Elementi di Probabilità e Statistica
Dottorato Internazionale in Ingegneria Civile e Ambientale
a.a. 2016/17
Registro delle lezioni

2/02/2017. (due ore) Introduzione al corso. Partendo da un esempio (esercizio allegato) viene illustrato un tipico problema di stima o caratterizzazione dei parametri, in cui si vuole anche quantificare la precisione della stima, con una certa confidenza. Illustrata la formula a cui si arriverà più avanti, nasce la motivazione per un ampio approfondimento delle basi.

Durante la lezione sono poi stati sviluppati gli elementi di base della teoria della probabilità come lo spazio degli eventi, le regole su eventi e la loro corrispondenza con regole logiche su proposizioni, il concetto di probabilità con i suoi assiomi, un cenno al caso dell'additività numerabile, un esempio con distribuzione equiprobabile, uno uno spazio numerabile ed infine la probabilità associata ad una densità di probabilità.

E' stata poi introdotta la probabilità condizionale ed introdotta la formula delle probabilità totali con l'interpretazione dell'albero degli eventi, che verrà ripresa.

Il materiale si trova nel Capitolo 3 (Elementi di Probabilità) del libro di Ross.

10/02/2017. (tre ore) Formula delle probabilità totali: dimostrazione; albero degli eventi, esempio articolato, possibili generalizzazioni. Formula di Bayes: dimostrazione; albero degli eventi, esempio articolato. Indipendenza di eventi, legame col concetto di probabilità condizionale.

17/02/2017. (due ore) Distribuzioni discrete: Bernoulli, binomiale, Poisson e geometrica; verifica della somma 1 in tutti i casi. Interpretazione tramite lo schema successo/insuccesso (numero di successi, istante del primo successo). Teorema degli eventi rari (con dimostrazione) e dimostrazione della formula della distribuzione geometrica.

Variabili aleatorie: visione intuitiva e visione rigorosa come applicazioni definite sull'universo degli eventi.

Valor medio di una v.a. discreta, primi esempi.

20/02/2017. (tre ore) Variabili aleatorie continue e densità di probabilità, valori attesi. Esempi: v.a. uniformi, triangolari, esponenziali, gaussiane; loro medie; la media di una distribuzione simmetrica rispetto ad un punto μ è μ. Mancanza di memoria delle esponenziali. Momenti e varianza, deviazione standard; interpretazione geometrica di media e deviazione standard. I parametri della gaussiana sono media e varianza. Regole su valor medio, varianza e gaussiane (senza dimostrazioni): la gaussianità si conserva per combinazioni lineari ed affini, di v.a. indipendenti; linearità del valor medio; per v.a. indipendenti la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze; trasformazioni affini e varianza; infine, parametri di una combinazione affine di gaussiane indipendenti. Quantili gaussiani standard.

Campione sperimentale $X_1, ..., X_n$, stimatore $\overline{X}$ della media μ, $\overline{X}$ è $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ se le X_i

sono $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, deduzione della formula $P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|\leq\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$.

Gli studenti sono invitati ad esaminare le domande 1.1 e 1.2 dei compiti d'esame (risolti) riportati in rete.

3/03/2017. (tre ore) Densità congiunte e marginali, loro legami ed uso per dimostrare ad esempio $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ (analogamente per $E[XY]=E[X]E[Y]$). Quando $E[XY]=E[X]E[Y]$, diciamo che X ed Y sono scorrelate. Riassunto sul concetto di indipendenza. Definzioni di covarianza e correlazione, caratterizzazione della scorrelazione.

Intermezzo sul software R. Come esempio: distribuzione empirica della correlazione tra stringhe indipendenti (comandi alla lezione del 9/10/2015 del corso di Statistica II).

Funzione generatrice dei momenti, sue proprietà, generatrice della gaussiana, utilizzo per dimostrare che la somma di gaussiane indipendenti è gaussiana, riproducibilità di alcune distribuzioni.

10/03/2017. (tre ore) Studio dettagliato di $\overline{X}$, dato un campione sperimentale $X_1,...,X_n$. E' stimatore corretto (non distorto) di μ; è stimatore consistente, cioè converge (in senso opportuno a μ. Legge dei grandi numeri, con convergenza in media quadratica ed in probabilità (enunciato della disuguaglianza di Chebyshev). Intepretazione della probabilità come limite delle frequenze relative di successo. Caso gaussiano: $\overline{X}$ è gaussiana. Da qui si deduce (come anche già visto parzialmente in lezioni precedenti) la regola: $\mu=\overline{X}\pm\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ a livello di confidenza $1-\alpha$. Si tratta dell'intervallo di confidenza. Utilizzo per la progettazione di esperimenti (ricerca di n).

Problema della non conoscenza di σ: $\mu=\overline{X}\pm\frac{St_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$, usando le t di Student.

Teorema limite centrale, suo uso sia in statistica sia nei problemi di conteggio.

13/03/2017. (tre ore) Soluzione di un esercizio dato per casa, su soglia minima e intervallo di confidenza.

Test statistici: ipotesi, regione di rifiuto, esecuzione del test; tutto esemplificato per il test gaussiano per la media, con varianza nota o incognita. Valore p, esemplificato nel caso a varianza nota.

Errori di prima e seconda specie, loro probabilità, curva caratteristica operativa e potenza di un test.

Capitoli del libro spiegati:

- Capitoli 1 e 2 non esplicitamente spiegati, solo cenni, completati con qualche cenno sull'uso del software R
- Capitolo 3: svolte tutte le sezioni (trascurando alcuni elementi di calcolo combinatorico e gli esempi);
- Capitolo 4: svolte tutte le sezioni, nelle loro parti essenziali (trascurando alcune dimostrazioni e dettagli)
- Capitolo 5: sezioni 1,2,4,5,6.
- Capitolo 6: sezioni 1,2,3 (3.1, 3.2)

- Capitolo 7: sezioni 1, 3.1
- Capitolo 8: sezioni 1, 2, 3.1 e 3.2.