazione 4.3.10, dimostrata.

21/11/2016. Premessa sul significato intuitivo e sulla rilevanza concettuale della legge dei grandi numeri (LGN) e del teorema limite centrale (TLC) (TLC come studio delle fluttuazioni della LGN).

Enunciato e dimostrazione del TLC (teorema 5.1.1). Enunciato e idea della dimostrazione della variante 5.1.3.

Richiamo su diverse versioni della LGN debole.

Lemma di Kronecker.

23/11/2016. Note a margine della dimostrazione del TLC: un modo di evitare l'uso dei logaritmi in campo complesso.

Disuguaglianza massimale di Kolmogorov: solo prima parte (5.2.1).

Teorema 5.2.2: solo prima parte (convergenza quasi certa della serie, dall'ipotesi di convergenza delle medie quadratiche).

25/11/2016. Definizione generale di legge dei grandi numeri debole e forte e richiamo su un criterio debole, basato sulle sole ipotesi di scorrelazione e $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \to 0$. A confronto con esso: Teorema 5.3.3.

Legge forte di Kolmogorov: dimostrazione costruttuiva partendo dall'idea di troncamento, cercando le condizioni per cui valgano tutte le proprietà che servono. Si ricade nelle due tesi del Lemma 5.3.4, di cui è stata fatta la dimostrazione della prima parte.

28/11/2016. Definizione di speranza condizionale, partendo dall'esempio 6.2.1.

Note sul capitolo 1 (es.: mostrare che se μ è σ-finita ed f è finita quasi certamentr, allora $f\mu$ è σ-finita).

30/11/2016. Proprietà della speranza condizionale (paragrafo 6.1, salvo per ora 6.1.5, 6.1.6, 6.1.9 e dettagli di 6.1.8.

Possibili domande d'esame sul capitolo 1, seconda parte.

2/12/2016. Intuizione circa la speranza condizionale, come riassunto parziale di X (rispetto alla speranza). Processi stocastici e loro filtrazioni. Definizione di processo di Markov, come esempio d'uso della speranza condizionale. *Fuori programma d'esame*, come esempio di processi di Markov e di speranza condizionale nel caso di sigma algebre discrete, è stato illustrato il caso delle catene di Markov a tempo discreto.

7/12/2016. Definizioni sui processi stocastici. Legge nel caso di processi generali ed a traiettorie continue. Definizioni relative al moto browniano ed intuizione fisica o simulativa.

9/12/2016. Discussione di alcuni problemi proposti sui Capitoli 1-3.

12/12/2016. Rivisitazione di esempi ed enunciati dei Capitoli 1-3. Si vedano gli esempi raccolti in rete.

Inizio della costruzione del moto browniano.

14/12/2016. Completamento costruzione del moto browniano. Proprietà della variazione quadratica e sua conseguenza di non hölderianità con esponente $\alpha > \frac{1}{2}$. Enunciato del Teorema di regolarità di Kolmogorov e sua applicazione alla regolarità hölderiana del moto browniano con esponente $\alpha < \frac{1}{2}$.

16/12/2016. Teorema di regolarità di Kolmogorov (dimostrazione completa).

19/12/2016. Definizione e costruzione del processo di Poisson (vedere anche note aggiuntive).

Brevissima chiaccherata finale, non in programma, sulla possibilità di definire moto browniano e processo di Poisson sullo spazio $\Omega = [0, 1]$, coi boreliani e la misura di Lebesgue (si basa su Proposizione 6.4.5 e Teorema 6.4.6).