Appunti per il corso di Analisi Convessa

Claudio Saccon

10 novembre 2022

Indice

0.1 Introduzione

Qui dovrebbe esserci un'introduzione. [3, 1, 2, 7, 4, 5, 6]

0.2 Insiemi convessi

Introduciamo in questo paragrafo la nozione di insieme convesso e mettiamo in evidenza alcune proprietà elementari che discendono dalla definizione. In effetti utilizzeremo qui alcune nozioni sugli spazi vettoriali topologici di cui parleremo più avanti – a una prima lettura si può supporre che l'ambiente $\mathbb{X}$ sia $\mathbb{R}^N$ (in cui comunque le dimostrazioni non sono banali)

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale.

0.2.1 Definizione. Un insieme $K \subset \mathbb{X}$ si dice convesso se per ogni $x_1, x_2 \in K$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ la *combinazione convessa* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ appartiene a K.

0.2.2 Proposizione. *Se K_1, K_2 sono convessi e se λ_1, λ_2 sono numeri reali, allora l'insieme*

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}$$

è convesso.

Se $(K_i)_{i\in\mathscr{I}}$ è una famiglia di insiemi convessi, allora $K := \bigcap_{i\in\mathscr{I}} K_i$ è convesso.

0.2.3 Proposizione. *Un sottinsieme $K \subset \mathbb{X}$ è convesso se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni n-pla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$ e per ogni n-pla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, si ha:*

$$x_i \in K,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K.$$

0.2.4 Definizione. Dato $A \subset \mathbb{X}$ definiamo l'*inviluppo convesso* di A:

$$\mathrm{co}(A) := \bigcap_{\substack{K \text{ convesso} \\ A\subset K}} K.$$

Chiaramente $\mathrm{co}(A)$ è il più piccolo insieme convesso contenente A. Non è difficile dimostrare che:

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio vettoriale topologico (vedi (2.1.1).

0.2.5 Proposizione. *Sia $K \subset \mathbb{X}$ convesso. Allora $\bar{K}$ e $\mathring{K}$ sono convessi.*

0.2.6 Lemma. *Sia K convesso. Siano $x_0, x_1 \in K$ e U un intorno di zero tale che $x_1 + U \subset K$. Se $t \in [0,1]$ indichiamo $x_t := x_0 + t(x_1 - x_0)$. Allora per ogni t con $0 < t \leq 1$ si ha: $x_t + tU \subset K$.*

Dimostrazione. Sia t con $0 < t \leq 1$. Prendiamo $z \in x_t + tU$; dunque esiste $u \in U$ tale che $z = x_t + tu$. Allora:

$$z = x_0 + t(x_1 - x_0) + tu = (1-t)\underbrace{x_0}_{\in K} + t\underbrace{(x_1 + u)}_{\in K} \in K.$$

Abbiamo dimostrato che $x_t + tU \subset K$ (vedi anche la figura 0.2. $\square$

0.2.7 Lemma. *Sia K convesso siano $x_1 \in \mathring{K}$, $x_0 \in \bar{K}$. Allora il segmento $]x_0, x_1] := \{x_0 + t(x_1 - x_0) : 0 < t \leq 1\}$ è contenuto in $\mathring{K}$.*

Dimostrazione. Sia U un intorno di zero in $\mathbb{X}$ tale che $x_1 + U \subset K$ e sia t fissato con $0 < t \leq 1$. Scegliamo un intorno di zero U' in modo che U' sia bilanciato e $U' + U' \subset tU$ (cfr. (2.1.8) e (2.1.11)). Dato che $x_0 \in \bar{K}$ esiste $x' \in K \cap (x_0 + U')$. Applicando il Lemma precedente con x' in luogo di x_0 otteniamo che $x'_t := x' + t(x_1 - x')$ ha la proprietà $x'_t + tU \subset K$. Se, al solito, $x_t := x_0 + t(x_1 - x_0)$ abbiamo $x_t - x'_t = (1-t)(x_0 - x') \subset (1-t)U' \subset U'$; ne segue $x_t + U' \subset x'_t + U' + U' \subset x'_t + tU \subset K$. Dunque $x_t \in \mathring{K}$. □

0.2.8 Proposizione. *Sia K un convesso con parte interna non vuota. Allora*

$$\partial K = \partial \mathring{K} = \partial \bar{K}.$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \partial K$. In quanto segue usiamo la proprietà $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

(a) Vale $x_0 \in \overline{\mathring{K}}$. Per dimostrarlo prendiamo $x \in \mathring{K}$ e notiamo che, in virtù del Lemma (0.2.7), il punto $x_t := x_0 + t(x - x_0)$ appartiene a $\mathring{K}$ per ogni $t \in]0, 1]$. Dato che $t \mapsto x_t$ è continua, se ne deduce che ogni intorno di x_0 contiene x_t per t piccolo, dunque contiene punti di $\mathring{K}$ e dunque $x_0 \in \overline{\mathring{K}}$.

(b) $x_0 \in \partial \mathring{K}$. Segue dalla (a) dato che $x_0 \notin \mathring{K}$.

(c) Si ha $x_0 \notin \mathring{\overline{K}}$. Per dimostrarlo definiamo $\tilde{K} := x_0 - (K - x_0) = 2x_0 - K$ (vedi la figura 0.2). Si verifica facilmente che $\tilde{K}$ è convesso, $\mathring{\tilde{K}} = 2x_0 - \mathring{K} \neq \emptyset$ e $x_0 \in \partial \tilde{K} = 2x_0 - \partial K$. Applicando la parte (a) a $\tilde{K}$ si vede che $x_0 \in \overline{\mathring{\tilde{K}}}$.

Dico che $\bar{K}$ e $\mathring{\tilde{K}}$ sono disgiunti. Se per assurdo $y \in \bar{K} \cap \mathring{\tilde{K}}$ sarebbe $y \in \bar{K}$ e $\tilde{y} := 2x_0 - y \in \mathring{K}$. Ma allora $x_0 = \frac{y}{2} + \frac{\tilde{y}}{2} \in \mathring{K}$ per il Lemma (0.2.7) questo contrasta con $x_0 \in \partial K$.

Per quanto sopra $x_0 \in \overline{\mathring{\tilde{K}}} \subset \overline{\mathbb{X} \setminus \overline{K}} = \mathbb{X} \setminus \mathring{\overline{K}}$ e la (c) è dimostrata.

(d) $x_0 \in \partial \bar{K}$. Segue dalla (c) dato che $x_0 \in \bar{K}$.

Dato che $\partial \mathring{A} \subset \partial A$ e $\partial \overline{A} \subset \partial A$ valgono per un A qualunque (vedi [1]), la tesi è dimostrata. □

0.2.9 Corollario. *Dalla propozione precedente è facile dedurre che, se K è convesso e $\mathring{K} \neq \emptyset$, allora:*

$$\overline{K} = \overline{\mathring{K}}, \qquad \mathring{K} = \mathring{\overline{K}}$$

0.2.10 Osservazione. Se $\mathbb{X}$ ha dimensione finita pari a N e se $x_0 \in K$ possiamo definire

$$k := \max\{i \in \mathbb{N} : \exists v_1, \ldots, v_i \text{ linearmente indipendenti con } x_0 + v_j \in K, j = 1, \ldots, i\}$$

($k \leq N$) e $M := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$ con v_i linearmente indipendenti e $x_0 + v_i \in K$ per $i = 1, \ldots, k$. È facile provare che M e k non dipendono da x_0. Allora $K \subset x_0 + M$ e

[1]

$$\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A;$$

$$A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \Rightarrow \partial \overline{A} = \overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A;$$

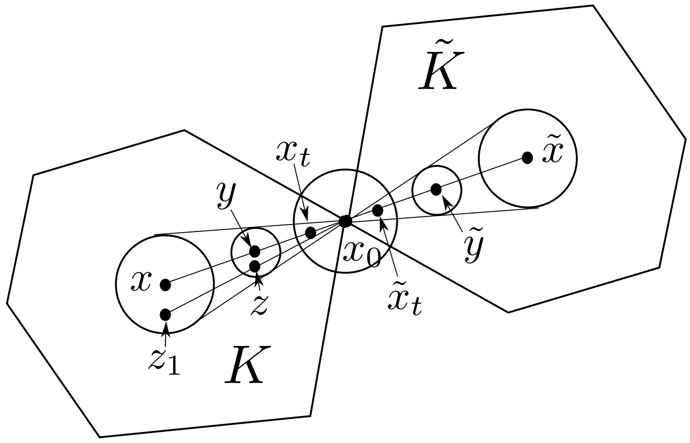


Figura 1: Proprietà della frontiera di un convesso

$\mathring{K} = \emptyset$ se e solo se $k < N$ (come si vede facilmente). In particolare le formule $\partial K = \partial \bar{K}$ e $\mathring{K} = \mathring{\bar{K}}$ rimangono vere ($\partial K = \bar{K}$ e $\mathring{\bar{K}} = \emptyset$).

In dimensione infinita questo diventa falso come si vede prendendo K spazio lineare denso in $\mathbb{X}$ con $\mathring{K} = \emptyset$.

0.2.11 Definizione. Dato $A \subset \mathbb{X}$ definiamo l'*inviluppo convesso chiuso* di A:

$$\overline{\mathrm{co}}(A) := \bigcap_{\substack{K \text{ convesso chiuso} \\ A \subset K}} K.$$

Chiaramente co(A) è il più piccolo insieme convesso chiuso contenente A. Notiamo che, in generale co$(\bar{A})$ può non essere chiuso e quindi non coincidere con $\overline{\mathrm{co}}(A)$. Non è difficile vedere che $\overline{\mathrm{co}}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.

Capitolo 1

Convessità in dimensione finita

1.1 Funzioni convesse di una variabile

In questo e nel prossimo paragrafo consideriamo $X = \mathbb{R}^N$,

1.1.1 Definizione. Sia $K \subset X$ un insieme convesso e sia $f : K \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è *convessa* se per ogni $x_1, x_2 \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$x_1, x_2 \in K,\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{1.1}$$

1.1.2 Proposizione. *1. $f : K \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se per ogni n intero, per ogni n-pla di punti $x_1, \ldots, x_n \in K$ e per ogni n-pla di numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ si ha:*

$$x_i \in K,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

2. $f : K \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se il suo epigrafico

$$\mathrm{epi}(f) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : x \in K, f(x) \leq y\right\}$$

è convesso in $X \times \mathbb{R}$.

1.1.3 Proposizione. *1. Se f, g sono convesse, $\lambda, \mu \geq 0$, allora $\lambda f + \mu g$ è convessa.*

2. Se f, g sono convesse su I intervallo reale, non negative e crescenti, allora fg è convessa.

3. Se f è convessa e se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa crescente, allora: $G \circ f$ è convessa.

Nel resto del paragrafo studiamo le proprietà delle funzioni convesse su $\mathbb{R}$. Innanzitutto è ovvio che vale il seguente risultato.

1.1.4 Proposizione. *$K \subset \mathbb{R}$ è convesso se e solo se K è connesso se e solo se K è un intervallo.*

A questo punto fissiamo un intervallo I e una funzione $f : I \to \mathbb{R}$.

1.1.5 Proposizione. *Sono equivalenti:*

(a) *f è convessa in I;*

(b) *per ogni terna $x_1 < x_2 < x_3$ in I si ha:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}; \tag{1.2}$$

(c) *per ogni $x_0 \in I$ il rapporto incrementale $\Delta_{x_0}(x) := \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è una funzione (debolmente) crescente su $I \setminus \{x_0\}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) $\Leftrightarrow$ (b). Per questo notiamo che:

$$x_2 \text{ compreso tra } x_1 \text{ e } x_3 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} < 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} < 1$$

Dato che $x_2 = \left(\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)x_1 + \left(\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)x_3$, chiamando $t = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, si ha che f è convessa se e solo se:

$$f(x_2) \le \left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f(x_1) + \left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)f(x_3) \quad \text{per ogni } x_2 \text{ compreso tra } x_1 \text{ e } x_3$$

che, con semplici calcoli, equivale a (1.2).

Dimostriamo che (b) $\Leftrightarrow$ (c). Innanzitutto (c) $\Rightarrow$ (b) perché (1.2) si può scrivere come

$$\Delta_{x_2}(x_1) \le \Delta_{x_2}(x_3) \qquad \text{se } x_1 < x_2 < x_3.$$

Per il viceversa notiamo che, se $x_1 \neq x_3$:

$$\Delta_{x_1}(x_3) = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\Delta_{x_1}(x_2) + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\Delta_{x_2}(x_3);$$

dunque $\Delta_{x_3}(x_1)$ è combinazione convessa di $\Delta_{x_1}(x_2)$ e $\Delta_{x_2}(x_3)$. Allora da (1.2) si ricava:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \qquad \text{se } x_1 < x_2 < x_3. \tag{1.3}$$

Scegliendo volta per volta x_0 come uno tra x_1, x_2 e x_3 si dimostra facilmente la (c) □

1.1.6 Corollario. *Se f è convessa, allora per ogni punto x_0 di $\mathring{I}$ esistono finite la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$. Inoltre se $x_1, x_2 \in \mathring{I}$ con $x_1 < x_2$ si ha $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$.*

Come conseguenza f è continua in $\mathring{I}$.

Dimostrazione. Dalla monotonia di $\Delta_{x_0}(x)$ si deduce l'esistenza di $f'_-(x_0) = \sup\limits_{x<x_0} \Delta_{x_0}(x)$ e $f'_+(x_0) = \inf\limits_{x>x_0} \Delta_{x_0}(x)$, come pure la disuguaglianza $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$. Inoltre se $x_1 < x_2$ si ha anche $f'_+(x_1) \le \Delta_{x_1}(x_2) = \Delta_{x_2}(x_1) \le f'_-(x_2)$, da cui si deduce il resto della tesi. □

1.1.7 Osservazione. È chiaro che f può non essere continua agli estremi di I. Però, se per esempio $a = \min I$ (e $I \neq \emptyset$), allora ragionando come sopra:

$$f'_+(a) = \inf_{x>a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < +\infty \Rightarrow \limsup_{x\to a^+}(f(x)-f(a)) = \limsup_{x\to a^+}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$$

(se $f'_+(a)$ è finito il limite viene zero, se $f'_+(a) = -\infty$ l'argomento del lim sup è negativo per x vicino ad a). Dunque f è semicontinua superiormente in a; lo stesso si verifica in b.

È anche facile vedere che se f è convessa in $\mathring{I}$ ed è s.c.s. in I, allora f è convessa in I.

1.1.8 Proposizione. *Sia f derivabile in $\mathring{I}$ e s.c.s. in I. Allora sono equivalenti:*

(a) *f è convessa in I;*

(b) *f' è crescente in $\mathring{I}$;*

(c) *si ha:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x, x_0 \in \mathring{I}.$$

Dimostrazione. Notiamo che se $\mathring{I} = \emptyset$ il risultato è banale e quindi supponiamo $\mathring{I} \neq \emptyset$.

(a) $\Rightarrow$ (b) segue dal Corollario (1.1.6), dato che $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.

Dimostriamo (b) $\Rightarrow$ (a) mostrando che da (b) si deduce la (1.2). Siano $x_1 < x_2 < x_3$: usando il teorema di Lagrange si trovano $x' \in]x_1, x_2[$ con $f'(x') = \Delta_{x_1}(x_2)$ e $x'' \in]x_2, x_3[$ con $f'(x'') = \Delta_{x_2}(x_3)$. Dalla monotonia di f' si ricava allora $\Delta_{x_1}(x_2) \leq \Delta_{x_2}(x_3)$.

Dimostriamo (a) $\Rightarrow$ (c). Supponiamo $x > x_0$: per la monotonia dei rapporti incrementali abbiamo $f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Moltiplicando per $(x - x_0) > 0$ si ha $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, da cui la tesi. Nel caso $x < x_0$ si ragiona nello stesso modo: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$, e moltiplicando per $(x - x_0) < 0$ si riottiene la stessa diseguaglianza.

Dimostriamo (c) $\Rightarrow$ (a). Siano $x_1, x_2 \in \mathring{I}, t \in [0, 1]$. Posto $x_t := tx_1 + (1 - t)x_2$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1) \geq & f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) \\ f(x_2) \geq & f(x_t) + f'(x_t)(x_2 - x_t) \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per t, la seconda per $(1 - t)$ e sommando:

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \geq f(x_t) + f'(x_t)(\underbrace{tx_1 + (1 - t)x_2}_{x_t} - x_t) = f(x_t).$$

Dunque f è convessa in $\mathring{I}$ e per L'Osservazione (1.1.7) f è convessa in I. □

1.1.9 Corollario. *Se f è derivabile due volte in $\mathring{I}$ e s.c.s. in I, allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni x in $\mathring{I}$.*

Dimostrazione. Basta usare la proposizione precedente, dato che $f'' \geq 0$ se e solo se f' è crescente. □

In realtà la Proposizione (1.1.8) può essere generalizzata senza l'ipotesi che f sia derivabile. Nella proposizione che segue supponiamo I aperto per evitare di trattare derivate infinite.

1.1.10 Proposizione. *Supponiamo I aperto e $f : I \to \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:*

(a) *f è convessa in I;*

(b) *per ogni punto $x_0 \in I$ esistono finite la derivata destra $f'_+(x_0)$, e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$, $f'_- \leq f'_+$ ed entrambe sono funzioni debolmente crescenti;*

(b.1) *In ogni punto x_0 di I esiste finita la derivata destra $f'_+(x_0)$ (la derivata sinistra $f'_-(x_0)$) ed è una funzione debolmente crescente.*

(c) *esiste una funzione $m : I \to \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x, x_0 \in I.$$

Inoltre se vale una qualunque delle proprietà sopra, si ha $f'_-(x) \leq m(x) \leq f'_+(x)$, da cui segue che m è debolmente crescente.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) è il Corollario (1.1.6).

(b) $\Rightarrow$ (b.1) è ovvio.

(b.1) $\Rightarrow$ (a) Si ragiona come nel corrrispondente passo della (1.1.8), usando la versione generalizzata di Lagrange (A.1.3) in appendice (per verificarne le ipotesi si noti che la derivata destra ammette limite sinistro essendo crescente).

(a) $\Rightarrow$ (c) Prendiamo $m(x)$ compreso tra $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ e ragioniamo come in (1.1.8).

(c) $\Rightarrow$ (a) La dimostrazione è identica a quella fatta per la (1.1.8), pur di usare $m(x)$ in luogo di $f'(x)$.

È chiaro infine che dalla (c) (espressa in termine di rapporti incrementali) facendo un passaggio al limite per $x \to x_0^-$ $(x \to x_0^+)$ si ottiene $f'_-(x_0) \leq m(x)$ $(f'_+(x_0) \geq m(x))$. □

1.1.11 Corollario. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa e continua allora $f'_- :]a,b] \to]-\infty,+\infty]$ è continua da sinistra e $f'_+ : [a,b[\to]-\infty,+\infty]$ è continua da destra (ammettendo valori infiniti in a e b).*

Dimostrazione. Vediamo il caso di f'_-. Sappiamo che f'_- è crescente dunque per ogni $x_0 \in]a,b]$ f'_- ha limite sinistro e $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'_-(x) \leq f'_-(x_0)$. Viceversa dato $x < x_0$ in $]a,b]$ per il Teorema precedente esiste $\xi_x \in]x,x_0[$ tale che $f'_-(\xi_x) \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'_+(\xi_x)$. Ma allora $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'_-(x')$ per ogni $x' \in]\xi_x, x_0[$, da cui $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim\limits_{x\to x_0^-} f'_-(x)$. Facendo tendere $x \to x_0^-$ la tesi è dimostrata.

□

1.2 Funzioni convesse in dimensione finita

In questo paragrafo generalizziamo i risultati in una variabile alle funzioni su $\mathbb{R}^N$. Fissiamo quindi un insieme K convesso in $\mathbb{R}^N$ e una funzione $f : K \to \mathbb{R}$.

1.2.1 Proposizione. *Supponiamo f convessa in K. Allora per ogni $x_0 \in \mathring{K}$ esiste $\rho > 0$ tale che $\sup\limits_{B(x_0,\rho)} |f| < +\infty$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathring{K}$. Se $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo il cubo $Q(x_0,\delta) := [x_{0,1}-\delta, x_{0,1}+\delta] \times \cdots \times [x_{0,N}-\delta, x_{0,N}+\delta]$ è contenuto in K. Siano $x_1,\ldots,x_{2^N}$ i vertici di $Q(x_0,\delta)$; allora per ogni $x \in Q(x_0,\delta)$ si ha $x = \sum_{i=0}^{2^N} \lambda_i x_i$ per opportuni $\lambda_i \in [0,1]$ tali che $\sum_{i=0}^{2^N} \lambda_i = 1$. Allora $f(x) \leq \sum_{i=0}^{2^N} \lambda_i f(x_i) \leq \max_{i=1,\ldots,2^N} |f(x_i)| =: C$. Dimostriamo che f è inferiormente limitata in $Q(x_0,\delta)$. Se $x \in Q(x_0,\delta)$ prendiamo $x' := x_0 - (x - x_0)$ (il simmetrico di x rispetto a x_0). Si vede facilmente che $x' \in Q(x_0,\delta)$. Per la convessità:

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x') \Rightarrow f(x) \geq 2f(x_0) - f(x') \geq 2f(x_0) - C.$$

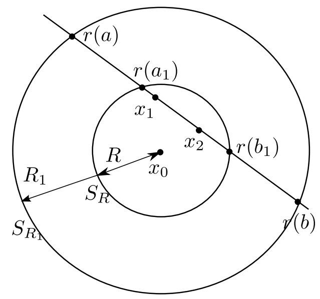
□

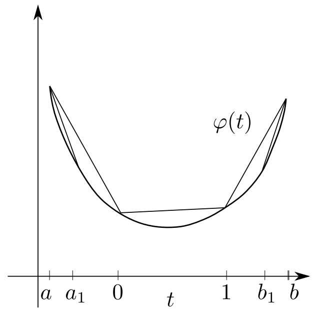
1.2.2 Osservazione. È chiaro che dalla Proposizione precedente si ricava:

$$F \subset \mathring{K},\ F \text{ compatto } \Leftrightarrow \sup_{x\in F} |f(x)| < +\infty.$$

1.2.3 Teorema. *Supponiamo f convessa in K. Allora f è localmente lipschitziana in $\mathring{K}$.*

Dimostrazione. Siano $x_0 \in \overset{\circ}{K}$ e $R > 0$ tale che $\overline{B(x_0, R)} \subset \overset{\circ}{K}$. Sia $R_1 > R$ tale $\overline{B(x_0, R_1)} \subset K$. Dati x_1 e x_2 in $B(x_0, R)$ consideriamo la retta per x_1 e x_2 definita parametricamente da $r(t) = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1)$ e la funzione $\varphi(t) := f(r(t))$. Possiamo considerare φ definita sull'intervallo $[a, b]$ dove $a < 0$ e $b > 1$ sono tali che che $\|r(a) - x_0\| = \|r(b) - x_0\| = R_1$. Possiamo anche introdurre $a_1 \in]a, 0]$ e $b_1 \in [1, b[$ tali che $\|r(a_1) - x_0\| = \|r(b_1) - x_0\| = R$ (vedi figura).





Si ha:

$$R_1 - R \leq \|r(a) - r(a_1)\| = (a_1 - a)\|x_1 - x_2\|$$

e quindi $(a_1 - a)^{-1} \leq \|x_1 - x_2\|/(R_1 - R))$. Analogamente $(b - b_1)^{-1} \leq \|x_1 - x_2\|/(R_1 - R)$.

Per le proprietà delle funzioni convesse in una variabile:

$$\frac{\varphi(a_1) - \varphi(a)}{a_1 - a} \leq \frac{\varphi(0) - \varphi(a)}{0 - a} \leq \frac{\varphi(0) - \varphi(1)}{0 - 1} \leq \frac{\varphi(1) - \varphi(b)}{1 - b} \leq \frac{\varphi(b_1) - \varphi(b)}{b_1 - b}$$

(vedi figura) da cui, indicando con $S_\rho = S(x_0, \rho) := \{x : \|x - x_0\| = \rho\}$:

$$\frac{\inf_{S_{R_1}} f - \sup_{S_R} f}{R_1 - R}\|x_2 - x_1\| \leq f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\sup_{S_{R_1}} f - \inf_{S_R} f}{R_1 - R}\|x_2 - x_1\|.$$

Notiamo che i sup e gli inf scritti sopra sono finiti a causa della precedente Proposizione (1.2.1), dato che S_{R_1} è compatto. Ne segue che f è lipschitziana in $B(x_0, R)$ $\square$

1.2.4 Osservazione. Nei prossimi enunciati supponiamo K aperto. In generale è utile osservare che, se K è un convesso e se $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, allora

$$f \text{ convessa su } K \;\Leftrightarrow f \text{ convessa su } \overset{\circ}{K}.$$

1.2.5 Proposizione. *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ convesso e aperto, $f : K \to \mathbb{R}$ differenziabile in K. Sono equivalenti*

(a) *f è convessa in K;*

(b) *$x \mapsto \nabla f(x)$ è monotono in K, cioè:*

$$\langle \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_2 \rangle \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{K};$$

(c) *si ha:*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \qquad \forall x, x_0 \in K.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) $\Rightarrow$ (c). Siano $x_0, x \in K$. Definiamo $\gamma(t) := tx + (1-t)x_0$ e $\varphi(t) := f(\gamma(t))$ per $t \in]a, b[$ dove $a < 0 < 1 < b$. Se f è convessa, allora φ è convessa in $]a, b[$. Per le proprietà in una variabile deve essere

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) \qquad \forall t, t_0 \in]a, b[. \tag{1.4}$$

Peraltro $\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), x - x_0\rangle$ e quindi, scrivendo la disuguaglianza sopra in $t = 1, t_0 = 0$ si ottiene la (c). Questa stessa dimostrazione può essere usata nell'altra direzione per provare che (c) $\Rightarrow$ (a): fissati x_1 e x_2 e definita $\varphi(t) := f(tx_2 + (1-t)x_1)$, usando la (c) si deduce che vale (1.4). Allora φ è convessa per la Proposizione (1.1.8), in particolare, scrivendo $t = t\,1 + (1-t)\,0$ si ha $\varphi(t) \le t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0)$, cioè $f(tx_2 + (1-t)x_1) \le tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$. Per l'arbitrarietà di x_1, x_2, f è convessa.

Dimostriamo che (c) $\Rightarrow$ (b). Dati $x_1, x_2 \in K$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(x_2) &\ge f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1\rangle \\ f(x_1) &\ge f(x_2) + \langle \nabla f(x_2), x_1 - x_2\rangle . \end{aligned}$$

Moltiplicando per t e per $(1-t)$, e sommando, si ottiene la (b).

Dimostriamo che (b) $\Rightarrow$ (a). Anche in questo caso prendiamo x_1 e x_2 in K e definiamo $\gamma(t) := tx_2 + (1-t)x_1$ e $\varphi(t) := f(\gamma(t))$. Dato che $\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t), x_2 - x_1\rangle$, si ha:

$$0 \le \langle \nabla f(\gamma(t_2) - \nabla f(\gamma(t_1), \gamma(t_2) - \gamma(t_1)\rangle = (\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1))(t_2 - t_1).$$

e usando la (b) si ricava che φ' è crescente. Dunque φ è convessa e per l'arbitarietà di x_1, x_2 f è convessa. □

1.2.6 Proposizione. *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ convesso e aperto, $f : K \to \mathbb{R}$ differenziabile due volte in K. Allora f è convessa se e solo se $\nabla^2 f \ge 0$ in K.*

Dimostrazione. Se f è convessa allora vale la (b) della Proposizione (1.1.8). Siano $x_0 \in K$, $v \in \mathbb{R}^N$ e $|h|$ è piccolo (in modo che $x_0 + hv \in K$):

$$0 \le \langle \nabla f(x_0 + hv) - \nabla f(x_0), hv\rangle = \left\langle \nabla^2 f(x_0)\cdot hv + o(h), hv\right\rangle .$$

Facendo tendere $h \to 0$ si ottiene $\langle \nabla^2 f(x_0)\cdot v, v\rangle \ge 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ (che è la definizione di $\nabla^2 f(x_0) \ge 0$).

Viceversa, se $\nabla^2 f(x_0) \ge 0$, presi x_1, x_2 in K, definite γ e φ come nella dimostrazione precedente, si trova $\varphi''(t) = \langle \nabla^2 f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = \langle \nabla^2 f(\gamma(t))\cdot (x_2 - x_1), x_2 - x_1\rangle \ge 0$. Dunque φ è convessa, da cui la tesi, per l'arbitarietà di x_1, x_2. □

1.2.7 Controesempio. Non è vero, a differenza del caso unidimensionale, che f è semicontinua superiormente sul suo dominio. Prendiamo per esempio la seguente funzione:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} & \text{se } y \ge x^2 > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

definita su $K := \{(x,y) : y \ge x^2\}$.

1.3 Coni normali e sottodifferenziali in dimensione finita

1.3.1 Definizione (cono normale)**.** Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ convesso e sia $x \in K$. Poniamo:

$$N_K(x) : \left\{\nu \in \mathbb{R}^N : \langle \nu, y - x\rangle \le 0 \quad \forall y \in K\right\}. \tag{1.5}$$

$N_K(x)$ si dice il *cono normale* a K in x. È chiaro che $N_K(x)$ è convesso, chiuso, $0 \in N_K(x)$ e che se $\nu \in N_K(x)$ e $t \ge 0$, allora $t\nu \in N_K(x)$ (quest'ultima dice che $N_K(x)$ è un cono).

1.3.2 Osservazione. Se $x \in \mathring{K}$, allora $N_K(x) = \{0\}$.

Dimostrazione. Sia $\nu \in N_K(x)$ e sia $\rho > 0$ tale che $B(x,\rho) \subset K$. Prendendo $y = x + z$ con $z \in B(0,\rho)$ in (1.5) si ha

$$\langle \nu, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in B(0,\rho).$$

Se $z \in \mathbb{R}^N$ posso moltiplicarlo per $t > 0$ piccolo in modo che $tz \in B(0,\rho)$: usando tz nella diseguaglianza sopra e semplificando poi t, trovo:

$$\langle \nu, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N$$

Prendendo $-z$ al posto di z trovo anche la diseguaglianza opposta per cui:

$$\langle \nu, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N$$

che equivale a $\nu = 0$. □

1.3.3 Teorema. *Sia K un convesso in $\mathbb{R}^N$. Allora per ogni x in ∂K si ha $N_K(x) \neq \{0\}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathbb{R}^N$ perché in questi casi $\partial K = \emptyset$ e non c'è nulla da dimostrare. Se $\mathring{K} = \emptyset$ allora $K \subset x_0 + M$ con $x_0 \in K$ e M spazio lineare di dimensione minore di N (vedi l'osservazione (0.2.10)). Se $\nu \neq 0$ è ortogonale a M è facile vedere che $\nu \in N_K(x)$ per ogni x in K. Supponiamo allora che $\mathring{K} \neq \emptyset$. Per la Proposizione (0.2.8) si ha $x \in \partial \bar{K}$. Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{K}$ tale che $x_n \to x$. Dato che $\bar{K}$ è chiuso esiste $y_n \in \bar{K}$, y_n punto di minima distanza tra $\bar{K}$ e x_n. Dato che, in particolare, $\|x - x_n\| \geq \|y_n - x_n\|$, si ha $y_n \to x$. Inoltre per ogni $y \in \bar{K}$:

$$\|y_n - x_n\|^2 \leq \|y - x_n\|^2 = \|y - y_n\|^2 + 2\langle y - y_n, y_n - x_n \rangle + \|y_n - x_n\|^2$$

da cui:

$$\langle y - y_n, x_n - y_n \rangle \leq \frac{1}{2}\|y - y_n\|^2 \qquad \forall y \in \bar{K}. \tag{1.6}$$

Prendendo $t \in]0,1]$ e $y_n + t(y - y_n)$ $(= ty + (1-t)y_n \in \bar{K})$ al posto di y si ha:

$$t\langle y - y_n, x_n - y_n \rangle \leq \frac{t^2}{2}\|y - y_n\|^2 \qquad \forall y \in \bar{K}.$$

da cui, semplificando t e facendo tendere $t \to 0^+$

$$\langle y - y_n, x_n - y_n \rangle \leq 0 \qquad \forall y \in \bar{K}. \tag{1.7}$$

Se poniamo $\nu_n := \dfrac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ abbiamo allora $\|\nu_n\| = 1$, per cui, a meno di sottosuccessioni, $\nu_n \to \nu$ e passando al limite in (1.7):

$$\langle y - y_n, \nu_n \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle y - x, \nu \rangle \leq 0 \qquad \forall y \in \bar{K}.$$

Dunque $\nu \in N_{\bar{K}}(u)$ e $\nu \neq 0$ dato che $\|\nu\| = 1$. In particolare $\nu \in N_K(u) \setminus \{0\}$. □

1.3.4 Definizione (sottodifferenziale)**.** Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ convesso e $f : K \to \mathbb{R}$. Dati $x_0 \in K$ e $w \in \mathbb{R}^N$ dico che w è *un sottodifferenziale per f in x_0* se

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle w, x - x_0 \rangle \qquad \forall x \in K.$$

L'insieme (eventualmente vuoto) di tutti i w con la proprietà sopra si indica con $\partial f(x_0)$ e si chiama (con un leggero abuso di linguaggio) *il sottodifferenziale di f in x_0*.

Si verifica facilmente che $\partial f(x_0)$ è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\mathbb{R}^N$.

1.3.5 Osservazione. Se K è convesso e $f : K \to \mathbb{R}$ è sottodifferenziabile in ogni punto di K, allora f è convessa. Infatti presi $x_1, x_2 \in K$, preso $t \in [0,1]$ e posto $x_t := tx_2 + (1-t)x_1$ possiamo prendere $\alpha \in \partial f(x_t)$ e scrivere:

$$f(x_i) \geq f(x_t) + \langle \alpha, x_i - x_t \rangle \qquad i = 1, 2.$$

Moltiplicando per t (dove $i = 2$) e per $(1-t)$ (dove $i = 1$) e sommando si ha la tesi (stesso argomento di (c) $\Rightarrow$ (a) in (1.1.8)).

1.3.6 Lemma. *Siano K convesso, $f : K \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in K$ tali che $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. Sia $v \in \mathbb{R}^N$ e supponiamo che $x_0 + tv \in K$ per $|t| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Poniamo $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$, definita per $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Se esistono $\varphi'_-(0)$ e $\varphi'_+(0)$ si ha:*

$$\varphi'_-(0) \leq \langle \alpha, v \rangle \leq \varphi'_+(0) \qquad \forall \alpha \in \partial f(x_0).$$

Dimostrazione. Se $v = 0$ viene tutto 0. Supponiamo allora $v \neq 0$ e sia $\alpha \in \partial f(x_0)$. Se $0 < t < \varepsilon$ si ha:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + \langle \alpha, tv \rangle \Rightarrow \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq \langle \alpha, v \rangle\,,$$

da cui, facendo tendere $t \to 0^+$ si ottiene $\varphi'_+(0) \geq \langle \alpha, v \rangle$. Analogamente

$$f(x_0 - tv) \geq f(x_0) + \langle \alpha, -tv \rangle \Rightarrow \frac{\varphi(-t) - \varphi(0)}{-t} \leq \langle \alpha, v \rangle$$

implica $\varphi'_-(0) \leq \langle \alpha, v \rangle$. □

1.3.7 Osservazione. Se $f : K \to \mathbb{R}$ è convessa ed è differenziabile in $x_0 \in \mathring{K}$, allora $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Infatti $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ per la (c) di (1.2.5). Viceversa supponiamo $\alpha \in \partial f(x_0)$. Per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ la funzione $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è definita in un intorno di zero ed è convessa. Inoltre esiste $\varphi'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$. Per il lemma (1.3.6) si ricava:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \langle \alpha, v \rangle \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

essendo v arbitrario si ricava $\alpha = \nabla f(x_0)$.

Il seguente teorema dimostra il "viceversa" dell' Osservazione (1.3.5).

1.3.8 Teorema. *Sia K un insieme convesso $\mathbb{R}^N$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora per ogni punto x_0 di $\mathring{K}$ si ha $\partial f(u) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{K}$ l' epigrafico di f: $\mathcal{K} = \big\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{N+1} : \xi \geq f(x)\big\}$. Come già osservato $\mathcal{K}$ è un convesso di $\mathbb{R}^{N+1}$. Per il Teorema (1.3.3) per ogni punto $(x_0, \xi_0) \in \partial\mathcal{K}$ esiste un vettore non nullo $(w_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$\langle (w_0, \omega_0), (x - x_0, \xi - \xi_0) \rangle_{N+1} \leq 0 \qquad \forall (x, \xi) \in \mathcal{K},$$

cioè:

$$\langle w_0, x - x_0 \rangle + \omega_0(\xi - \xi_0) \leq 0 \qquad \forall x \in K,\ \forall \xi \geq f(x). \tag{1.8}$$

Se $\xi_0 = f(x_0)$ sicuramente $(x_0, \xi_0) \in \partial\mathcal{K}$, dato che $(x_0, \xi) \notin \mathcal{K}$ per $\xi < f(x_0)$ e quindi vale (1.8). Se prendiamo $x = x_0$ e $\xi > \xi_0 = f(x_0)$ in (1.8), otteniamo $\omega_0 \leq 0$. Dimostriamo che non può essere $\omega_0 = 0$. Se così fosse avremmo

$$\langle w_0, x - x_0 \rangle \leq 0 \qquad \forall x \in K. \tag{1.9}$$

cioè $w_0 \in N_K(x_0)$ Dato che $x \in \overset{\circ}{K}$ si ha $w_0 = 0$, per l'Osservazione (1.3.2). Questo è assurdo perché $(w_0, \omega_0) \neq (0,0)$. Dunque $\omega_0 < 0$ e mettendo $\xi = f(x), \xi_0 = f(x_0)$ la (1.8) si può riscrivere:

$$\left\langle \frac{w_0}{-\omega_0}, x - x_0 \right\rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

cioè $-\dfrac{w_0}{\omega_0} \in \partial f(x_0)$. □

1.3.9 Proposizione. *Sia $f : K \to \mathbb{R}$ convessa. Allora $\partial f : \overset{\circ}{K} \to 2^{\mathbb{R}^N}$ è un operatore (multivoco) monotono, cioè:*

$$\forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{K},\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^N \text{ tali che } \alpha_i \in \partial f(x_i)\ i = 1,2 \text{ si ha } \langle \alpha_1 - \alpha_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{K}$ e siano $\alpha_i \in \partial f(x_i)$, per $i = 1, 2$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x_2) \geq & f(x_1) + \langle \alpha_1, x_2 - x_1 \rangle, \\ f(x_1) \geq & f(x_2) + \langle \alpha_2, x_1 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Sommando le due si ha la tesi. □

Capitolo 2

Spazi localmente convessi

2.1 Spazi Vettoriali Topologici

2.1.1 Definizione. Chiameremo *spazio vettoriale topologico* (abbreviato S.V.T.) una coppia $(\mathbb{X}, \tau)$ in cui $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e τ è una topologia su $\mathbb{X}$ che rende continue le operazioni

$$s : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X} \text{ def. da: } s(x, y) := x + y, \qquad p : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X} \text{ def. da: } p(\lambda, x) := \lambda x.$$

Conveniamo di indicare $\mathscr{I}(x_0) = \mathscr{I}_\tau(x_0)$ la famiglia degli intorni di un generico x_0.

2.1.2 Osservazione. È chiaro che τ è invariante per translazioni: $A \in \tau, x_0 \in \mathbb{X} \Rightarrow x_0 + A \in \tau$. In particolare, dato $x_0 \in \mathbb{X}$, si ha $U \in \mathscr{I}_\tau(x_0)$ se e solo se $U = x_0 + U_0$ con $U_0 \in \mathscr{I}(0)$.

Supponiamo in questo paragrafo che $(\mathbb{X}, \tau)$ sia uno S.V.T. .

2.1.3 Osservazione. Dato $V \in \mathscr{I}(0)$ esiste $U \in \mathscr{I}(0)$ tale che $U + U \in V$. Per vederlo basta applicare la continuità in $(0, 0)$ della funzione $(x, y) \mapsto x + y$.

2.1.4 Osservazione. Si ricava facilmente dalla continuità di $x \mapsto -x$ che $U \in \mathscr{I}(0) \Leftrightarrow -U \in \mathscr{I}(0)$.

2.1.5 Proposizione. *Sono vere le seguenti proprietà.*

1. *Se $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $x \mapsto x_0 + \lambda x$ è un omeomorfismo da x in x.*

2. *Se $A, B \subset \mathbb{X}$ e A è aperto, allora $A + B$ è aperto.*

3. *Se $A, B \subset \mathbb{X}$, A è chiuso e B è compatto, allora $A + B$ è chiuso.*

4. *Se $A \subset \mathbb{X}$, allora $\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathscr{I}(0)} (A + U)$.*

Dimostrazione. (1) è semplice. Per (2) supponiamo $x = a + b \in (A + B)$. Dato che A è aperto esiste $U \in \mathscr{I}(0)$ tale che $a + U \subset A$. Allora $x + U = a + b + U \subset b + A \subset A + B$.

Vediamo (3). Supponiamo che $x \notin (A + B)$. Allora per ogni $b \in B$ si ha $x - b \notin A$ ed essendo A chiuso deve esistere $U_b \in \mathscr{I}(0)$ tale che $(x - b + U_b) \cap A = \emptyset$. Scegliamo U'_b in $\mathscr{I}(0)$ tale che $U'_b + U'_b \subset U_b$. Per la compattezza di B esistono $b_1, \ldots, b_k$ tali che $b_i - U'_{b_i}$ ricoprono B. Prendiamo $U' := \bigcap_{i=1}^{k} U'_{b_i} \in \mathscr{I}(0)$. Dico che $(x + U') \cap (A + B) = \emptyset$: se questo è vero abbiamo provato che x è esterno ad $(A + B)$ e (3) è dimostrata. Se per assurdo fosse $(x + U') \cap (A + B) \neq \emptyset$ esisterebbero $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a + b \in x + U'$ cioè $a \in x - b + U'$. Ma d'altra parte $b \in b_i - U'_{b_i}$ per un opportuno i da cui $x - b + U' \subset$

$x - b_i + U'_{b_i} + U' \subset x - b_i + U'_{b_i} + U'_{b_i} \subset x - b_i + U_{b_i}$ e quest'ultimo insieme è disgiunto da A. Ne segue una contraddizione e dunque la dimostrazione di (3).

Dimostro (4). Sia $x \in \bigcap_{U \in \mathscr{I}(0)} (A + U)$. Allora dato $U \in \mathscr{I}(0)$, anche $-U \in \mathscr{I}(0)$, quindi esiste $a \in A$ tale che $x \in a - U$. Questo equivale a dire $a \in x + U$: dunque $\forall U \in \mathscr{I}(0)\ \exists a \in A : a \in x + U$. Dunque $x \in \bar{A}$. Viceversa se $x \in \bar{A}$ e $U \in \mathscr{I}(0)$ esiste $a \in (x - U) \cap A$, cioè $a \in A$ e $x \in a + U$. Dunque $x \in A + U$. Dato che questo è vero per ogni U in $\mathscr{I}(0)$ si ha $x \in \bigcap_{U \in \mathscr{I}(0)} (A + U)$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

2.1.6 Osservazione. Siano $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dalla (1) della proposizione precedente si ha che per ogni $A \subset \mathbb{X}$:

$$\overline{x_0 + \lambda A} = x_0 + \lambda \bar{A}, \qquad \partial(x_0 + \lambda A) = x_0 + \lambda \partial A, \qquad \overset{\circ}{\widehat{x_0 + \lambda A}} = x_0 + \lambda \mathring{A}.$$

Ricordiamo una definzione che useremo più volte nel seguito.

2.1.7 Osservazione. Sia $(\mathbb{X}, \tau)$ uno S.V.T. e sia $\mathscr{B} \subset 2^{\mathbb{X}}$ (una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$). Si dice che $\mathscr{B}$ è una *base di intorni di zero* se $0 \in B$ per ogni $B \in \mathscr{B}$ si ha $0 \in B$ e se per ogni $U \in \mathscr{I}(0)$ esiste $B \in \mathscr{B}$ con $B \subset U$.

Più in generale, se $\mathbb{X}$ e uno spazio vettoriale e $\mathscr{B} \subset 2^{\mathbb{X}}$, diremo che $\mathscr{B}$ è una *base di intorni di zero* se

1. $0 \in B$ per ogni $B \in \mathscr{B}$;

2. se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, esiste $B \in \mathscr{B}$ tale che $B \subset B_1 \cap B_2$.

È facile vedere che, se $\mathscr{B}$ ha le proprietà sopra, allora posso definire

$$\mathscr{I}(0) := \{U \subset \mathbb{X} : \exists B \in \mathscr{B}, \text{ with } B \subset U\} \quad , \quad \tau := \{x + U : x \in \mathbb{X}, U \in \mathscr{I}(0)\}$$

e in questo modo $\tau = \tau(\mathscr{B})$ è una topologia tale che $(\mathbb{X}, \tau)$ è uno S.V.T., e $\mathscr{B}$ è una base di intorni di zero nel primo senso detto sopra.

2.1.8 Definizione. Le seguenti definizioni, eccetto l'ultima, riguardano solo la struttura vettoriale di $\mathbb{X}$ e prescindono dunque da τ. Siano $A, B \subset \mathbb{X}$. Diciamo che:

- A è *bilanciato* (o *cerchiato*) se $\lambda A \subset A$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| < 1$;

- A *assorbe* B se esiste $\alpha_0 > 0$ in $\mathbb{R}$ tale che $B \subset \alpha A$ per ogni α in $\mathbb{R}$ con $|\alpha| \geq \alpha_0$;

- A è *assorbente* (o *radiale*) se A assorbe $\{x\}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$: $\forall x \in \mathbb{X}$ esiste $\alpha_x > 0$ tale che $x \in \alpha A$ per ogni α in $\mathbb{R}$ con $|\alpha| \geq \alpha_x$; questo implica $0 \in A$ (perché A assorbe 0) e allora A è assorbente se e solo se $\forall x \in \mathbb{X}\ \exists \varepsilon_x > 0$ tale che $\varepsilon x \in A$ per ogni ε in $[-\varepsilon_x, \varepsilon_x]$;

- A *assorbe positivamente* B se esiste $\alpha_0 > 0$ tale che $B \subset \alpha A$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$;

- A è *positivamente assorbente* se A assorbe positivamente $\{x\}$ per ogni $x \in \mathbb{X}$; questo equivale a dire che $\forall x \in \mathbb{X}\ \exists \varepsilon_x > 0$ tale che $\varepsilon x \in A$ per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_x]$;

- A è *simmetrico* se $-A = A$;

- A è *limitato* se ogni $U \in \mathscr{I}(0)$ assorbe A.

2.1.9 Proposizione. *Ogni intorno di zero è assorbente (se $x \in \mathbb{X}$ allora $\{x\}$ è limitato).*

Dimostrazione. Sia $V \in \mathscr{I}(0)$. Dato $x \in \mathbb{X}$, per la continuità di $\lambda \mapsto \lambda x$, in $\lambda = 0$, si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\lambda x \in V$ per ogni λ in $\mathbb{R}$ con $|\lambda| < \varepsilon$. Dunque V assorbe x. □

2.1.10 Proposizione. *Se $V \in \mathscr{I}(0)$ esiste $U \in \mathscr{I}(0)$ tale che $U \subset V$ e U è bilanciato.*

Dimostrazione. Sia $V \in \mathscr{I}(0)$. Per la continuità di $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, in $(0,0)$, troviamo $\varepsilon > 0$ e $U' \in \mathscr{I}(0)$ tali che $\lambda U' \subset V$ per ogni λ in $\mathbb{R}$ con $|\lambda| < \varepsilon$. Posto $U := \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda U'$ si ha che $U \in \mathscr{I}(0)$, $U \subset V$ e U è bilanciato (per costruzione). □

2.1.11 Proposizione. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale e τ una topologia su $\mathbb{X}$. Allora $(\mathbb{X}, \tau)$ è uno S.V.T. se e solo se τ è invariante per translazioni ed esiste una base $\mathscr{I}_0$ di intorni dello zero tale che:*

1. *se $V \in \mathscr{I}_0$, allora esiste $U \in \mathscr{I}_0$ con $U + U \subset V$;*
2. *se $U \in \mathscr{I}_0$, allora U è bilanciato;*
3. *se $U \in \mathscr{I}_0$, allora U è assorbente.*

Dimostrazione. È chiaro che le proprietà scritte sopra sono necessarie affinché $(\mathbb{X}, \tau)$ sia uno S.V.T., come si evince da quanto detto sopra. Viceversa sia $\mathscr{I}_0$ una famiglia di insiemi contenenti lo zero e verificante (1),(2) e (3). Se τ è la topologia generata da $\{x + U : x \in \mathbb{X}, U \in \mathscr{I}_0\}$, è chiaro che τ è invariante per translazioni e che $\mathscr{I}_0$ è una base di $\mathscr{I}_\tau(0)$. Rimane da dimostrare la continuità delle operazioni rispetto a τ. La continuità della somma in $(0,0)$ segue immediatamente da (1); per translazione si passa da $(0,0)$ a un qualunque $(x_0, y_0) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Riguardo al prodotto fissiamo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$ e sia $V \in \mathscr{I}_0$. Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^n > \lambda_0 + 1$. Usando la (1) prendiamo $U_1 \in \mathscr{I}_0$ con $U_1 + U_1 \subset V$. Dato che U_1 è assorbente (per (3)) troviamo $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\varepsilon x_0 \in U_1$ per ogni $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Possiamo ovviamente supporre che $\varepsilon_0 < 1$. Sempre per la (1) (iterata n volte) possiamo prendere $U \in \mathscr{I}_0$ tale che

$$\underbrace{U + U + \cdots U}_{2^n \text{ addendi}} \subset U_1.$$

Siano $x \in x_0 + U$ e $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$. Allora $\lambda x = \underbrace{\lambda(x - x_0)}_{=(*)} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0)x_0}_{=(**)} + \lambda_0 x_0$. Si ha:

$$\left|\frac{\lambda}{2^n}\right| \leq \frac{|\lambda_0| + \varepsilon_0}{2^n} \leq \frac{|\lambda_0| + 1}{2^n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2^N}(x - x_0) \in U$$

poiché $x - x_0 \in U$ e U è bilanciato (per (2)). Ne segue:

$$(*) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\lambda}{2^N} x_0 \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} U \subset U_1.$$

Inoltre da $\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ si ha $(**) \in U_1$. Dunque $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U_1 + U_1 \subset \lambda_0 x_0 + V$. □

2.1.12 Osservazione. Se U e V sono come in nella (1) sopra, allora $\bar{U} \subset V$. Infatti se $x \in \bar{U}$ allora esiste $x' \in U$ con $x' \in x - U$. Ma allora $x \in x' + U \subset U + U \subset V$.

2.2 Il funzionale di Minkowski

In questo paragrafo $\mathbb{X}$ è semplicemente uno spazio vettoriale.

2.2.1 Definizione. Sia $E \subset X$. Introduciamo $p_E : X \to [0, +\infty]$, detto *funzionale di Minkowski relativo a* E, ponendo

$$p_E(x) := \inf\{\lambda > 0 \colon \forall \rho \geq \lambda \quad x \in \rho E\} = \inf\left\{\lambda > 0 \colon \forall \rho \geq \lambda \quad \frac{x}{\rho} \in E\right\}.$$

Notiamo che $p_E(x) = +\infty$ quando l'insieme di cui si vuole prendere l'inf è vuoto,

2.2.2 Proposizione. *Valgono i fatti seguenti.*

(a) $p_E(x) < +\infty$ *per ogni* x *se e solo se* E *è positivamente assorbente.*

(b) $p_E(x) = 0$ *se e solo se* $tx \in E$ *per ogni* $t > 0$. *In particolare* $p_E(0) = 0$ *se* $0 \in E$ *mentre* $p_E(0) = +\infty$ *se* $0 \notin E$. *Dunque* $P_E(0) < +\infty$ *se e solo se* $0 \in E$.

(c) *Se* E *è simmetrico, allora* $p_E(-x) = p_E(x)$.

(d) $p_E(tx) = tp_E(x)$ *per ogni* x *in* $\mathbb{X}$ *e ogni* $t > 0$.

(e) *Se* E *è convesso, allora* $p_E(x + y) \leq p_E(x) + p_E(y)$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Nel seguito, se $x \in \mathbb{X}$, poniamo:

$$I_{E,x} := \{\lambda > 0 \colon \forall \rho \geq \lambda \quad x \in \rho E\}.$$

È facile vedere che $I_{E,x} \subset]0, +\infty[$ è un intervallo, che $\sup I_{E,x} = +\infty$ e che $p_E(x)$ è l'estremo sinistro di $I_{E,x}$ ($p_E(x) = +\infty$ se $I_{E,x} = \emptyset$).

Dimostriamo (a). Il fatto che $p_E(x) < +\infty$ equivale a dire che $I_{E,x} \neq \emptyset$ e cioè che esiste $\lambda > 0$ tale che $x \in \rho E$ per ogni $\rho \geq \lambda$: in altre parole E assorbe positivamente x. Se questo avviene per ogni x, allora E è positivamente assorbente.

Dimostriamo (b). Dire che $p_E(x) = 0$ equivale a dire che $I_{E,x} =]0, +\infty[$ e questo equivale a $tx \in E$ per ogni $t > 0$.

Dimostriamo (c). Si verifica facilmente che $I_{-E,-x} = I_{E,x}$. Se E è simmetrico $I_{E,-x} = I_{E,x}$ da cui la tesi.

La (d) si dimostra notando che, se $x \in \mathbb{X}$ e $t > 0$:

$$I_{E,tx} = \left\{\lambda > 0 \colon \forall \rho \geq \lambda \quad \frac{tx}{\rho} \in E\right\} = \left\{t\lambda' \colon \lambda' > 0, \forall \rho' \geq \lambda' \quad \frac{x}{\rho'} \in E\right\} = tI_{E,x}.$$

Dimostriamo (e). Supponiamo che E sia convesso. Se $p_E(x) = +\infty$ oppure $p_E(y) = +\infty$ la tesi è ovvia, dunque possiamo supporre $p_E(x) < +\infty$ e $p_E(y) < +\infty$. Sia $\lambda > p_E(x) + p_E(y)$ e sia $\rho \geq \lambda$. Dato che $]p_E(x), +\infty[\subset I_{E,x}$ e $]p_E(y), +\infty[\subset I_{E,x}$, allora esistono $\rho_x \in I_{E,x}$ e $\rho_y \in I_{E,y}$ con $\rho_x + \rho_y = \rho$. Inoltre

$$\frac{x + y}{\rho} = \frac{\rho_x}{\rho}\frac{x}{\rho_x} + \frac{\rho_y}{\rho}\frac{y}{\rho_y} \in E$$

dato che $\dfrac{x}{\rho_x} \in E$, $\dfrac{y}{\rho_y} \in E$, $t := \dfrac{\rho_x}{\rho} \in [0, 1]$ e $1 - t = \dfrac{\rho_y}{\rho}$ e che E è convesso. Dunque $\lambda \in I_{E,x+y}$ per ogni $\lambda > p_E(x) + p_E(y)$. Ne segue che $p_E(x+y) = \inf I_{E,x+y} \leq p_E(x) + p_E(y)$. $\square$

2.2.3 Osservazione. Se $E \subset \mathbb{X}$ si ha $\{x \in \mathbb{X} : p_E(x) < 1\} \subset E$. Infatti se $p_E(x) < 1$ allora $1 \in I_{E,x}$ e quindi $x \in E$. Se E è convesso e contiene lo zero, allora vale anche $E \subset \{x \in \mathbb{X} : p_E(x) \leq 1\}$. Infatti se $x \in E$ allora $x/\rho \in E$ per ogni $\rho \geq 1$, da cui $1 \in I_{E,x}$; questo implica $P_E(x) \leq 1$.

2.2.4 Definizione. Ricordiamo che una funzione $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ viene detta *seminorma* se $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ e

- $p(tx) = |t|p(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{X}$.

2.2.5 Proposizione. *1. Se K è un sottoinsieme convesso simmetrico assorbente di $\mathbb{X}$ (in particolare $0 \in K$), allora p_K è una seminorma.*

2. Se $p : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ è una seminorma, allora $K := \{x \in \mathbb{X} : p(x) < 1\}$ è convesso simmetrico e assorbente. Inoltre $p = p_K$.

Dimostrazione. La (1) è conseguenza delle proprietà di p_E in (2.2.2). Per la (2) consideriamo $K := \{p < 1\}$. Se $x_1, x_2 \in K$, $t \in [0, 1]$ e $x_t = tx_2 + (1 - t)x_1$, allora $p(x_t) \leq p(tx_2) + p((1 - t)x_1) = tp(x_2) + (1 - t)p(x_1) < t + (1 - t) = 1$. Dunque K è convesso. Dato che $p(-x) = p(x)$ K è simmetrico. Vediamo che K è assorbente. Se $x \in \mathbb{X}$ possiamo scegliere $\bar{\varepsilon} > 0$ in modo che $\bar{\varepsilon}p(x) < 1$ (se $p(x) = 0$ ogni $\bar{\varepsilon} > 0$ va bene). Allora se $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ si ha $p(\varepsilon x) = |\varepsilon|p(x) < 1$, cioè $\varepsilon x \in K$. Infine, se $x \in \mathbb{X}$ si ha:

$$\lambda \in I_{K,x} \Leftrightarrow \lambda > 0, \forall \rho \geq \lambda \; x \in \rho K \Leftrightarrow \lambda > 0, \forall \rho \geq \lambda \; p(x) < \rho \Leftrightarrow \lambda > 0, p(x) < \lambda.$$

Dunque $I_{K,x} =]p(x), +\infty[$, da cui $p_K(x) = p(x)$.

□

2.3 Spazi localmente convessi e seminorme

2.3.1 Definizione. Diremo che $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale localmente convesso se $\mathbb{X}$ è uno S.V.T. che ammette una base di intorni $\mathscr{I}_0$ di zero tale che U è convesso per ogni $U \in \mathscr{I}_0$.

2.3.2 Osservazione. È chiaro che se sostituiamo ogni $U \in \mathscr{I}_0$ con $\mathring{U}$ abbiamo ancora una base di intorni di zero. D'ora in poi supponiamo allora che gli $U \in \mathscr{I}_0$ siano tutti aperti.

È altresì chiaro che, se $U \in \mathscr{I}_0$, allora $U' := U \cap (-U)$ è ancora (aperto e) convesso e $U' \subset U$. Dunque gli U' sono ancora una base di intorni per zero.

Nel seguito del paragrafo supponiamo $\mathbb{X}$ localmente convesso e $\mathscr{I}_0$ base di intorni di zero convessi, aperti e simmetrici e scriveremo $(\mathbb{X}, \mathscr{I}_0)$ S.V.T.L.C. .

2.3.3 Osservazione. Se $U \in \mathscr{I}_0$, allora U è bilanciato.

Dimostrazione. Sia $U \in \mathscr{I}_0$. Sia $x \in U$ e sia $\varepsilon \in]-1, 1[$. Se $\varepsilon \geq 0$ si ha $\varepsilon x = (1-\varepsilon)0+\varepsilon x \in U$ per la convessità; se $\varepsilon < 0$ si fa lo stesso con $-x$ (U è simmetrico). Dunque $\varepsilon U \subset U$. □

2.3.4 Definizione. Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{I}_0)$ S.V.T.L.C. . Per ogni $U \in \mathscr{I}_0$ Consideriamo il corrispondente funzionale di Minkowski p_U (cfr. (2.2.1)). Per la proposizione (2.2.5) $p_U : \mathbb{X} \to [0, +\infty[$ è una seminorma. Inoltre $U = \{x \in \mathbb{X} : p_U(x) < 1\}$, infatti se $x \in U$, per la continuità di $\lambda \mapsto \lambda x$, esiste $\bar{\lambda} \in]0, 1[$ tale che $x/\rho \in U$ per ogni $\rho \geq \bar{\lambda}$ (U è aperto convesso e contiene 0) e dunque $p_U(x) < 1$ (l'altra inclusione segue da (2.2.3)).

Vogliamo ora fare il percorso inverso rispetto alla definizione precedente. Consideriamo dunque una insieme di indici $\mathscr{I}$ e una famiglia $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$ di seminorme su $\mathbb{X}$ e poniamo:

$$U_i(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{X} : p_i(x) < \varepsilon\} \qquad \text{per } i \in \mathscr{I},\ \varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

Per la (2.2.5) gli U_i sono convessi e simmetrici e assorbenti. Definiamo:

$$\begin{gathered}\mathscr{I}^{\#} := \{I \subset \mathscr{I} : \#I < +\infty\} = \{\{i_1, \dots, i_k\} : k \in \mathbb{N}, i_j \in \mathscr{I}, j = 1, \dots, k\} \\ U_I(\varepsilon) := \bigcap_{i\in I} U_i(\varepsilon) \qquad \text{se } I \in \mathscr{I}^{\#},\ \varepsilon > 0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

La famiglia $(U_I(\varepsilon))_{I\in\mathscr{I}^{\#},\varepsilon>0}$ è ammissibile come base di intorni di zero, infatti ogni $U_I(\varepsilon)$ contiene zero e se $I_1, I_2 \in \mathscr{I}^{\#}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ allora, posto $I := I_1 \cup I_2$ e $\varepsilon := \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$), si ha $U_I(\varepsilon) \subset U_{I_1}(\varepsilon_1) \cap U_{I_2}(\varepsilon_2)$. Dunque $(U_I(\varepsilon))_{I\in\mathscr{I}^{\#},\varepsilon>0}$ induce una topologia su $\mathbb{X}$.

Dico che la somma e il prodotto per gli scalari sono continue rispetto a questa topologia.

Cominciamo dalla somma. Siano x_0 e y_0 in $\mathbb{X}$ e sia U un intorno di $x_0 + y_0$. Allora esistono $I \in \mathscr{I}^{\#}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$x_0 + y_0 + U_I(\varepsilon) \subset U \quad \Leftrightarrow \quad U_I(\varepsilon) \subset U - x_0 - y_0.$$

Prendiamo $x \in x_0 + U_I(\varepsilon/2), y \in y_0 + U_I(\varepsilon/2)$. Allora, per ogni $i \in I$:

$$p_i((x + y) - (x_0 + y_0)) \le p_i(x - x_0) + p_i(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(usando la subadditività). Dunque $x + y \in x_0 + y_0 + U_I(\varepsilon) \subset U$.

Dimostriamo la continuità del prodotto. Siano $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e sia U intorno di $\lambda_0 x_0$. Allora esistono $I \in \mathscr{I}^{\#}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$\lambda_0 x_0 + U_I(\varepsilon) \subset U \quad \Leftrightarrow \quad U_I(\varepsilon) \subset U - \lambda_0 x_0.$$

Scegliamo $\delta > 0$ in modo che $\delta \max_{i\in I} p_i(x_0) < \varepsilon/2$ ed $\varepsilon_1 > 0$ con $(|\lambda_0| + \delta)\varepsilon_1 < \varepsilon/2$. Se $x \in x_0 + U_I(\varepsilon_1)$, $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$ si ha, per ogni $i \in I$:

$$\begin{aligned}p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) = p_i(\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0) \le \\ |\lambda| p_i(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p_i(x_0) \le (|\lambda_0| + \delta)\varepsilon_1 + \delta p_i(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dunque $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U_I(\varepsilon) \subset U$.

Quanto scritto sopra dimostra il seguente enunciato.

2.3.5 Teorema. *Sia $(\mathbb{X}, \tau)$ uno spazio vettoriale topologico. Allora $\mathbb{X}$ è localmente convesso se e solo se esiste una famiglia di seminorme $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$ tale che (avendo definito $\mathscr{I}^{\#}$ e $U_I(\varepsilon)$ come in (2.2)) si ha:*

$$U \in \mathscr{I}_\tau(0) \Leftrightarrow \exists I \in \mathscr{I}^{\#}, \exists\varepsilon > 0 \ \text{tale che}\ U_I(\varepsilon) \subset U. \tag{2.3}$$

Come conseguenza di questo risultato scriveremo anche $(\mathbb{X}, (p_i)_{i\in\mathscr{I}})$ per indicare che $\mathbb{X}$ è uno spazio localmente convesso e che $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$ è una famiglia di seminorme che determina la topologia su $\mathbb{X}$ (tramite la (2.3))

2.3.6 Proposizione. *Sia $(\mathbb{X}, (p_i)_{i\in\mathscr{I}})$ uno S.V.T.L.C. . Allora $\mathbb{X}$ è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ esiste $i \in \mathscr{I}$ tale che $p_i(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo $\Rightarrow$. Supponiamo $\mathbb{X}$ di Haudorff e prendiamo $x \neq 0$. Dunque esiste un intorno U di zero che non contiene x. Per la (2.3) ci sono $I \in \mathscr{I}^{\#}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $0 \in U_I(\varepsilon) \subset U$. Dato che $x \notin U$ deve essere $p_i(x) \geq \varepsilon$ per almeno un i in I.

Dimostriamo $\Leftarrow$. Se $\varepsilon := p_i(x) > 0$ posto $U := U_{\{i\}}(\varepsilon/2) = U_i(\varepsilon/2)$ si ha che U è un intorno di zero e $U_x := x + U$ è un intorno di x; dico che $U \cap U_x = \emptyset$: se $x_0 \in U \cap U_x$ si avrebbe $\varepsilon = p_i(x) \leq p_i(x - x_0) + p_i(x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, assurdo. □

2.3.7 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno S.V.T.L.C. di Haudorff. Sono equivalenti:*

(a) *$\mathbb{X}$ è metrizzabile;*

(b) *esiste un sistema fondamentale di intorni $\mathscr{I}_0$ di zero numerabile;*

(c) *esiste una famiglia numerabile di seminorme $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$ con $\mathscr{I} \subset \mathbb{N}$, che induce la topologia di $\mathbb{X}$ mediante la (2.3).*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) è conseguenza del fatto che, se la topologia di $\mathbb{X}$ è indotta da una distanza d, allora le palle $U_n := B(0, 1/n)$ formano una base di intorni di zero.

(b) $\Rightarrow$ (c) è conseguenza del Teorema (2.3.5) (prendendo $p_i := p_{U_i}$).

(c) $\Rightarrow$ (a) si dimostra definendo la distanza d mediante:

$$d(x,y) := \sum_{i\in\mathscr{I}} 2^{-i} \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}.$$

Il fatto che d sia una distanza è di facile verifica: in particolare $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ segue notando che $p_i(z) = 0\ \forall i \in \mathscr{I}$ se e solo se $z = 0$ (vedi la (2.3.6)); inoltre per disuguaglianza triangolare si usa il fatto che $\chi(t) := t/(1+t)$ è crescente ed è subadditiva (si può usare il fatto che χ è concava e $\chi(0) = 0$). Inoltre dati $i \in \mathscr{I}$ e $\varepsilon > 0$:

$$d(0,x) < \rho \Rightarrow \frac{p_i(x)}{1 + p_i(x)} \leq 2^i \rho \Rightarrow p_i(x) < \frac{2^i\rho}{1 - 2^i\rho} < \varepsilon$$

per ρ abbastanza piccolo, cioè $B_d(0,\rho) \subset U_i(\varepsilon)$ – dunque $U_i(\varepsilon)$ è un intorno di zero in d. Viceversa, dato $\rho > 0$ posso trovare $\bar{k}$ tale che $\sum_{i>\bar{k}} 2^{-i} < \rho/2$ e prendere $I := \{i \in \mathscr{I}, i \leq \bar{k}\} \in \mathscr{I}^{\#}$ e $\varepsilon := \rho/2 > 0$. Con queste scelte:

$$x \in U_I(\varepsilon) \Rightarrow d(0,x) = \sum_{i\in I} \frac{2^{-i}p_i(x)}{1 + p_i(x)} + \sum_{i\in\mathscr{I}, i>\bar{k}} \frac{2^{-i}p_i(x)}{1 + p_i(x)} \leq \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=\bar{k}+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

e quindi $U_I(\varepsilon) \subset B_d(0,\rho)$. Questo prova che la topologia indotta da d coincide con quella "originaria" di $\mathbb{X}$. □

2.3.8 Osservazione. Nel Teorema precedente la (a) potrebbe essere sostituita da:

(a′) $\mathbb{X}$ è metrizzabile da una metrica d invariante per translazioni.

In effetti (a′) implica (a) e la dimostrazione fatta mostra che (c) implica (a′).

2.3.9 Osservazione. Ricordiamo che $(\mathbb{X}, d)$ si dice *spazio pseudo-metrico* se d verifica le proprietà della distanza tranne $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$. È chiaro che le "pseudo palle" $B(x,\rho) := \{x' \in \mathbb{X} : d(x,x') < \rho\}$ sono una base di intorni e inducono dunque una topologia τ_d su $\mathbb{X}$ (scriveremo $(\mathbb{X}, d)$ in luogo di $(\mathbb{X}, \tau_d)$). Naturalmente $(\mathbb{X}, d)$ è di Hausdorff se e solo se d è una metrica. Questa nozione ha un certo interesse: per esempio è facile vedere che in uno spazio pseudo-metrico un insieme è chiuso se e solo se è sequenzialmente chiuso (o che i punti della chiusura sono raggiungibili tramite successioni).

Allora il Teorema (2.3.7) vale senza l'ipotesi che $\mathbb{X}$ sia di Hausdorff, purché la (a) sia sostituita da

(a″) $\mathbb{X}$ è pseudometrizzabile da una pseudometrica invariante per translazioni.

In effetti la dimostrazione è identica, con l'unica differenza che la d costruita sopra è una pseudometrica.

2.3.10 Proposizione. *Supponiamo che $\mathbb{X}$ sia uno S.V.T.L.C. metrizzabile e che d sia una distanza invariante per translazioni che induce la topologia di $\mathbb{X}$. Supponiamo che $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$ con $\mathscr{I} \subset \mathbb{N}$ sia una famiglia numerabile di seminorme come dalla* (b) *del precedente Teorema* (2.3.7).

Allora una successione (x_n) in $\mathbb{X}$ è di Cauchy in $(\mathbb{X}, d)$ se e solo se (x_n) in $\mathbb{X}$ è di Cauchy per ogni seminorma p_i, cioè:

$$\forall i \in \mathscr{I}, \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \textit{ tale che } \forall m, n \geq \bar{n} \quad p_i(x_n - x_m) \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Analogamente

$$x_n \to x \textit{ in } \mathbb{X} \textit{ se e solo se } p_i(x_n - x) \to 0 \qquad \forall i \in \mathscr{I}. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Facciamo la prima equivalenza (la seconda è analoga). Supponiamo che (x_n) sia una successione di Cauchy in d e mostriamo che vale la (2.4). Sia $i \in \mathscr{I}$ e sia $\varepsilon > 0$. Dato che $\{p_i(x) < \varepsilon\}$ è un intorno di zero in $\mathbb{X}$ e che d induce la topologia di $\mathbb{X}$, deve esistere $r > 0$ tale che

$$\{d(0, x) < r\} \subset \{p_i(x) < \varepsilon\}.$$

Dato che (x_n) è di Cauchy rispetto a d:

$$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } d(0, x_n - x_m) = d(x_n, x_m) < r.$$

Ma allora $\forall n, m \geq \bar{n}$ vale $p_i(x_n - x_m) < \varepsilon$ e dunque (2.4) è verificata.

Viceversa supponiamo che valga (2.4). Fissiamo $\varepsilon > 0$: dato che $\{d(0, x) < \varepsilon\}$ è un intorno di zero devono esistere $\delta > 0$ e un numero finito di indici $i_1, \ldots, i_k$ tali che:

$$U_{\{i_1,\ldots,i_k\}}(\delta) = \bigcap_{j=1}^{k} \left\{p_{i_j}(x) < \delta\right\} \subset \{d(0, x) < \varepsilon\}.$$

Per la proprietà (2.4), dato che gli i_j sono un numero finito, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\forall j = 1, \ldots, k,\ \forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } p_{i_j}(x_n - x_m) < \delta,$$

da cui segue, per la proprietà sopra, che:

$$\forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } d(x_n, x_m) = d(0, x_n - x_m) < \varepsilon.$$

Dunque (x_n) è di Cauchy in d. □

2.3.11 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Diremo che $\mathbb{X}$ è uno *spazio di Fréchet* se $\mathbb{X}$ è localmente convesso e se la sua topologia è indotta da una metrica che rende $\mathbb{X}$ completo.

2.3.12 Osservazione. In virtù di quanto visto sopra possiamo dire che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Fréchet se e solo se esiste una famiglia numerabile di seminorme $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$, $\mathscr{I} \subset \mathbb{N}$ che induce la topologia di $\mathbb{X}$ (mediante la (2.3)) e tali che:

1. per ogni $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ esiste $i \in \mathscr{I}$ con $p_i(x) > 0$;
2. se (x_n) è una successione di Cauchy per ogni p_i, $i \in \mathscr{I}$ (cioè se vale la (2.4)), allora esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che $p_i(x_n - x) \to 0$ per ogni $i \in \mathscr{I}$.

2.3.13 Definizione. Uno spazio normato completo si dice *spazio di Banach*.

2.4 Funzioni lineari e continue su spazi v.t.l.c.

2.4.1 Definizione. Se $\mathbb{X}$ uno S.V.T. indichiamo con $\mathscr{B}_{\mathbb{X}}$ la famiglia dei sottoinsiemi limitati di $\mathbb{X}$ (cfr. la (5) di (2.1.8)).

2.4.2 Proposizione. *Sia* $(\mathbb{X},(p_i)_{i\in\mathscr{I}})$ *uno S.V.T.L.C. . Allora*

$$A \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}} \Leftrightarrow \sup_{x\in A} p_i(x) < +\infty \qquad \forall i \in \mathscr{I}.$$

Dimostrazione. Sia A limitato e sia $i \in \mathscr{I}$. Dato che $U_i(1)$ è un intorno di zero deve essere $A \subset \alpha U_i(1) = U_i(\alpha)$ per α grande e questo significa che $p_i(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in A$. Viceversa supponiamo che $K_i := \sup_A p_i < +\infty$ $\forall i \in \mathscr{I}$. Se U è un intorno di zero esistono $I \in \mathscr{I}^{\#}$ e $\varepsilon > 0$ con $U_I(\varepsilon) \subset U$. Sia $\bar\alpha := \max\limits_{i\in I} \dfrac{K_i}{\varepsilon}$; se $i \in I$ e se $\alpha \geq \bar\alpha$ si ha $A \subset U_i(K_i) \subset U_i(\alpha\varepsilon)) = \alpha U_i(\varepsilon)$; dunque $A \subset \alpha U_I(\varepsilon) \subset \alpha U$ per $\alpha \geq \bar\alpha$. □

2.4.3 Definizione. Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ spazi vettoriali topologici e sia $L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una applicazione lineare. Diciamo che L è *limitata* se per ogni insieme $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}}$ l'immagine $LB \in \mathscr{B}_{\mathbb{Y}}$. Indichiamo $\mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) := \{L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : L \text{ è lineare e limitata}\}$.

2.4.4 Definizione. Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ spazi vettoriali topologici. Per ogni $B \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$ e ogni $V \in \mathscr{I}_{\mathbb{Y}}(0)$ (intorno di zero in Y) definiamo

$$F(B,V) := \{L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : L \text{ è lineare, } LB \subset V\}.$$

Sia $\mathscr{J}_0 \subset \mathscr{I}_{\mathbb{Y}}(0)$ una base di intorni di zero in $\mathbb{Y}$. Dico che $(F(B,V))_{B\in\mathscr{B}_{\mathbb{X}},V\in\mathscr{J}_0}$ è ammissibile come base di intorni di zero nello spazio $\mathscr{B}(X,Y)$, infatti la funzione nulla è in ogni $F(B,V)$ inoltre dati $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}}$, $V_1, V_2 \in \mathscr{J}_0$, se prendo $B := B_1 \cup B_2$ e $V \in \mathscr{J}_0$ tale che $V \subset V_1 \cap V_2$, trovo $F(B,V) \subset F(B_1,V_1) \cap F(B_2,V_2)$.

Chiamiamo $\sigma_{\mathscr{B}} = \sigma_{\mathscr{B}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ la topologia indotto da $(F(B,V))_{B\in\mathscr{B}_{\mathbb{X}},V\in\mathscr{J}_0}$. Essa è legata alla *convergenza uniforme sui limitati.*

Lo spazio $\mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ munito della topologia $\sigma_{\mathscr{B}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}))$ è uno S.V.T. . Infatti:

(a) dati $L_1, L_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}}$ e $V \in \mathscr{J}_0$ possiamo trovare $U \in \mathscr{J}_0$ tale che $U + U \subset V$; allora se $L', L'' \in \mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, se $(L' - L_1)(B) \subset U$ e $(L'' - L_2)(B) \subset U$, si ha $(L' + L'' - L_1 - L_2)(B) = (L' - L_1)(B) + (L'' - L_2)(B) \subset U + U \subset V$; dunque $L' \in L_1 + F(B,V), L'' \in L_2 + F(B,U) \Rightarrow L' + L'' \in L_1 + L_2 + F(B,V)$ (la somma è continua);

(b) dati $L_0 \in \mathscr{B}(X,Y)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $B \in \mathscr{B}_X$ e $V \in \mathscr{J}_0$ possiamo trovare $V_1 \in \mathscr{J}_0$ tale che $V_1 + V_1 \subset V$, $\delta > 0$ tale che $\delta L_0(B) \subset V_1$ (qui conta che L_0 è limitato) e $U \in \mathscr{J}_0$ tale che $tU \subset V_1$ per tutte le t in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$; allora se $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ e $(L - L_0)(B) \subset U$ si ha $(tL - t_0L_0)(B) \subset t(L - L_0)(B) + (t - t_0)L_0(B) \subset V_1 + V_1 \subset V)$; in altri termini $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, L \in L_0 + F(B,U) \Rightarrow tL \in t_0L_0 + F(B,V)$ (il prodotto è continuo).

2.4.5 Osservazione. Se $\mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ è munito della topologia $\sigma_{\mathscr{B}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, allora per ogni $x \in \mathbb{X}$ la mappa $L \mapsto Lx$ è continua da $\mathscr{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ in Y. Infatti preso V nella base di intorni di zero di Y e posto $U := F(\{x\}, V)$ (i singoletti sono insiemi limitati!) si ha $L \in U \Rightarrow Lx \in V$.

2.4.6 Proposizione. *Se* $L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *è lineare e continua, allora* L *è limitata. Se lo spazio di partenza* $\mathbb{X}$ *è normato vale l'implicazione opposta.*

Dimostrazione. Sia $B \in \mathscr{B}_X$ e sia $B' := LB'$. Preso U' intorno di zero in $\mathbb{Y}$ esiste U intorno di zero in $\mathbb{X}$ tale che $LU \subset U'$. Ma allora esiste $\bar\alpha$ tale che $B \subset \alpha U$ per ogni $\alpha \geq \bar\alpha$. Ne segue $\alpha B' = \alpha LU \subset \alpha U'$ per ogni $\alpha \geq \bar\alpha$, cioè $B' \in \mathscr{B}_{\mathbb{Y}}$.

Supponiamo X normato e $L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ limitata. Dato che $B := \{x \in \mathbb{X} : \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\}$ è limitato in $\mathbb{X}$ la sua immagine LB deve essere limitata in $\mathbb{Y}$. Dunque preso un qualunque V intorno di zero in $\mathbb{Y}$ esiste $\alpha_V > 0$ tale che $LB \subset \alpha_V V$. Ne segue che L è continua in 0:

$$\|x\|_X < \frac{1}{\alpha_V} \Rightarrow \alpha_V x \in B \Rightarrow L(\alpha_V x) \in \alpha_V V \Rightarrow Lx \in V.$$

Dalla continuità in zero si ottiene la continuità in $\mathbb{X}$, usando l'invarianza per translazioni. □

Il viceversa è falso in generale. Per esempio l'identità $i : \mathrm{L}^2(\Omega)^* \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dove $\mathrm{L}^2(\Omega)^*$ indica $\mathrm{L}^2(\Omega)$ munito della topologia debole, è limitata (gli insiemi debolmente limitati sono limitati) ma non continua.

La (2.4.6) permette la seguente definizione.

2.4.7 Definizione. Possiamo dunque dotare lo spazio

$$\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \{L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : L \text{ è lineare e continua}\}$$

della topologia $\sigma_{\mathscr{B}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, che viene detta la *topologia forte* su $\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

2.4.8 Osservazione. Se $(\mathbb{Y}, (p'_h)_{h\in\mathscr{H}})$ è localmente convesso, allora definendo:

$$P_{B,h}(L) := \sup_{x\in B} p'_h(Lx) \qquad \forall B \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}},\ \forall h \in \mathscr{H}$$

si trova una famiglia di seminorme che rendono $\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ localmente convesso.

Se si aggiunge che $\mathbb{X}$ è normato basta considerare le seminorme:

$$P_h(L) := \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}}\leq 1} p'_h(Lx) \qquad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Se $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sono normati, allora $\mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ è normato rispetto alla (ben nota) norma:

$$\|L\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} := \sup\left\{\|Lx\|_{\mathbb{Y}} : \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\right\}.$$

2.4.9 Proposizione. *Siano $(\mathbb{X}, (p_i)_{i\in\mathscr{I}})$ e $(\mathbb{Y}, (p'_h)_{h\in\mathscr{H}})$ S.V.T.L.C . Sono equivalenti:*

(a) *L è continua;*

(b) *L è continua in zero;*

(c) *per ogni $h \in \mathscr{H}$ esistono I_h in $\mathscr{I}^\#$ e $K_h > 0$ tali che:*

$$p'_h(Lx) \leq K_h \max_{i\in I_h} p_i(x) \qquad \forall x \in X. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Usiamo nel seguito gli insiemi $U'_h(\varepsilon)$ e $U'_H(\varepsilon)$ definiti come i corrispondenti $U_i(\varepsilon)$ e $U_I(\varepsilon)$ di (2.1) e (2.2), quando si usano le $(p'_h)_{h\in\mathscr{H}}$ in luogo delle $(p_i)_{i\in\mathscr{I}}$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) segue dall'invarianza per translazioni (non serve la locale convessità).

(b) $\Rightarrow$ (c). Fissiamo $h \in \mathscr{H}$. Dato che $U'_h(1)$ è un intorno di zero in $\mathbb{Y}$, per la continuità di L, esiste U intorno di zero in $\mathbb{X}$ tale che $LU \subset U'_h(1)$. Ma allora esistono $I \in \mathscr{I}^\#$ e $\varepsilon > 0$ tali che $U_I(\varepsilon) \subset U$ da cui $L\left(U_I(\varepsilon)\right) \subset U'_h(1)$. Se $\delta > 0$ e $x \in \mathbb{X}$ si ha:

$$\frac{\varepsilon x}{\max_{i\in I} p_i(x) + \delta} \in U_I(\varepsilon) \Rightarrow p'_h\left(L\left(\frac{\varepsilon x}{\max_{i\in I} p_i(x) + \delta}\right)\right) < 1 \Rightarrow p'_h(Lx) < \frac{\max_{i\in I} p_i(x) + \delta}{\varepsilon}.$$

Dato che $\delta > 0$ è arbitrario si ottiene la (2.6) con $K_h = 1/\varepsilon$.

(c) $\Rightarrow$ (b). Sia U' un intorno di zero in $\mathbb{Y}$. Allora esistono $H \in \mathscr{H}^\#$ ed $\varepsilon' > 0$ tali che $U'_H(\varepsilon') \subset U'$. Per (2.6) per ogni $h \in H$ esistono $I_h \in \mathscr{I}^\#$ e $K_h \in \mathbb{R}$ tali che:

$$p'_h(Lx) \leq K_h \max_{i \in I_h} p_i(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X},\ \forall h \in H.$$

Se $I := \bigcup_{h \in H} I_h$ e $K := \max_{h \in H} K_h$ si ha:

$$p'_h(Lx) \leq K \max_{i \in I} p_i(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X},\ \forall h \in H.$$

Ne segue che, se $x \in U_I(\varepsilon'/K)$, si ha $Lx \in U'_h(\varepsilon')$ per ogni $h \in H$, dunque $Lx \in U'_H(\varepsilon') \subset U'$. Abbiamo dunque dimostrato la continuità di L in zero. $\square$

Nel caso in cui $\mathbb{Y}$ sia normato possiamo aggiungere delle caratterizzazioni valide per un generico S.V.T. $\mathbb{X}$.

2.4.10 Proposizione. *Siano $\mathbb{X}$ uno S.V.T. e $\mathbb{Y}$ uno spazio normato con norma $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$. Sia $L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Allora sono equivalenti:*

(a) *L è continua;*

(b) *L è continua in zero;*

(c) *esiste un intorno di zero U tale che $L(U)$ è limitato in $\mathbb{Y}$ (cioè $\sup_{x \in U} \|Lx\|_Y < +\infty$).*

Sia ora $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$; altre condizioni equivalenti sono:

(d) *$L^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{X} : Lx = 0\}$ è chiuso in $\mathbb{X}$;*

(e) *$L^{-1}(\{0\})$ non è denso in $\mathbb{X}$ o $L^{-1}(\{0\}) = \mathbb{X}$ (caso banale);*

Dimostrazione. (a) $\Leftrightarrow$ (b) è ovvia.

(b) $\Rightarrow$ (c). La palla $B_{\mathbb{Y}}(0,1)$ è un intorno di zero in $\mathbb{Y}$: per la continuità di L deve esistere un intorno di zero U tale che $L(U) \subset B_{\mathbb{Y}}(0,1)$. Dunque $L(U)$ è limitato.

(c) $\Rightarrow$ (b). Sia U_0 un intorno di zero tale che $K := \sup_{x \in U_0} \|Lx\|_{\mathbb{Y}} < +\infty$. Se U' è un intorno di zero in $\mathbb{Y}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_{\mathbb{Y}}(0,\varepsilon) \subset U'$. Ma allora preso $U := \frac{\varepsilon}{K} U_0$ è chiaro che $L(U) \subset B_{\mathbb{Y}}(0,\varepsilon) \subset U'$.

Supponiamo ora $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$. (b) $\Rightarrow$ (d) è ovvio dato che $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e L è continua.

(d) $\Rightarrow$ (c). Supponiamo che $H := L^{-1}(\{0\})$ sia chiuso. Se $H = X$ allora $L = 0$, che è continua. Se $H \neq X$ allora c'è un x_0 in $X \setminus H$. Dato che H è chiuso $X \setminus H$ è aperto e dunque esiste un intorno U di zero tale che $(x_0 + U) \cap H = \emptyset$. Possiamo prendere U bilanciato, Dico che L ha segno costante su $x_0 + U'$. Infatti se ci fosse $x \in x_0 + U'$ tale che $L(x)L(x_0) < 0$, allora avrei $L(x_0 + t(x - x_0)) = L(x_0) + tL(x - x_0) = 0$ per $t = \dfrac{L(x_0)}{L(x_0) - L(x)}$. Notiamo che $0 < t < 1 \Rightarrow x_0 + t(x - x_0) \in x_0 + U'$ poiché U' è bilanciato: abbiamo trovato un punto in $(x_0 + U') \cap L^{-1}(0)$ che è assurdo. Supponiamo per esempio $L(x) > 0$ per ogni $x \in x_0 + U'$, cioè $L(y) + L(x_0) > 0\ \forall y \in U'$. Per simmetria vale anche $L(-y) + L(x_0) > 0$ da cui L è limitata in U': $-L(x_0) < L(y) < L(x_0)\ \forall y \in U'$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Dato che $L^{-1}(\{0\})$ è chiuso, allora se è denso coincide con X.

(e) $\Rightarrow$ (d) Supponiamo che $H = L^{-1}(\{0\})$ non sia chiuso. Allora esiste x_0 tale che $L(x_0) \neq 0$ (e dunque $H \neq \mathbb{X}$) con la proprietà che $H \cap (x_0 + U) \neq \emptyset$ per ogni U intorno di zero. Sia x un qualunque punto di $X \setminus H$ e sia U un intorno di zero. Si ha che $U' := \dfrac{L(x_0)}{L(x)} U$ è un intorno di zero e quindi esiste $y' \in H \cap (x_0 + U')$. Ne segue:

$$x + U = \left(x - \frac{L(x)}{L(x_0)} x_0 \right) + \frac{L(x)}{L(x_0)} (x_0 + U') \ni \left(x - \frac{L(x)}{L(x_0)} x_0 \right) + \frac{L(x)}{L(x_0)} y' =: y$$

e $y \in H$ perché $L\left(x - \dfrac{L(x)}{L(x_0)} x_0 \right) = 0 = Ly'$. Dunque per ogni $U \in \mathscr{I}(0)$ si ha $H \cap (x + U) \neq \emptyset$. Ne segue che H è denso. □

2.5 Il Teorema di Hahn–Banach

2.5.1 Teorema (Hahn-Banach)**.** *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale e sia M un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$. Sia $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una funzione lineare e sia $p : \mathbb{X} \to [0, +\infty[$ tale che:*

$$\begin{aligned} &p(tx) = tp(x) \quad \forall x \in \mathbb{X},\ \forall t \geq 0, \\ &p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

e che $\varphi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in M$. Allora esiste $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ lineare e tale che $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in M$, $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X \setminus M$ e estendiamo φ a $\{x + tx_0 : x \in X, t \in \mathbb{R}\}$. Per questo prendiamo $\tilde{\varphi}(x + tx_0) := \varphi(x) + at$ per $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Per avere $\tilde{\varphi} \leq p$ su $\{x + tx_0 : x \in X, t \in \mathbb{R}\}$ occorre e basta che, per ogni $x \in M$ e $t \geq 0$:

$$\varphi(x) + at \leq p(x + tx_0) \quad \text{e} \qquad \varphi(x) - at \leq p(x - tx_0)$$

che equivale a:

$$\frac{\varphi(x_1) - p(x - t_1 x_0)}{t_1} \leq a \leq \frac{p(x_2 + t_2 x_0) - \varphi(x_2)}{t_2} \qquad \forall x_1, x_2 \in M,\ \forall t_1, t_2 > 0,$$

o anche (ponendo $x' := x_1/t_1$, $x'' := x_2/t_2$) a:

$$\sup_{x' \in M} \left(\varphi(x') - p(x' - x_0) \right) \leq a \leq \inf_{x'' \in M} \left(p(x'' + x_0) - \varphi(x'') \right).$$

Il fatto che un tale a si possa trovare segue allora dal fatto che, se $x', x'' \in M$ si ha:

$$\varphi(x' + x'') \leq p(x' + x'') \leq p(x' - x_0) + p(x'' + x_0) \Rightarrow \varphi(x') - p(x' - x_0) \leq p(x'' + x_0) - \varphi(x'')$$

Dunque φ si può estendere a $M + t\{x_0\}$, mantenendo la disuguaglianza con p.

A questo punto chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le coppie (φ', M') dove M' è un sottopazio vettoriale di $\mathbb{X}$ contenente M e $\varphi' : M' \to \mathbb{R}$ estende $\varphi : M \to \mathbb{R}$ conservando la proprietà $\varphi'(x) \leq p(x)\ \forall x \in M'$. $\mathcal{P}$ è non vuoto dato che $(M, \varphi) \in \mathcal{P}$ ed è parzialmente ordinato dalla relazione:

$$(\varphi', M') \preceq (\varphi'', M'') \quad \text{ se e solo se } \quad M' \subset M'',\ \varphi''(x) = \varphi'(x)\ \forall x \in M'.$$

Se $\mathcal{C}$ è una catena (cioè un sottoinsieme totalmente ordinato) in $\mathcal{P}$ e definiamo:

$$\bar{M} := \bigcup_{(M', \varphi') \in \mathcal{C}} M', \qquad \bar{\varphi}(x) = \varphi'(x) \Leftrightarrow (\varphi', M') \in \mathcal{C} \text{ e } x \in M'.$$

È chiaro che $(\bar{M}, \bar{\varphi})$ è ben definita e $(M', \varphi') \preceq (\bar{M}, \bar{\varphi})$ per ogni $(M', \varphi') \in \mathcal{C}$ (ogni catena ammette un elemento massimale). Per il Lemma di Zorn esiste $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ tale che $(M', \varphi') \preceq (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ per ogni $(M', \varphi') \in \mathcal{P}$. Per la prima parte della dimostrazione deve essere $\tilde{M} = \mathbb{X}$ e quindi $\tilde{\varphi}$ è l'estensione cercata. □

2.5.2 Definizione. Se $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, (p_i)_{i\in\mathscr{I}})$ è uno S.V.T. poniamo

$$\mathbb{X}^* := \{\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ è lineare e continuo}\}$$

$\mathbb{X}^*$ è chiaramente uno spazio vettoriale e si chiama *duale* di $\mathbb{X}$ (*duale continuo* qualora lo si voglia distinguere dal *duale algebrico* $\mathbb{X}'$ che contiene tutti i funzionali lineari su $\mathbb{X}$). Vedremo nel prossimo paragrafo le topologie che si possono considerare su $\mathbb{X}^*$. Notiamo per ora che, se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, per la Proposizione (2.4.9), si ha:

$$\varphi \in \mathbb{X}^* \Leftrightarrow \exists\, i_1, \dots, i_k \in \mathscr{I}, \exists K > 0 \text{ tali che } |\varphi(x)| \le K \max_{j=1,\dots,k} p_{i_j}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Se poi $\mathbb{X}$ è normato, allora:

$$\varphi \in \mathbb{X}^* \Leftrightarrow \exists K > 0 \text{ tale che } |\varphi(x)| \le K\|x\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall x \in \mathbb{X},$$

e si può definire allora la *norma di* φ come:

$$\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} := \inf\{K > : |\varphi(x)| \le K\|x\|_{\mathbb{X}}\ \forall x \in \mathbb{X}\}.$$

Dunque $\mathbb{X}^*$ è normato se $\mathbb{X}$ è normato.

2.5.3 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno S.V.T.L.C. e sia $M \subset \mathbb{X}$ un sottospazio di $\mathbb{X}$. Sia $\varphi : M \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Allora esiste $\tilde{\varphi} \in \mathbb{X}^*$ tale che $\tilde{\varphi}|_M = \tilde{\varphi}$. Se $\mathbb{X}$ è normato, possiamo supporre anche che $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Dimostrazione. Dato che (a) $\Rightarrow$ (c) in (2.4.10) esiste un intorno di zero U tale che $\varphi(U \cap M)$ è limitato (sto considerando M con la topologia indotta da $\mathbb{X}$). Dato che $\mathbb{X}$ è L.C. posso supporre U aperto, convesso e simmetrico, di modo che p_U è una seminorma. La limitatezza di $\varphi(U \cap M)$ implica la disuguaglianza:

$$\varphi(x) \le K p_U(x) \qquad \forall x \in M$$

per $K := \sup \varphi(U \cap M)$(come si verifica facilmente). Da Hahn–Banach si deduce che esiste un'estensione $\tilde{\varphi}$ di φ a tutto $\mathbb{X}$ tale che:

$$\tilde{\varphi}(x) \le K p_U(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

Dunque $\tilde{\varphi}(U)$ è limitato e allora, dato che (c) $\Rightarrow$ (a) in (2.4.10) si ha $\tilde{\varphi} \in \mathbb{X}^*$. Se poi $\mathbb{X}$ è normato è chiaro che si può prendere $U = B(0, 1)$, da cui $p_U(x) = \|x\|$, e K un qualunque numero con $K > \|\varphi\|$. Se ne ricava facilmente che $\|\tilde{\varphi}| = \|\varphi\|$. □

2.5.4 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Siano C e K due convessi non vuoti tali che $C \cap K = \emptyset$. Supponiamo C aperto. Allora esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$, $\varphi \ne 0$ e tale che*

$$\varphi(x') < \varphi(x'') \qquad \forall x' \in C,\ \forall x'' \in K.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per passi, passando per dei casi particolari.
Caso $K = \{x_0\}$ e $0 \in C$. Sia $p = p_C$ la funzione di Minkowski per C. Allora si ha $C = \{x \in \mathbb{X} : p(x) < 1\}$, mentre $p(x_0) \ge 1$. Dato che C è convesso p verifica (2.7). Definiamo $M := \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ ponendo $\varphi(tx_0) = t$. Sia $x = tx_0$. Allora se $t \ge 0$ si ha $\varphi(x) = t \le tp(x_0) = p(tx_0) = p(x)$, mentre se $t \le 0$ si ha $\varphi(x) = t \le 0 \le p(x)$. Per il Teorema di Hahn-Banach si può estendere φ a tutto $\mathbb{X}$ in modo che $\varphi(x) \le p(x)$ per tutte le x in $\mathbb{X}$. In particolare:

$$\varphi(x) \le p(x) < 1 = \varphi(x_0) \qquad \forall x \in C.$$

Rimane da vedere che $\varphi \in \mathbb{X}^*$; questo si deduce prendendo un intorno U simmetrico di zero contenuto in C e notando che:

$$\varphi(x) \leq p(x) \leq 1 \qquad \forall x \in U,$$

e quindi, per simmetria, $|\varphi| \leq 1$ in U. Ne segue che φ è continua, usando la (c) di (2.4.10).
Caso $K = \{x_0\}$. Prendiamo $x_1 \in C$ e definiamo $C_1 := C - x_1$, $y_1 := x_0 - x_1$. Per il caso precedente c'è un $\varphi \in \mathbb{X}^*$ che separa C_1 e y_1 cioè:

$$\varphi(x - x_1) < \varphi(x_0 - x_1) \quad \forall x \in C \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(x_0) \quad \forall x \in C.$$

Caso generale. Poniamo $C_1 := C - K$. è facile verificare che C_1 è un convesso aperto che non contiene lo zero. Dunque esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ per ogni $x \in C_1$. Ne segue facilmente le tesi. $\square$

2.5.5 Osservazione. Se C e K sono convessi con $\mathring{C} \neq \emptyset$ e $\mathring{C} \cap K = \emptyset$ allora si trova $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che:

$$\varphi(x') \leq \varphi(x'') \qquad \forall x' \in \bar{C},\ \forall x'' \in \bar{K}.$$

Infatti in queste ipotesi $\mathring{C} \cap \bar{K} = \emptyset$, e quindi si può applicare il Teorema (2.5.4). Passando alla chiusura si ottiene la disuguaglianza debole (si ricordi che $\overline{\mathring{C}} = \bar{C}$).

2.5.6 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno S.V.T.L.C. di Hausdorff. Siano C e K due convessi non vuoti disgiunti in $\mathbb{X}$ con C chiuso e K è compatto. Allora esiste $\varphi \in \mathbb{X}^* \setminus \{0\}$ tale che:*

$$\sup_{x \in K} \varphi(x) < \inf_{y \in C} \varphi(y).$$

Premettiamo un lemma.

2.5.7 Lemma. *Sia $\mathbb{X}$ uno S.V.T. di Hausdorff. Siano $K, C \subset \mathbb{X}$ con $C \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$, $C \cap K = \emptyset$, K compatto e C chiuso. Allora esiste un intorno di zero U tale che $(K + U) \cap C = \emptyset$.*

Dimostrazione. Dato $x \in K$ esiste $U_x \in \mathscr{I}(0)$ tale che $(x + U_x) \cap C = \emptyset$ (perché C è chiuso). Al solito esiste $W_x \in \mathscr{I}(0)$ tale che $W_x + W_x \subset U_x$. Dato che K è compatto esistono $x_1, \ldots, x_k$ in K tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + W_{x_i})$. Prendiamo $W := \bigcap_{i=1}^{k} W_{x_i}$. Dico che $(K + W) \cap C = \emptyset$. Infatti:

$$K + W \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + W_{x_i}) + W \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + W_{x_i} + W_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + U_{x_i}).$$

Ne segue:

$$(K + W) \cap C \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} (x_i + U_{x_i}) \right) \cap C = \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + U_{x_i}) \cap C = \bigcup_{i=1}^{k} \emptyset = \emptyset.$$

$\square$

Dimostrazione di (2.5.6). Prendiamo $U \in \mathscr{I}(0)$ tale che $(K + U) \cap C = \emptyset$. Dato che $\mathbb{X}$ è localmente convesso possiamo supporre U convesso e quindi $K + U$ è un convesso aperto disgiunto da C. Per il Teorema (2.5.4) esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che:

$$\varphi(x + z) < \varphi(y) \quad \forall x \in K,\ \forall z \in U,\ \forall y \in C \Rightarrow \sup_{x \in K} \varphi(x) + \sup_{z \in U} \varphi(z) \leq \inf_{y \in C} \varphi(y).$$

Ne segue la tesi, visto che φ non è identicamente nulla e quindi $\sup_U \varphi > 0$. $\square$

2.5.8 Proposizione. *Supponiamo $\mathbb{X}$ normato. Allora per ogni x_0 in $\mathbb{X}$ con $x_0 \neq 0$ esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$ con $\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|_X$.*

Dimostrazione. Si prende $p(x) = \|x\|_{\mathbb{X}}$ e φ definito su $\{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ da $\varphi(tx_0) = t\|x_0\|_X$. È immediato che $\varphi(tx_0) \leq p(tx_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per mezzo di Hahn-Banach φ si estende a tutto $\mathbb{X}$ con la proprietà $\varphi(x) \leq \|x\|_X$, da cui $\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1$. Dato che $\varphi(x_0) = \|x_0\|_X$ deve essere $\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$. □

2.5.9 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ S.V.T. Diciamo che $S \subset \mathbb{X}$ è un *semispazio chiuso* se esistono $\varphi \in \mathbb{X}^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$S = S_{\varphi,c} := \{x \in \mathbb{X} : \varphi(x) \leq c\}\,.$$

Osserviamo che abbiamo ammesso anche l'intero spazio $\mathbb{X}$ tra i semispazi (in corrispondenza di $\varphi \equiv 0$ e $c \geq 0$) e il vuoto (in corrispondenza di $\varphi \equiv 0$ e $c < 0$).

2.5.10 Proposizione. *Sia E un sottoinsieme di uno spazio $\mathbb{X}$ localmente convesso. Allora*

$$\overline{\mathrm{co}}(E) = \bigcap_{S \in \mathscr{S}(E)} S \qquad \textit{dove} \quad \mathscr{S}(E) := \{S \textit{ semispazio chiuso con } E \subset S\}\,.$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathscr{K}(E) := \{K \subset \mathbb{X} : K \text{ è convesso chiuso e } E \subset K\}$. È ovvio che $\mathscr{S}(E) \subset \mathscr{K}(E)$, dunque:

$$\overline{co}(E) = \bigcap_{K \in \mathscr{K}(E)} K \subset \bigcap_{S \in \mathscr{S}(E)} S =: \overline{co}'(E).$$

Dato che $E \subset \overline{co}(E)$ si ha che $\overline{co}(E) = \emptyset$ implica $E = \emptyset$ e a sua volta $\overline{co}'(E) = \emptyset$ (perché il vuoto è un semispazio) e dunque la tesi vale in questo caso.

Sia allora $\overline{co}(E) \neq \emptyset$ e supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \overline{co}'(E) \setminus \overline{co}(E)$. Allora esiste $K \in \mathscr{K}(E)$ tale che $x_0 \notin K \neq \emptyset$. Per (2.5.6) esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$ con $\varphi(x_0) > \sup_{x \in K} \varphi(x) =: c$. Ma allora $x_0 \notin S_{\varphi,c}$ e quindi $x_0 \notin \overline{co}'(E)$ che è assurdo. In definitiva $\overline{\mathrm{co}}'(E) = \overline{\mathrm{co}}(E)$. □

2.5.11 Osservazione. Se $\mathbb{X}$ è localmente convesso $M \subset \mathbb{X}$ è un sottospazio lineare chiuso e $x_0 \notin M$, allora esiste $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in M$ e $\varphi(x_0) \neq 0$. Infatti per il Teorema (2.5.6) si trova $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $m := \sup_{x \in M} \varphi(x) < \varphi(x_0)$. Se ci fosse $x \in M$ con $\varphi(x) \neq 0$ allora $m \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(tx) = +\infty$, assurdo. Notiamo che se $\mathbb{X}$ è normato, per la linearità, si può supporre $\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$.

2.6 Topologie sullo spazio duale

2.6.1 Definizione. Siano $\mathbb{X}_1$ un insieme e sia $\mathbb{X}_2$ un insieme di funzioni da $\mathbb{X}_1$ a valori reali. Indichiamo:

$$\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) := \text{ la topologia meno fine su } \mathbb{X}_1 \text{ per cui ogni } x_2 \in \mathbb{X}_2 \text{ è continua.}$$

Useremo questa nozione esclusivamente nel caso un cui $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$ con $\mathbb{X}$ spazio vettoriale e $\mathbb{X}_2 \subset \mathbb{X}'$ (funzionali lineari su $\mathbb{X}$). È chiaro allora che: $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \sigma(\mathbb{X}_1, \mathrm{span}(\mathbb{X}_2))$ e che $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ è la topologia indotta su $\mathbb{X}_1$ da $\sigma(\mathrm{span}(\mathbb{X}_1), \mathbb{X}_2)$ (su $\mathrm{span}(\mathbb{X}_1)$).

2.6.2 Proposizione. *Siano $\mathbb{X}_1$ uno spazio vettoriale, $\mathbb{X}_2 \subset \mathbb{X}_1'$ e sia $\sigma := \sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$. Allora $(\mathbb{X}_1, \sigma)$ è localmente convesso e σ è indotta dalla famiglia di seminorme $(p_\varphi)_{\varphi \in \mathbb{X}_2}$ definite da $p_\varphi(x) := |\varphi(x)|$.*

Dimostrazione. Innanzitutto è chiaro che p_φ è una seminorma per ogni φ in $\mathbb{X}_2$; chiamiamo σ_1 la topologia indotta da questa famiglia di seminorme. Se $\varphi \in \mathbb{X}_2$ chiaramente $|\varphi(x)| \leq p_\varphi(x)$ e quindi φ, considerata da $(\mathbb{X}_1, \sigma_1) \to \mathbb{R}$, è continua dato che vale (c) della Proposizione (2.4.9) (nel caso particolare in cui $\mathbb{Y}$ è normato). Ne segue $\sigma \subset \sigma_1$. Viceversa, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathbb{X}_2$ e $\varepsilon > 0$, l'insieme:

$$U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{X}_1 : |\varphi_1(x)| < \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{x \in \mathbb{X}_1 : |\varphi_k(x)| < \varepsilon\}$$

è un intorno di zero in σ, per la continuità delle φ_i, $i = 1, \ldots, k$: dunque $U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(\varepsilon) \in \sigma$. Dato che gli $U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(\varepsilon)$ costituiscono la base di intorni per σ_1 se ne ricava che $\sigma_1 \subset \sigma$. □

2.6.3 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico e ricordiamo che $\mathbb{X}^*$ indica il duale topologico di $\mathbb{X}$: $\mathbb{X}^* := \{\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ con φ lineare e continuo$\}$.

Chiameremo *topologia debole* su $\mathbb{X}$ la topologia più debole (meno fine) per cui tutte le $\varphi \in \mathbb{X}^*$ sono continue. Indicheremo questa topologia con w.

Chiameremo *topologia debole star* su $\mathbb{X}^*$ la topologia più debole (meno fine) tale che $\varphi \mapsto \varphi(x)$, da $\mathbb{X}^*$ in $\mathbb{R}$, è continua per ogni $x \in \mathbb{X}$. Indicheremo questa topologia con $w*$.

È evidente che:

$$w = \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}^*), \qquad w^* = \sigma(\mathbb{X}^*, J(\mathbb{X})).$$

dove $J : \mathbb{X} \to \mathbb{X}''$ indica la (ben nota) mappa lineare da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}'' = (\mathbb{X}')' \subset (\mathbb{X}^*)'$ tale che $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ per ogni $\varphi \in \mathbb{X}'$.

Dalla Proposizione (2.6.2) si ricava la seguente caratterizzazione di w e w^*.

2.6.4 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Allora:*

- *$(\mathbb{X}, w)$ è localmente convesso e w è indotta dalla famiglia di seminorme $(p_\varphi)_{\varphi\in\mathbb{X}^*}$ definite da $p_\varphi(x) := |\varphi(x)|$;*
- *$(\mathbb{X}^*, w^*)$ è localmente convesso e w^* è indotta dalla famiglia di seminorme $(p^*_x)_{x\in\mathbb{X}}$ definite da $p^*_x(\varphi) := |\varphi(x)|$.*

2.6.5 Osservazione. Per motivi di omogeneità è chiaro che per generare la topologia w bastano le seminorme p_φ con $\|\varphi\| \leq 1$ e analogamente per la w^* bastano le p^*_x con $\|x\| \leq 1$.

2.6.6 Osservazione. $(\mathbb{X}^*, w^*)$ è sempre uno spazio di Hausdorff. Se $\mathbb{X}$ è uno spazio localmente convesso di Hausdorff anche $(\mathbb{X}, w)$ è di Haudorff. Per dimostrare la prima affermazione basta notare che se $\varphi \in \mathbb{X}^* \setminus \{0\}$ deve esistere un $x \in \mathbb{X}$ per cui $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow p_x(\varphi) \neq 0$; la tesi segue allora dalla Proposizione (2.3.6). Per quanto riguarda $(\mathbb{X}, w)$, preso $x \neq 0$ in $\mathbb{X}$, si ha che $\{0\}$ è chiuso (perchè $\mathbb{X}$ è di Hausdorff) e, usando la la seconda versione geometrica di Hahn-Banach (vedi (2.5.6)), si trova $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $p_\varphi(x) = \varphi(x) \neq \varphi(0) = 0$.

2.6.7 Osservazione. Siano $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Allora $(x_n)_n \to x$ in $(\mathbb{X}, w)$ se e solo se per ogni $\varphi \in \mathbb{X}^*$ si ha $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Questo si verifica facilmente utilizzando la (2.5) e l'espressione delle seminorme in $(\mathbb{X}^*, w)$. Analogamente una successione $(\varphi_n)_n$ in $\mathbb{X}^*$ converge in $(\mathbb{X}^*, w^*)$ a una $\varphi \in \mathbb{X}^*$ se e solo se per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$.

2.6.8 Osservazione. Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ spazi vettoriali topologici e sia $L : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lineare e continua. Allora $L : (\mathbb{X}, w) \to (\mathbb{Y}, w)$ è continua. Infatti sia V un intorno di zero in $w_\mathbb{Y}$. Allora $V \supset V' := \bigcap_{i=1,\ldots,k} \{|\varphi'_i(y)| < \varepsilon\}$ per $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_k \in Y^*$ ed $\varepsilon > 0$. Poniamo $\varphi_i := \varphi'_i \circ L$, per $i = 1, \ldots, k$. Allora $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathbb{X}^*$ da cui $U := \bigcap_{i=1,\ldots,k} \{|\varphi_i(x)| < \varepsilon\}$ è un intorno di zero in $w_\mathbb{X}$. Si vede immediatamente che $LU = V' \subset V$ da cui la tesi.

2.6.9 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ localmente convesso e sia K un sottoinsieme convesso di $\mathbb{X}$. Allora K è chiuso se e solo se K è debolmente chiuso (cioè chiuso in $(\mathbb{X}, w)$).*

Dimostrazione. Se K è debolmente chiuso, allora è chiuso, perché w è più debole della topologia di $\mathbb{X}$. Notiamo che se $\varphi \in \mathbb{X}^*$ e $c \in \mathbb{R}$ il semispazio chiuso $S_{\varphi,c}$ è debolmente chiuso (perché φ è debolmente continua). Per la chiusura di K si ha $K = \overline{\mathrm{co}}(K) = \bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}(E)} S$ (vedi la (2.5.10)), dunque K è debolmente chiuso (intersezione di insiemi debolmente chiusi). □

In quanto segue, nel caso di $\mathbb{X}$ normato, indicheremo con $\mathscr{B}$ la palla unitaria chiusa in $\mathbb{X}$. Indichiamo anche con $\mathscr{B}^*$ la palla unitaria chiusa in $\mathbb{X}^*$ dotato della topologia forte ($\mathscr{B}^*$ ha senso dato che $\mathbb{X}^*$ risulta normato).

2.6.10 Teorema (Banach-Alaoglu)**.** *Sia $\mathbb{X}$ normato. Allora $\mathscr{B}^*$ è compatta in $(\mathbb{X}^*, w^*)$.*

Dimostrazione. Per ogni x in $\mathbb{X}$ consideriamo l'intervallo $I_x := [-\|x\|, \|x\|]$ e definiamo $\Xi := \prod\limits_{x \in \mathbb{X}} I_x$, dotato della topologia prodotto π. Per il teorema di Tychonov Ξ è compatto. Ricordiamo che gli elementi di Ξ si possono vedere come le funzioni $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tali che $-\|x\| \le f(x) \le \|x\|$ e che la famiglia degli intorni in Ξ di un generico elemento f_0 è generata dagli insiemi $U_I(f_0, \varepsilon) := \{f \in \Xi : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I\}$ al variare di I tra i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{X}$ e di ε in $]0, \infty]$. È chiaro che, livello insiemistico, $\mathscr{B}^* = \{f \in \Xi : f \text{ è lineare}\}$. Inoltre, guardando la definizione della topologia w^*, è immediato che w^* e π coincidono su $\mathscr{B}^*$. Se dimostriamo che $\mathscr{B}^*$ è chiuso in Ξ il teorema è dimostrato. Per questo sia f_0 nella π-chiusura di $\mathscr{B}^*$, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Poniamo $I := \{x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$. Dato che $U_I(f_0, \varepsilon)$ è un intorno di f_0 deve esistere $f = f_{I,\varepsilon} \in U_I(\varepsilon, f_0) \cap \mathscr{B}^*$. Ne segue:

$$
\begin{aligned}
&|f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f_0(x_1) - \lambda_2 f_0(x_2)| = \\
&\quad |f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f_0(x_1) - \lambda_2 f_0(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)| \le \\
&|f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| + \lambda_1 |f_0(x_1) - f(x_1)| + \lambda_2 |f_0(x_2) - f(x_2)| < (1 + \lambda_1 + \lambda_2)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario si ha $f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2)$, cioè $f_0 \in \mathscr{B}^*$. □

2.6.11 Definizione. Dico che uno spazio topologico $\mathbb{X}$ è *separabile* se esiste un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ numerabile e denso in $\mathbb{X}$.

2.6.12 Osservazione. Se $E \subset \mathbb{X}$ è numerabile, allora $\overline{\mathrm{span}}(E) := \bigcap\limits_{\substack{E \subset M \subset \mathbb{X} \\ M \text{ lineare} \\ M \text{ chiuso}}} M$ è separabile.

Si può infatti vedere che $\overline{\mathrm{span}}(E) = \overline{\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Q}, e_1, \dots, e_k \in E, k \in \mathbb{N} \right\}}$.

2.6.13 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato con $\mathbb{X}^*$ separabile. Allora $\mathbb{X}$ è separabile.*

Dimostrazione. Sia $(\varphi_n)_n$ densa in $\mathscr{B}^*$ (nella topologia forte). Per ogni n posso scegliere $x_n \in \mathbb{X}$ tale che $\|x_n\|_{\mathbb{X}} = 1$ e $\varphi_n(x_n) \ge \|\varphi_n\|_{\mathbb{X}^*}/2$. Sia $\mathbb{X}_1 := \overline{\mathrm{span}(x_n, n \in \mathbb{N})} \subset \mathbb{X}$: $\mathbb{X}_1$ è separabile per l'osservazione (2.6.12). Dico che $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$. Se non fosse vero esisterebbe $\bar{x} \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_1$. Per la (2.5.11) ($\mathbb{X}$ è normato) si troverebbe $\varphi \in \mathscr{B}^*$ con $\varphi(\bar{x}) > 0 = \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}_1$. Sia (n_k) tale che $\varphi_{n_k} \to \varphi$ in $\mathbb{X}^*$; allora:

$$
\|\varphi_{n_k}\|_{\mathbb{X}^*} \le 2\varphi_{n_k}(x_{n_h}) = 2|\varphi_{n_k}(x_{n_h}) - \varphi(x_{n_k})| \le \|\varphi_{n_k} - \varphi\|_{\mathbb{X}^*} \to 0.
$$

Ne seguirebbe $\varphi = 0$ che è assurdo se $\varphi(\bar{x}) > 0$. □

2.6.14 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ normato. $\mathbb{X}$ è separabile se e solo se $(\mathscr{B}^*, w^*)$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbb{X}$ separabile e sia $(\hat{x}_n)_n$ una successione la cui immagine è densa in $\mathscr{B}$. Introduciamo la distanza d su $\mathscr{B}^*$ ponendo

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|\varphi_1(\hat{x}_n) - \varphi_2(\hat{x}_n)| \qquad \text{per } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{B}^*.$$

Dimostriamo la topologia τ_d indotta da su $\mathscr{B}^*$ coincide con w^*. Dato che d è invariante per translazioni basta verificare che gli intorni dello zero sono gli stessi.

(a) Siano $x \in \mathbb{X}$ con $\|x\| = 1$ e $\varepsilon > 0$. Mostriamo esiste $\rho > 0$ tale che $B_d(\rho) \subset U^*_x(\varepsilon) := \{\varphi \in \mathscr{B}^* : |\varphi(x)| < \varepsilon\}$. Per questo prendiamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|\hat{x}_k - x\|_X < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e definiamo $\rho := \dfrac{\varepsilon}{2^k + 1}$. Se $d(\varphi, 0) < \rho$:

$$|\varphi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(\hat{x}_k)| + |\varphi(\hat{x}_k)| \le \|x - \hat{x}_k\| + 2^k \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|\varphi(\hat{x}_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{k+1}\rho = \varepsilon.$$

(b) Sia $\rho > 0$ e mostriamo che esistono I sottoinsieme finito di $\mathbb{X}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $U^*_I(\varepsilon) := \{\varphi \in \mathscr{B}^* : |\varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I\} \subset B_d(\rho)$. Possiamo infatti prendere $\bar{n}$ in modo che $\sum_{n>\bar{n}} 2^{-n} < \dfrac{\rho}{2}$, $I := \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{\bar{n}}\}$ e $\varepsilon > 0$ tale che $\sum_{n\le\bar{n}} 2^{-n} < \dfrac{\rho}{2\varepsilon}$. Se $\varphi \in U^*_I(\varepsilon)$ si ha:

$$d(\varphi, 0) = \sum_{n\le\bar{n}} 2^{-n}|\varphi(\hat{x}_n)| + \sum_{n>\bar{n}} 2^{-n}|\varphi(\hat{x}_n)| < \varepsilon \sum_{n\le\bar{n}} 2^{-n} + \sum_{n>\bar{n}} 2^{-n} < \rho.$$

La (a) mostra che (usando la (2.6.5)) $w^* \subset \tau_d$ – la (b) che $\tau_d \subset w^*$.

Viceversa supponiamo $(\mathscr{B}^*, w^*)$ metrizzabile. Siano B_n le palle centrate in zero di raggio $1/n$ – dato che sono tutte w^* intorni di zero, per ogni n devono esistere un insieme finito I_n in $\mathbb{X}$ e $\varepsilon_n > 0$ tali che $U_{I_n}(\varepsilon_n) \subset B_n$. Sia $I := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e sia $X_1 := \left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ x_i \in I\right\}$. Se dimostriamo che $\overline{X_1} = \mathbb{X}$ dimostriamo che $\mathbb{X}$ è separabile. Supponiamo per assurdo che ci sia un $x_0 \notin \overline{X_1}$. Allora per Hahn-Banach troveremmo $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $\sup_{\overline{X_1}} \varphi < \varphi(x_0)$. Dato che $\overline{X_1}$ è lineare ne segue $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \overline{X_1}$ e $\varphi(x_0) > 0$. In particolare $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in I$ da cui $\varphi \in U_{I_n}(\varepsilon_n) \subset B_n$ per ogni n. Ma allora ne seguirebbe $\varphi = 0$ in contrasto con il fatto che $\varphi(x_0) \neq 0$. □

2.6.15 Definizione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Consideriamo in $\mathbb{X}^*$ la topologia forte e definiamo $\mathbb{X}^{**} := (\mathbb{X}^*)^*$. Possiamo considerare l'applicazione $J = J_X : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^{**}$ definita da $(Jx)(\varphi) := \varphi(x)$. È chiaro che J è ben definita dato che J è lineare in x e che $\varphi \mapsto \varphi(x)$ è continua per l'osservazione (2.4.5).

2.6.16 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ localmente convesso. Allora J è iniettivo. Se $\mathbb{X}$ è normato allora J è un'isometria, dunque è continua e $J(\mathbb{X})$ è chiuso in $\mathbb{X}^{**}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{X}$ e supponiamo che $Jx = 0$. Dico che $x = 0$. Se così non fosse, per Hahn Banach troverei $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tale che $\varphi(x) = 1$. Ma allora $(Jx)(\varphi) = \varphi(x) = 1$ e quindi $Jx \neq 0$. Se $\mathbb{X}$ è normato, usando la (2.5.8) si trova $\varphi \in \mathbb{X}^*$ con $\|\varphi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$ e $\varphi(x) = \|x\|_X$: ne segue che $\|Jx\|_{\mathbb{X}^{**}} = \|x\|_X$. □

2.6.17 Lemma. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato e sia $\mathscr{B} := \{x \in \mathbb{X} : \|x\|_X \le 1\}$. Allora $J(\mathscr{B})$ è denso in $\mathscr{B}^{**} := \{x^{**} \in \mathbb{X}^{**} : \|x^{**}\|_{\mathbb{X}^{**}} \le 1\}$, nella topologia w^*.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esista $x_0^{**} \in \mathscr{B}^{**}$ tale che $x_0^{**} \notin \overline{J(\mathscr{B})}^*$. Dunque esiste un intorno U^{**} di zero in $(\mathbb{X}^{**}, w^*)$ tale che $(x_0^{**} + U^{**}) \cap \overline{J(\mathscr{B})}^* = \emptyset$. Per la caratterizzazione della w^* vista in (2.6.4) esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ in $\mathbb{X}^*$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $\left(x_0^{**} + \bigcap_{i=1}^{k} \{x^{**} \in \mathbb{X}^{**} : |x^{**}(\varphi_i)| < \varepsilon\}\right) \cap J(\mathscr{B}) = \emptyset$. Questo equivale a dire che:

$$\forall x \in \mathscr{B} \quad \exists i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{tale che } (\varphi_i(x) - x_0^{**}(\varphi_i)) \notin]-\varepsilon, \varepsilon[. \tag{2.8}$$

Se definiamo:

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_0 := \begin{pmatrix} x_0^{**}(\varphi_1) \\ \vdots \\ x_0^{**}(\varphi_k) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} := \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : |v_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\right\}$$

la (2.8) equivale a dire che i due convessi $\Phi(\mathscr{B})$ e $\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}$ non si intersecano. Applicando Hahn-Banach troviamo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ tale che:

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i(x) < \sum_{i=1}^{k} \xi_i (x_0^{**}(\varphi_i) + v_i) \qquad \forall x \in \mathscr{B},\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}.$$

Se allora $\delta := \max_{\mathbf{v} \in \overline{\mathbf{K}}} \sum_{i=1}^{k} \xi_i v_i$ ($\delta > 0$), si ricava:

$$\sup_{x \in \mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \xi_i x_0^{**}(\varphi_i) - \delta = x_0^{**}\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i\right) - \delta.$$

Ma questo è assurdo perché da $\|x_0^{**}\|_{\mathbb{X}^{**}} \leq 1$ si ottiene:

$$x_0^{**}\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i\right) \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i\right\|_{\mathbb{X}^*} = \sup_{x \in \mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i(x).$$

□

2.6.18 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach. Allora $\mathbb{X}^*$ è separabile se e solo se $(\mathscr{B}, w)$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione di "⇒" è analoga a quella fatta per il Teorema (2.6.14). Si prende infatti una successione (φ_n) densa (fortemente) in $\mathscr{B}^*$ e si definisce su $\mathscr{B}$ la distanza:

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\varphi_n(x - y)| \qquad \text{per ogni } x,\ y \text{ in } \mathscr{B}.$$

Ragionando come nella dimostrazione di (2.6.14) (scambiando i ruoli di $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}^*$) si dimostra che $(\mathscr{B}, d)$ coincide con $(\mathscr{B}, w)$.

Per quanto riguarda la dimostrazione di "⇐", la cosa è un po' più complicata. Supponiamo che $(\mathscr{B}, w)$ sia metrizzabile. Allora esiste una base numerabile di intorni di zero che indichiamo con $(U_n)_n$. Per la caratterizzazione di w possiamo supporre che

$$U_n = \bigcap_{\varphi \in I_n} \{x \in \mathscr{B} :\ |\varphi(x)| < \varepsilon_n\}$$

dove I_n è un sottoinsieme finito di X^* e $\varepsilon_n > 0$. Sia

$$\tilde{\mathbb{X}} := \overline{\operatorname{span}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\varphi \in I_n} \varphi\right) \subset \mathbb{X}^* \qquad \text{(chiusura forte)}.$$

Per costruzione $\tilde{\mathbb{X}}$ è separabile. Dico che $\tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$. Se non fosse vero troverei $\varphi_0 \in \mathbb{X}^* \setminus \tilde{\mathbb{X}}$. Per (2.5.11) ($\tilde{\mathbb{X}}$ è chiuso) esisterebbe x_0^{**} in $\mathbb{X}^{**}$ tale che:

$$x_0^{**}(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathbb{X}} \quad , \quad \delta := x_0^{**}(\varphi_0) > 0 \quad , \quad \|x_0^{**}\|_{X^{**}} = 1.$$

Sia $U_0 := \{x \in \mathscr{B} \colon |\varphi_0(x)| < \delta/2\}$. Dato che U_0 è un w-intorno di zero deve esistere n tale che $U_n \subset U_0$. Consideriamo:

$$U_n^{**} := \bigcap_{\varphi \in I_n} \{x^{**} \in \mathbb{X}^* * : |x^{**}(\varphi)| < \varepsilon_n\} \quad , \quad U_0^{**} := \{x^{**} \in \mathbb{X}^* * : |x^{**}(\varphi_0)| < \delta/2\}.$$

Gli U_n^{**} e U_0^{**} sono intorni di zero in $\mathbb{X}^{**}$. Dato che $x_0^{**} \in \mathscr{B}^{**}$, per il Lemma (2.6.17), deve esistere $x_0 \in \mathscr{B}$ tale che $J(x_0) \in x_0^{**} + U_n^{**} \cap U_0^{**}$. Ne segue:

$$\forall \varphi \in I_n \quad |\varphi(x_0)| = |(J(x_0) - x_0^{**})(\varphi)| < \varepsilon_n \quad , \quad |\varphi_0(x_0) - \delta| = |\varphi_0(x_0) - x_0^{**}(\varphi_0)| < \delta/2.$$

La prima disuguaglianza ci dice che $x_0 \in U_n$, dalla seconda segue $|\varphi_0(x_0)| > \delta/2$. Dunque $x_0 \in U_n \setminus U_0$, ma questo è assurdo, dato che $U_0 \subset U_n$. Dunque $\tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{X}^*$ da cui $\mathbb{X}^*$ è separabile. $\square$

2.6.19 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ normato e sia $\mathbb{X}^*$ separabile. Sia $E \subset \mathbb{X}$ un insieme limitato. Allora E è debolmente chiuso se e solo se M è sequenzialmente chiuso (cioè se contiene tutti i limiti deboli di successioni di suoi punti).*

2.6.20 Definizione. Dico che $\mathbb{X}$ è *riflessivo* se l'applicazione $J : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^{**}$ è un isomorfismo. Se $\mathbb{X}$ è normato questo equivale a chiedere che J sia surgettiva, dato che il resto segue dal fatto che J è un'isometria. Notiamo che uno spazio normato riflessivo è automaticamente di Banach dato che $\mathbb{X} \simeq (\mathbb{X}^*)^*$ e che il duale di uno spazio normato è automaticamente completo.

2.6.21 Osservazione. Se $\mathbb{X}$ è riflessivo allora $(\mathbb{X}^*, w)$ coincide con $(\mathbb{X}^*, w^*)$. Inoltre se $\mathbb{X}$ è riflessivo anche $\mathbb{X}^*$ è riflessivo. Per dimostrare questa ultima proprietà prendiamo $x^{***} \in \mathbb{X}^{***}$ e definiamo $\varphi(x) := x^{***}(J_X x)$; non è difficile vedere che $\varphi \in \mathbb{X}^*$. Dico che $x^{***} = J_{\mathbb{X}^*}\varphi$: in effetti preso $x^{**} \in \mathbb{X}^{**}$ esiste unico $x \in \mathbb{X}$ tale che $x^{**} = J_X x$ e allora $x^{***}x^{**} = x^{***}(J_X x) = \varphi(x) = J_X x(\varphi) = x^{**}(\varphi) = J_{\mathbb{X}^*}\varphi$. Questo prova che $J_{\mathbb{X}^*}$ è surgettiva e conclude la dimostrazione nel caso $\mathbb{X}$ normato. Tralasciamo la dimostrazione nel caso generale.

2.6.22 Teorema (Kakutani)**.** *Sia $\mathbb{X}$ normato. Allora $\mathbb{X}$ è riflessivo se e solo se $\mathscr{B} := \{x \in \mathbb{X} \colon \|x\| \leq 1\}$ è compatta in $(\mathbb{X}, w)$.*

Dimostrazione. Applicando il Teorema di Banach–Alaoglu ottiene che $\mathscr{B}^{**}$ è compatta rispetto alla topologia $w^*_{\mathbb{X}^{**}}$ di $\mathbb{X}^{**}$. Dato che $\mathbb{X}$ è riflessivo (e quindi anche $\mathbb{X}^*$ lo è) $w_{\mathbb{X}^{**}}$ e $w^*_{\mathbb{X}^*{}_*}$ coincidono e J_X è un isomorfismo tra gli spazi $(\mathbb{X}, w_X)$ e $(\mathbb{X}^{**}, w_{\mathbb{X}^{**}})$. Ne segue che $\mathscr{B} = J^{-1}(\mathscr{B}^{**})$ è w-compatta in $\mathbb{X}$.

Viceversa supponiamo che $\mathscr{B}$ sia w_X-compatta. Per l'Osservazione (2.6.8) ne segue che $J_X(\mathscr{B})$ è $w^*_{\mathbb{X}^{**}}$-compatta. Dato che $\mathbb{X}^{**}$ è di Hausdorff, $J_X(\mathscr{B})$ deve essere chiusa in $(\mathbb{X}^{**}, w^*_{\mathbb{X}^{**}})$. Ma per il Lemma (2.6.17) $J_X(\mathscr{B})$ è $w^*_{\mathbb{X}^{**}}$-densa in $\mathscr{B}^{**}$ e quindi $J_X(\mathscr{B}) = \mathscr{B}^{**}$ che equivale alla riflessività di $\mathbb{X}$. $\square$

2.6.23 Teorema (Eberlein-Smulyan)**.** *Sia $\mathbb{X}$ un Banach. Allora $(\mathscr{B}, w)$ è compatta se e solo se $(\mathscr{B}, w)$ è sequenzialmente compatta se e solo se $(\mathscr{B}, w)$ è numerabilmente compatta.*

2.6.24 Osservazione. Ricordiamo che uno spazio topologico $(\mathbb{X}, \tau)$ si dice numerabilmente compatto se da ogni ricoprimento numerabile di aperti di $\mathbb{X}$ si può estrarre un ricoprimento finito. Questa proprietà equivale a chiedere che ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{X}$ (o ogni successione in $\mathbb{X}$) ha un punto di accumulazione in $\mathbb{X}$. Si vede facilmente che:

$(\mathbb{X}, \tau)$ compatto $\Rightarrow (\mathbb{X}, \tau)$ numerabilmente compatto $\Leftarrow (\mathbb{X}, \tau)$ sequenzialmente compatto

Ricordiamo anche che se $f : (\mathbb{X}, \tau) \to (\mathbb{X}_1, \tau_1)$ è continua, allora $(\mathbb{X},\tau)$ compatto (sequenzialmente/numerabilmente) implica $f(\mathbb{X}_1)$ compatto (sequenzialmente/numerabilmente).

Per la dimostrazione di (2.6.23) premettiamo alcuni risultati, seguendo le ideee di `http://users.mat.unimi.it/users/libor/Varie/eberlein.pdf`)

2.6.25 Definizione (proprietà del doppio limite)**.** Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato e siano $A \subset \mathbb{X}$, $B \subset \mathbb{X}^*$. Dico che vale la proprietà $\Delta(A, B)$ se per ogni coppia di successioni (x_n) in A e (φ_n) in B tali che esistanto i limiti (in $[-\infty, +\infty]$)

$$l_1 := \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \varphi_n(x_m) \quad , \quad l_2 := \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_m),$$

allora $l_1 = l_2$.

2.6.26 Osservazione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato. Siano $A \subset \mathbb{X}$ con (A, w) relativamente numerabilmente compatto e $B \subset \mathbb{X}^*$ limitato. Allora vale $\Delta(A, B)$.

Dimostrazione. Siano (x_n) in A e (φ_n) in B per cui esistono i limiti l_1 e l_2 della Definizione (2.6.25). Dato che (A, w) è numerabilmente compatto posso supporre che (x_n) abbia un punto di accumulazione x_0, nella topologia w. Dato che B è limitato, allora (B, w^*) è relativamente compatto, dunque numerabilmente compatto e posso dunque supporre che (φ_n) abbia un punto di accumulazione φ_0 in w^*. Se $n \in \mathbb{N}$ si ricava che $\varphi_n(x_0)$ è di accumulazione per $(\varphi_n(x_m))_m$, e dato che siamo in $\mathbb{R}$ esiste una estratta $(\varphi_n(x_{m_k}))_k$ tale che $\varphi_n(x_{m_k}) \to \varphi_n(x_0)$. Con lo stesso ragionamento si trova una successione $(ph_{n_h}(x_0))_h$ tale che $(\varphi_{n_h}(x_0) \to \varphi_0(x_0)$. Dunque $l_1 = \varphi_0(x_0)$. Scambiando l'ordine tra le φ_n e le x_m si perviene a $l_2 = \varphi_0(x_0)$, da cui $l1 = l_2$. $\square$

2.6.27 Lemma. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato e siano A un sottospazio lineare di $\mathbb{X}$, B un sottoinsieme di $\mathbb{X}^*$ tali che valga la proprietà $\Delta(A, B)$. Indichiamo con A_1 la chiusura di A rispetto a $\sigma(\mathbb{X}, B)$ e con B_1 la chiusura di B in $(X^*, \sigma(\mathbb{X}^*, J(A)))$.*

(a) *Sia (x_n) un successione in A e sia $x_0 \in A$. Allora*

$$x_n \to x_0 \text{ in } \sigma(A, B) \quad \Rightarrow \quad x_n \to x_0 \text{ in } \sigma(A, B_1).$$

(b) *Sia $x_0 \in A_1$. Allora esiste una successione (x_n) in A tale che:*

$$x_n \to x_0 \text{ in } \sigma(\mathbb{X}, B_1)$$

Dimostrazione. Notiamo che, per la l'Osservazione (2.6.7), $x_n \to x_0$ in $\sigma(A, B)$ (resp. in $\sigma(A, B_1)$) se e solo se

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x_0) \qquad \forall\varphi \in B \qquad \text{(resp. } \forall\varphi \in B_1) .$$

Dimostriamo (a) Siano (x_n) e x_0 come in ipotesi e sia $\tilde{\varphi}$ in B_1. Consideriamo l'insieme $\tilde{A} := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$. Allora $J(\tilde{A}) \subset J(A)$ e quindi $\tilde{\varphi}$ è nella chiusura di B rispetto a $\tau_{\tilde{A}} = \sigma(\mathbb{X}^*, J(\tilde{A}))$. Dato che $\tilde{A}$ è numerabile $\tau_{\tilde{A}}$ è pseudometrizzabile e quindi esiste una successione (φ_m) in B tale che $\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\tilde{A}}} \tilde{\varphi}$ (vedi l'Osservazione (2.3.9)). Sempre per la (2.6.7), si ha che $\varphi_m(x) \xrightarrow{m\to\infty} \tilde{\varphi}(x)$ per ogni $x \in \tilde{A}$. Dato che $x_n \to x_0$ in $\sigma(A,B)$, allora:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_m(x_n) = \lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0) = \tilde{\varphi}(x_0).$$

Sia ora (x_{n_k}) una qualunque estratta di (x_n) per cui $(\tilde{\varphi}(x_{n_k}))$ ammetta limite l. Allora

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}\tilde{\varphi}(x_{n_k}) = l.$$

Dunque per la proprietà $(\Delta(A,B)$ si ha $l = \tilde{\varphi}(x_0)$; per l'arbitrarietà di (n_k) si ricava $\tilde{\varphi}(x_n) \to \tilde{\varphi}(x_0)$.

Dimostriamo (b) Costruiamo (x_n) mediante un procdimento ricorsivo. Per $n=1$ definiamo $Y_1 := \mathrm{span}(x_0)$, $W_1 := \{\varphi|_{Y_1} : \varphi \in B\}$. Dato che $\mathrm{span}(W_1)$ è uno spazio di dimensione uno (o zero) possiamo trovare una successione $(\varphi_{1,k})_k$ in B tale che $(\varphi_{1,k}|_{Y_1})_{k\in\mathbb{N}}$ sia densa in W_1. Prendiamo allora $x_1 \in A$ tale che $|\varphi_{1,1}(x_1 - x_0)| < 1$ (lo possiamo fare perché x_0 è nella chiusura di A in $\sigma(\mathbb{X}, B)$).

Se sono stati definiti $x_1, \ldots, x_{n-1}$ definiamo $Y_n := \mathrm{span}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ e $W_n := \{\varphi|_{Y_n} : \varphi \in B\}$. W_n è contenuto in Y_n^* che ha, al più, dimensione n. Dunque possiamo trovare una successione $(\varphi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in B tale che $(\varphi_{n,k}|_{Y_n})_{k\in\mathbb{N}}$ sia densa in W_n (per esempio rispetto alla norma forte in Y_n^*, che ha dimensione finita). Scegliamo allora $x_n \in A$ in modo che:

$$|\varphi_{m,k}(x_n - x_0)| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall m,k \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq m,k \leq n$$

(sempre perché $x \in A_1$). Consideriamo:

$$\tilde{B} := \{\varphi_{n,k} : n,k \in \mathbb{N}\} \subset B \quad , \quad Y := \mathrm{span}(x_n : n \in \mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

$$\tilde{W} := \left\{\varphi|_Y : \varphi \in \tilde{B}\right\} \quad , \quad W := \{\varphi|_Y : \varphi \in B\}.$$

È chiaro che vale $\Delta(A \cap Y, \tilde{W})$. Dico che $\tilde{W}$ è denso in W nella $\sigma(Y^*, J(Y))$. Infatti sia $\varphi \in W$ e sia U un intorno di φ in $\sigma(Y^*, J(Y))$. Allora esistono $y_1, \ldots, y_h$ in Y ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$U_{y_1,\ldots,y_h}(\varepsilon) := \{\varphi' \in B : |\varphi'(y_i) - \varphi(y_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, h\} \subset U.$$

Per definizione di Y si ha che esiste n per cui $y_i \in Y_n$, $i = 1, \ldots, h$. Per costruzione esiste k tale che $\|\varphi_{n,k}|_{Y_n} - \varphi|_{Y_n}\| < \varepsilon$. Ma questo implica $\varphi_{n,k}|_{Y_n} \in U_{y_1,\ldots,y_h}(\varepsilon) \subset U$. Per costruzione si ha che $\varphi_{n,k}(x_m) \xrightarrow{m\to\infty} \varphi(x_0)$, dunque $x_n \to x_0$ in $\sigma(Y, J(\tilde{W}))$. Ma allora per al parte ((a)) si ha $x_n \to x_0$ in $\sigma(Y, J(W)$, che è lo stesso che dire $x_n \to x_0$ in $\sigma(X, J(B)$. Di nuovo per (a) si ha $x_n \to x_0$ in $\sigma(X, J(B_1)$. □

Nel seguito indichiamo $J^* := J_{\mathbb{X}^*}$.

2.6.28 Corollario. *Sia $\mathbb{X}$ normato e sia $\mathscr{A} \subset \mathbb{X}$ tale che valga $\Delta(\mathscr{A}, \mathscr{B}^*)$. Indichiamo con $\mathscr{A}_1^{**}$ la chiusura di $J(\mathscr{A})$ in $(\mathbb{X}^{**}, w^*) = (\mathbb{X}^{**}, \sigma(\mathbb{X}^{**}, J^*(\mathbb{X}^*)))$. Allora per ogni punto x^{**} di $\mathscr{A}_1^{**}$ esiste una successione (x_n) in $\mathscr{A}$ tale che $J(x_n) \to x^{**}$ in $\sigma(\mathbb{X}^{**}, \mathscr{B}^{***})$. Se inoltre $\mathbb{X}$ è un Banach, allora $\mathscr{A}_1^{**} \subset J(\mathbb{X})$. Ne segue che la w-chiusura sequenziale di $J(\mathscr{A})$ e la w-chiusura di $J(\mathscr{A})$ coincidono con la w^*-chiusura di $J(A)$, dato che (con le ovvie notazioni):*

$$\overline{J(A)}^{w^*} \subset \overline{J(A)}^{seq-w} \subset \overline{J(A)}^{w} \subset \overline{J(A)}^{w^*}. \qquad ???$$

Dimostrazione. Poniamo $A = \mathscr{A}^{**} := J(\mathscr{A}) \subset \mathbb{X}^{**}$ e $B = J^*(\mathscr{B}^*) \subset \mathbb{X}^{***}$. È evidente che vale $\Delta(A, B)$ e quindi possiamo applicare il Lemma (2.6.27) parte (b) e ottenere la prima affermazione. Per questo bisogna osservare che $\mathscr{A}_1^{**}$ coincide con la chiusura di $J(\mathscr{A})$ in $\sigma(\mathbb{X}^{**}, J^*(\mathscr{B}^*))$ e che la chiusura di $J^*(\mathscr{B}^*)$ in $\sigma(\mathbb{X}^{***}, w^*)$ coincide con $\mathscr{B}^{***}$ (Lemma (2.6.17) in $\mathbb{X}^*$). Per la seconda parte basta notare che, se $\mathbb{X}$ è un Banach, allora $J(\mathbb{X})$ è chiuso in $\mathbb{X}^{**}$ e dunque è chiuso in $(\mathbb{X}^{**}, w)$. □

Dimostrazione di Eberlein-Smulyan. Dimostriamo le parti non banali delle equivalenze.

(i) Supponiamo che $\mathscr{A}$ sia relativamente numerabilmente compatto. Allora, per l'Osservazione (2.6.26), vale $\Delta(\mathscr{A}, \mathscr{B}^*)$. Inoltre $\mathscr{A}$ è limitato in $\mathbb{X}$. Infatti data φ in $\mathbb{X}^*$ e sia (x_n) in $\mathscr{A}$ tale che $\varphi(x_n) \to \sup \varphi(\mathscr{A})$; allora $x_n)$ ha un punto di accumulazione x_0 da cui $\varphi(x_0)$ è punto di accumulazione per $(\varphi(x_n)$. Necessariamente $\varphi(x_0) = \sup \varphi(A) \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di Banach-Steinhaus $\mathscr{A}$ è limitato.

(ii) Supponiamo che $\mathscr{A}$ sia limitato e che valga $\Delta(\mathscr{A}, \mathscr{B}^*)$. Dico che $\overline{\mathscr{A}}^w$ è compatto in $(\mathbb{X}, w)$. Per vederlo poniamo $\mathscr{A}_1^{**} := \overline{J(\mathscr{A})}^{w^*}$. Allora $\mathscr{A}_1^{**}$ è limitato (J è un'isometria) dunque è compatto in $(\mathbb{X}^{**}, w^*)$ (per (2.6.10)). Dato che w è una topologia più fine di w^* allora $\mathscr{A}_1^{**}$ è compatto in $(\mathbb{X}^{**}, w)$. Ma per il Corollario (2.6.28) $\mathscr{A}_1^{**} \subset J(\mathbb{X})$ e dunque posso considerare $\mathscr{A}_1 := J^{-1}(\mathscr{A}_1^{**})$, che è compatto in $\mathbb{X}$ dato che $J^{-1} : J(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ è continua da $J(\mathbb{X})$ in $\mathbb{X}$, e dunque è continua da $(J(\mathbb{X}), w)$ in $(\mathbb{X}, w)$ (per la (2.6.8)). È ovvio che $\overline{\mathscr{A}}^w \subset \mathscr{A}_1$ e quindi $\overline{\mathscr{A}}^w$ è compatto.

(iii) Supponiamo che $\mathscr{A}_1 := \overline{\mathscr{A}}^w$ sia numerabilmente compatto. Dico che $\mathscr{A}_1$ è sequenzialmente compatto in $(\mathbb{X}, w)$. Dalla (ii) e dall'Osservazione (2.6.26) si ricava che vale $\Delta(\mathscr{A}_1, \mathscr{B}^*)$. Sia (x_n) una successione in $\mathscr{A}_1$; allora esiste un punto $x_0 \in \mathscr{A}_1$ di accumulazione per (x_n) (in $\sigma(\mathbb{X}, w)$). Sia $Y := \operatorname{span}(x_0, x_2, x_2, \dots)$. Lo spazio $(\mathscr{B}^* \cap Y^*, w^*) = (\mathscr{B}^* \cap Y^*, \sigma(Y^*, J^*(Y)))$ è compatto (per (2.6.10) e metrizzabile (la topologia è generata da una famiglia numerabile di seminorme, è di Hausdorff per la (2.6.6)). Dunque $(\mathscr{B}^* \cap Y^*, w^*)$ è separabile: sia allora $\tilde{\mathscr{B}}^* \subset \mathscr{B}^* \cap Y$ numerabile e denso in $\mathscr{B}^* \cap Y^*$ rispetto a $\sigma(Y^*, J^*(Y))$. Allora $(\mathscr{A}_1 \cap Y, \sigma(Y, \tilde{\mathcal{B}}^*))$ è metrizzabile per (2.3.7) (Hausdorff segue dal fatto che $\mathbb{X}$ è di Banach). Dunque esiste una successione estratta (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x_0$ in $\sigma(Y, \tilde{\mathcal{B}}^*)$. Per il Lemma (2.6.27) parte (a) si ha che $x_{n_k} \to x_0$ in $\sigma(Y, \mathcal{B}^*)$, e dunque anche in $\sigma(\mathbb{X}, w)$. □

CHECK

2.7 Alcuni esempi

Tutti gli esempi mostrati nel seguito considerano funzioni di una variabile fissando $I =]a, b[$ intervallo in $\mathbb{R}$. Nel seguito useremo anche gli intervalli $I_n := \left]a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right[$ che hanno le proprietà $I_n \subset I_{n+1} \subset \overline{I_{n+1}} \subset I$, e $I = \bigcup_{n \geq 0} \overline{I_n}$ (conveniamo che $I_0 = \emptyset$).

Si potrebbe facilmente considerare funzioni di più variabili sostituendo all'intervallo I un generico aperto limitato di $\mathbb{R}^N$.

2.7.1 Esempio. Lo spazio

$$\mathcal{C}^0(\bar{I}) := \left\{ f : \bar{I} \to \mathbb{R},\ f \text{ continua} \right\}$$

è di Banach rispetto alla norma:

$$\|f\| = \|f\|_{\infty, \bar{I}} := \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Più in generale, per m intero, lo spazio

$$\mathcal{C}^m(\bar{I}) := \left\{f : I \to \mathbb{R} \colon \ \forall i \leq m \ \exists \ f^{(i)} : I \to \mathbb{R}, \ \text{prolungabile con continuità a } \bar{I}\right\}$$

è uno spazio di Banach rispetto alla norma:

$$\|f\| = \|f\|_{\mathcal{C}^m(\bar{I})} := \sum_{i=0,\ldots,m} \max_{x\in\bar{I}} |f^{(i)}(x)| = \sum_{i=1}^{m} \left\|f^{(i)}\right\|_{\infty,\bar{I}} .$$

2.7.2 Esempio. Poniamo $\mathcal{C}_0^0(I) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ continua }, f(x) = 0 \text{ se } x \notin I\}$, o più in generale

$$\mathcal{C}_0^m(I) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabile } m \text{ volte, } f(x) = 0 \text{ se } x \notin I\} .$$

Allora $\mathcal{C}_0^m(I)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^m(\bar{I})$ (identificando ogni f con la sua restrizione a $\bar{I}$, che dunque ha tutte le derivate nulle gli estremi di I), quindi è uno spazio di Banach rispetto alla norma di $\mathcal{C}^m(I)$.
In realtà si può anche dimostrare che su una norma equivalente su $C_0^m([0,1])$ è la sola $\|f^{(m)}\|_{\infty,\bar{I}}$. Per questo basta utilizzare la disuguaglianza:

$$\|f\|_{\infty,\bar{I}} \leq \|f'\|_{\infty,\bar{I}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}^1(\bar{I}) \cap \mathcal{C}_0^0(I)$$

che segue da:

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(\xi)\, d\xi\right| \leq \int_a^b |f'(\xi)|\, d\xi \leq \|f'\|_{\mathcal{C}^0(\bar{I})} \qquad \forall x \in \bar{I}.$$

Questa disuguaglianza mostra che $\|f'\|_{\infty,\bar{I}}$ è una norma in $\mathcal{C}^1(\bar{I}) \cap \mathcal{C}_0^0(I)$ e più in generale (iterando) che $\|f^m\|_{\infty,\bar{I}}$ è una norma su $\mathcal{C}^m(\bar{I}) \cap \mathcal{C}_0^{m-1}(I) \supset \mathcal{C}_0^m(I)$.

2.7.3 Esempio. Lo spazio $\mathcal{C}^m(I) := \{f : I \to \mathbb{R}, \ f \text{ derivabile } m \text{ volte in } I\}$ è di Fréchet rispetto alla famiglia di seminorme:

$$p_{n,i}(f) := \left\|f^{(i)}\right\|_{\infty,\bar{I}_n} \qquad n \in \mathbb{N}, \ i \leq m.$$

Questo spazio è di Hausdorff perché $p_{n,0}(f) = 0$ per ogni n implica $f \equiv 0$. Dato che $(p_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N},i\leq m}$ è numerabile, $\mathcal{C}^m(I)$ è metrizzabile. In questo spazio la convergenza di una successione $(f_k)_k$ a zero equivale a $f_k^{(i)} \to 0$, per $k \to \infty$, uniformemente su ogni $\bar{I}_n$, per $i = 0, \ldots, m$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente $C^\infty(I) := \{f : I \to \mathbb{R}, \ f \text{ derivabile infinite volte in } I\}$ è uno spazio di Fréchet rispetto alla famiglia di seminorme $(p_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ ed è metrizzabile.

2.7.4 Esempio. Lo spazio $\mathcal{C}_0^\infty(I) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \colon f(x) = 0 \text{ se } x \notin I\}$ è uno spazio di Fréchet rispetto alla famiglia di seminorme $(\|\cdot\|_{\mathcal{C}^m(\bar{I})})_{m\in\mathbb{N}}$. Questo spazio è metrizzabile e può essere visto come sottospazio chiuso di $C^\infty(I)$. Notiamo che una successione $(f_n)_n$ in $C_0^\infty(I)$ tende a zero se e solo se per ogni m $f_n^{(m)} \to 0$ uniformemente su $\bar{I}$.

Ricordiamo che data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ il supporto di f, che si indica con $\operatorname{spt}(f)$, è la chiusura (in A) di $\{x \in A \colon f(x) \neq 0\}$.

2.7.5 Esempio. Consideriamo $\mathcal{C}_c^m(I) := \{f \in \mathcal{C}_0^m(I) \colon \operatorname{spt}(f) \text{ è compatto}\}$. È chiaro che $\mathcal{C}_c^m(I)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}_0^m(I)$ e che, per ogni K compatto contenuto in I lo spazio $C_0^m(K)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}_c^m(I)$. Vorremmo introdurre una topologia τ su $\mathcal{C}_c^m(I)$ che renda continue (come appare naturale) le immersioni $i_K : C_0^m(K) \to \mathcal{C}_c^m(I)$, per ogni compatto $K \subset I$, e $j : \mathcal{C}_c^m(I) \to \mathcal{C}_0^m(I)$.

Consideriamo il caso $m = 0$. Ci concentriamo su come rendere continue le i_K, vedremo che la continuità di j sarà una conseguenza. Indicheremo con $\bar{\tau}$ la topologia più fine (la massima topologia) localmente convessa in $\mathcal{C}_c^0(I)$che rende continue tutte le immersioni $i_n := i_{\bar{I}_n}$. È facile vedere che in $\bar{\tau}$ sono anche continue le i_K per qualunque compatto $K \subset I$, dato che ogni tale K è definitivamente contenuto in $\bar{I}_n$.

Sia $c_0^+ := \{\sigma : \mathbb{N} \to]0, +\infty[: \sigma_n \to 0\}$. Se $\sigma \in c_0^+$ definiamo $p_\sigma : \mathcal{C}_c^0(I) \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$p_\sigma(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\|_{\infty, \bar{I} \setminus I_n}}{\sigma_n} \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(I).$$

Notiamo che data $f \in \mathcal{C}_c^0(I)$ esiste $\bar{n}$ tale che $f = 0$ su $\mathbb{R} \setminus I_{\bar{n}}$ e quindi tutti gli addendi con $n \geq \bar{n} + 1$ nella serie sopra sono nulli, dunque $p_\sigma(f) < +\infty$. È facile vedere che p_σ è una seminorma (anzi una norma dato che $p_\sigma(f) \geq \frac{1}{\sigma_0}\|f\|_{\infty,\bar{I}}$. Dico che la topologia $\bar{\tau}$ coincide con la topologia τ' indotta su $\mathcal{C}_c^0(I)$ dalle seminorme $(p_\sigma)_{\sigma \in c_0^+}$.

Dimostriamo che $\tau' \subset \bar{\tau}$ facendo vedere che ogni i_n è continua da $\mathcal{C}_0^0(I_n)$ in $(\mathcal{C}_c^0(I), \tau')$. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in c_0^+$ e poniamo $\nu := \min\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$. Allora per ogni $f \in \mathcal{C}_0^0(I_n)$ si ha:

$$p_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f\|_{\infty, \bar{I} \setminus I_k}}{\sigma_k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f\|_{\infty, \bar{I} \setminus I_k}}{\nu} \leq \frac{n+1}{\nu} \|f\|_{\infty, \bar{I}_n}.$$

Ne segue la continuità di i_n per la proposizione (2.4.9). Dimostriamo che $\bar{\tau} \subset \tau'$. Dato che $\bar{\tau}$ è localmente convessa possiamo supporre che sia generata da una famiglia $(\bar{p}_i)_{i \in \mathscr{I}}$ di seminorme. Dato che i_n è continua da $\mathcal{C}_0^0(I_n)$ in $(\mathcal{C}_c^0(I), \bar{\tau})$, ricaviamo dalla (2.4.9) che per ogni $i \in \mathscr{I}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $K_{i,n}$ tale che

$$\bar{p}_i(f) \leq K_{i,n} \|f\|_\infty \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(I_n).$$

È chiaro che possiamo supporre $K_{i,n} \geq n$ e porre $\sigma_{i,n} := \dfrac{1}{K_{i,n+2}}$, di modo che $\sigma_i \in c_0^+$. Sia inoltre $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una partizione dell'unità associata agli insiemi $I_{n+2} \setminus \bar{I}_n$. Si ha:

$$\bar{p}_i(f) = p_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k f\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_i(\theta_k f) \leq \sum_{k=0}^{\infty} K_{i,k+2} \|f\|_{\infty, \bar{I}_{k+2} \setminus I_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f\|_{\infty, \bar{I} \setminus I_k}}{\sigma_{i,k}} = p_{\sigma_i}(f).$$

La disuguaglianza sopra dice, a causa della (2.4.9), che l'identità da $(\mathcal{C}_c^0(I), \tau')$ in $\mathcal{C}_c^0(I), \bar{\tau})$ è continua e cioè $\bar{\tau} \subset \tau'$.

Vediamo che non è possibile trovare una base di intorni numerabile per $\bar{\tau}$. Se così fosse potremmo trovare una successione (σ_n) in c_0^+ tale che le corrispondenti $p_n := p_{\sigma_n}$ genererebbero $\bar{\tau}$. Dato che in questo modo l'identità da $(\mathcal{C}_c^0(I), (p_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a $(\mathcal{C}_c^0(I), (p_\sigma)_{\sigma \in c_0^+})$ risulterebbe continua, se ne ricaverebbe:

$$\forall \sigma \in c_0^+ \ \exists K_\sigma > 0 \ \exists I_\sigma \subset \mathbb{N} \text{ con } \# I_\sigma < +\infty \text{ t.c.} \qquad p_\sigma(f) \leq K_\sigma \max_{n \in I_\sigma} p_n(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(I). \tag{2.9}$$

Poniamo $\sigma_n := \dfrac{1}{(n+1)^2} \min\{\sigma_{k,n} : 0 \leq k \leq n\}$. Allora $\sigma \in c_0^+$ e preso $I \subset \mathbb{N}$ finito si ha:

$$\frac{\sigma_n^{-1}}{(n+1)\max\left\{\sigma_{k,n}^{-1} : k \in I\right\}} = (n+1)\frac{\min\{\sigma_{k,n} : k \in I\}}{\min\{\sigma_{k,n} : 0 \leq k \leq n\}} \to \infty \text{ per } n \to \infty$$

e questo rende impossibile la (2.9), prendendo $f = f_n \in \mathcal{C}_0^0(I_{n+1})$ con $0 \leq f_n \leq 1$ e $|f_n\|_{\infty, \bar{I} \setminus I_n} = 1$.

Vediamo che $\mathcal{C}^0_c(I)$ è completo. Sia per questo $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ un net di Cauchy in $\mathcal{C}^0_c(I)$. Dico che esiste n intero tale che:

$$\forall U \text{ intorno di zero, } \forall i \in \mathcal{I}\ \exists j \geq i \text{ tale che } (f_j + U) \cap C_0(I_n) \neq \emptyset. \tag{2.10}$$

In caso contrario per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbero $i_n \in \mathcal{I}$ e U_n intorno di zero tali che:

$$\forall i \geq i_n\ (f_i + U_n) \cap C_0(I_n) = \emptyset \tag{2.11}$$

Per ogni n possiamo supporre che $U_n = U_{\sigma_n}(1)$ per una $\sigma_n \in c_0^+$. Inoltre (rimpicciolendo σ_n la (2.11) continua a valere) possiamo supporre sia $\sigma_{n,k+1} \leq \sigma_{n,k}$ che $\sigma_{n+1,k} \leq \sigma_{n,k}$, per $n, k \in \mathbb{N}$. Definiamo $\sigma_n := \dfrac{\sigma_{n,n}}{n}$. Per la (??)esistono $i_0 \in \mathcal{I}$ e $\bar\alpha > 0$ tali che

$$\forall i \geq i_0 \quad f_i \in \bar\alpha U_\sigma(1). \tag{2.12}$$

Se ora prendiamo $n > \bar\alpha$ e un $i \in \mathcal{I}$ che verifichi contemporaneamente $i \geq i_n$ e $i \geq i_0$, troviamo (per la (2.11)) $\|f_i\|_{K_m} = 0$ per $m = 1, \dots, n$, mentre per $m > n$ (a causa di (2.12)) $\|f_i\|_{K_m} < \bar\alpha\sigma_m \leq \dfrac{\bar\alpha}{m}\sigma_{m,m} \leq \sigma_{n,m}$. Dunque $f_i \in U_n$. Dato che $U_n = U_{\sigma_n}(1)$ è simmetrico anche $-f_i \in U_n$; ma allora da (2.11) segue $0 = f_i - f_i \notin C_0(I_n)$ che è assurdo.

Allora, avendo dimostrato la (2.10), per ogni $i \in I$ e U intorno di zero possiamo trovare $j_{i,U} \geq i$ e una funzione $g_{i,U} \in C_0(I_n)$ tale che $f_{j_{i,U}} - g_{i,U} \in U$. Notiamo che l'insieme $\mathcal{J} := \{(i,U)) \colon i \in \mathcal{I}, U \text{ intorno di zero}\}$ è diretto se pongo $(i_1, U_1) \preceq (i_2, U_2)$ se e solo se $i_1 \leq i_2$ e $U_2 \subset U_1$. Inoltre $(g_{i,U})_{(i,U)\in\mathcal{J}}$ è un net di Cauchy su $C_0(I_n)$. In effetti dato V intorno di zero in $C_0(I_n)$ esiste U intorno di zero in $\mathcal{C}^0_c(I)$ tale che $U \cap C_0(I_n) \subset V$ (prendendo $U = U_\sigma(1)$ con σ_k opportuna, definita ad arbitrario per $k > n$). Preso W tale che $W + W + W \subset U$ sia i_0 tale che

$$f_{i'} - f_{i''} \in W \qquad \forall i', i'' \geq i_0.$$

Allora se $i', i'' \geq i_0$ e $U', U'' \subset W$ (cioè se $(i', U') \succeq (i_0, W)$ e $(i'', U'') \succeq (i_0, W)$):

$$g_{i',U'} - g_{i'',U''} \in f_{j_{i',U'}} + U' - f_{j_{i'',U''}} - U'' \subset W + W + W \subset U.$$

Dato che $C_0(I_n)$ è completo esiste $g \in C_0(I_n)$ tale che $g_{i,U} \to g$. Non è difficile verificare (XXX) che ne segue $f_i \to g$.

2.7.6 Osservazione. Abbiamo visto che la topologia τ sopra introdotta su $\mathcal{C}^0_c(I)$ è la più fine tra quelle localmente convesse che rende continue tutte le immersioni $i_n := i_{\bar I_n}$. Da questo segue che, dato uno spazio localmente convesso $\mathbb{Y}$ e una mappa lineare $L : \mathcal{C}^0_c(I) \to \mathbb{Y}$, condizione necessaria e sufficiente affinché L sia continua è che $L_n := L \circ i_n : \mathcal{C}^0_0(I_n) \to \mathbb{Y}$ sia continua per ogni n. Che la condizione sia necessaria è evidente (composizione di continue è continua). Vediamo che è sufficiente. Se le L_n fossero tutte continue ma la L no, ci sarebbe un aperto convesso V in $\mathbb{Y}$ tale che $U := L^{-1}(V)$ non è aperto in $\mathcal{C}^0_c(I)$, mentre $i_n^{-1}(U) = L_n^{-1}(V)$ sarebbe aperto in $\mathcal{C}^0_0(I_n)$. Possiamo allora considerare la topologia τ_1 ottenuta aggiungendo alla base $\mathcal{I}_0$ di intorni di zero convessi in $\bar\tau$ la famiglia $(U' \cap U)_{U'\in\mathcal{I}_0}$. È chiaro che τ_1 è localmente convessa ed è strettamente più fine di $\bar\tau$. Se $U' \in \mathcal{I}_0$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha $i_n^{-1}(U' \cap U) = i_n^{-1}(U') \cap i_n^{-1}(U) = i^{-1}(U') \cap L_n^{-1}(V)$ è un intorno di zero in $\mathcal{C}^0_0(I_n)$. Da questo segue facilmente che ogni i_n è continua a valori in $(\mathcal{C}^0_c(I), \tau_1)$, in contrasto col fatto che $\bar\tau$ è la topologia più fine con questa proprietà.

In particolare l'immersione $j : \mathcal{C}^0_c(I) \to \mathcal{C}^0_0(I)$ è continua, dato che ogni $j \circ i_n$ è continua.

2.7.7 Esempio. Poniamo $\mathcal{C}^\infty_c(I) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(I) \colon \mathrm{spt}(f) \subset I\}$. Anche in questo caso possiamo considerare la più fine topologia l.c. $\bar\tau$ che rende continue tutte le immersioni

$i_n : \mathcal{C}_0^\infty(I_n) \to C_c^\infty(I)$. Ragionando come nell'esempio (2.7.5) si vede che $\bar{\tau}$ è generata dalle seminorme:

$$p_{\sigma,\mu}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\|_{C^{\mu_n}(I \setminus I_n)}}{\sigma_n} \qquad \sigma \in c_0^+, \mu \in M_\infty$$

al variare di $\sigma \in c_0^+$ e $\mu \in m := \{\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \mu_{n+1} > \mu_n \ \forall n\}$.

Lo spazio $C_c^\infty(I)$ viene spesso indicato con $\mathscr{D}(I)$, più brevemente con $\mathscr{D}$ se $I = \mathbb{R}$. Il duale $\mathscr{D}^*$ –tradizionalmente indicato con $\mathscr{D}'$– si chiama spazio delle *distribuzioni* su $\mathbb{R}$.

Ragionando come nell'Osservazione (2.7.6) si vede che $L : \mathscr{D} \to \mathbb{Y}$ è continua se e solo se per ogni $L \circ i_n : \mathcal{C}_0^\infty(I_n) \to \mathbb{Y}$ è continua. In particolare $\varphi \in \mathscr{D}^*$ se e solo se per ogni compatto K la restrizione di φ a $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ è continua. Usando la (c) di (2.4.9) per $\mathcal{C}_0^\infty(K)$:

$$\varphi \in \mathscr{D}^* \Leftrightarrow \forall K \text{ compatto } \exists m \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \text{ tale che } |\varphi(f)| \leq C\|f\|_{\mathcal{C}_0^m(K)} \quad \forall f \in C_0^\infty(K).$$

Un'altra caratterizzazione di $\mathscr{D}^*$, usando la convergenza in $C_0^\infty(K)$, è:

$$\varphi \in \mathscr{D}^* \Leftrightarrow \forall K \text{ compatto},\ \forall (f_n)_n \text{ in } \mathcal{C}_0^\infty(K) \text{ t.c. } \forall m\ f_n^{(m)} \to 0 \text{ unif. , si ha } \varphi(f_n) \to 0.$$

Condideriamo in $\mathscr{D}^*$ la topologia forte. Essa è indotta dalla famiglia di seminorme

$$p_B^*(\varphi) := \sup_{f \in B} |\varphi(f)| \qquad \forall B \text{ limitato in } \mathscr{D}.$$

Data la caratterizzazione dei limitati mediante le seminorme in $\mathscr{D}$ (vedi la Proposizione (2.4.2)) abbiamo che

$$B \text{ limitato in } \mathscr{D} \Leftrightarrow \forall \sigma \in c_0^+,\ \forall \mu \in M_\infty \quad C_{\sigma,\mu} := \sup_{f \in B} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|_{C^{\mu_n}(K_n)}}{\sigma_n} < +\infty.$$

Da questo segue che se B è limitato esiste un compatto K tale che $\operatorname{spt}(f) \subset K$ per tutte le f in B. Infatti se questo non fosse vero esisterebbe $(k_n)_n$ successione crescente di interi e $(f_{k_n})_n$ in B tali che $\|f_{k_n}\|_{K_{k_n}} > 0$. Se allora $\sigma \in c_0^+$ è tale che $\sigma_{k_n} < \dfrac{\|f_{k_n}\|_{K_{k_n}}}{k_n}$ e $\mu \in M_\infty$, avremmo un assurdo perché:

$$\sup_{f \in B} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|_{C^{\mu_n}(K_n)}}{\sigma_n} \geq \sup_{f \in B} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|_{C^0(K_n)}}{\sigma_n} \geq \sup_{f \in B} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|_{C^0(K_{k_n})}}{\sigma_{k_n}} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f_{k_n}\|_{C^0(K_{k_n})}}{\sigma_{k_n}} \geq k_m$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $k_m \to \infty$. È allora chiaro che B è limitato in $\mathscr{D}$ se e solo se:

$$\exists K \text{ compatto tale che } B \subset C_0^\infty(K) \text{ e } \forall m \in \mathbb{N} \text{ si ha } \sup_{f \in B} \|f^{(m)}\|_K < +\infty$$

Ne segue che un'altra famiglia di seminorme per la topologia forte di $\mathscr{D}^*$ è data da:

$$q_{n,\mu}^*(\varphi) := \sup \left\{ |\varphi(f)| : f \in C_0^\infty(K_n), \forall m\ \|f\|_{C^m(K_n)} \leq \mu_m \right\}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ e di tutte le successioni $\mu : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$.

In realtà, nella pratica, su $\mathscr{D}^*$ si usa sempre la topologia debole star.

2.7.8 Esempio. Sia $p > 0$ e definiamo

$$\ell^p := \left\{ (a_n)_n \text{ successioni reali } : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

ℓ^P è uno spazio lineare. Se $p \geq 1$ ℓ^p è uno spazio normato con norma:

$$\|(a_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e si dimostra che è completo, dunque un Banach. Inoltre ℓ^2 è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare:

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle_2 := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Se $0 < p < 1$ ℓ^p è comunque uno spazio metrico completo rispetto alla distanza (invariante per translazioni):

$$d_p((a_n)_n, (b_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p.$$

Il fatto che d_p sia una distanza segue dalla diseguaglianza (valida per $0 < p \leq 1$):

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \qquad \forall a, b \geq 0. \tag{2.13}$$

Per provarla si può studiare la funzione $\varphi(t) := \dfrac{(1+t)^p}{1+t^p}$ su $[0, +\infty[$, notando che:

$$\varphi(0) = 1, \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 1, \quad \varphi'(t) = \frac{p(1+t)^{p-1}}{(1+t^p)^2}(1 - t^{p-1}), \varphi(1) = 2^{p-1} < 1,$$

da cui $2^{p-1} \leq \varphi(t) \leq 1$ per ogni $t \geq 0$ (e mettendo $t = b/a$ si ottiene la (2.13)).

Pongo anche

$$\ell^\infty := \left\{ (a_n)_n \text{ succ. reali } : \sup_n |a_n| < +\infty \right\}, \qquad c^0 := \{(a_n)_n \text{ succ. reali } : a_n \to 0\}.$$

Entrambi questi spazi sono dei Banach con la norma

$$\|(a_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Chiaramente c^0 è un sottospazio chiuso di ℓ^∞.

Si dimostra che ℓ^p è riflessivo se $1 < p < +\infty$ e il duale di ℓ^p è isomorfo a ℓ^q, se $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Si dimostra anche che il duale di c^0 è ℓ^1 mentre il duale di ℓ^1 è ℓ^∞ per cui questi spazi non sono riflessivi.

Si dimostra che ℓ^p è separabile per $p < +\infty$, mentre ℓ^∞ non è separabile.

2.7.9 Esempio. Dato un insieme misurabile E in $\mathbb{R}^N$ si definiscono, per $p > 0$,

$$\mathscr{L}^p(E) := \left\{ f : E \to]-\infty, \infty] : f \text{ è misurabile e } \int_E |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

e

$$\mathscr{L}^\infty(E) := \{f : E \to]-\infty, \infty] : f \text{ è misurabile ed essenzialmente limitata su } E\}.$$

Si considera inoltre la relazione di equivenza $f \simeq g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque e si definiscono

$$\mathrm{L}^p(E) := \mathscr{L}^p / \simeq, \qquad \mathrm{L}^\infty(E) := \mathscr{L}^p / \simeq$$

Se $p \geq 1$ si considera:

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)| := \inf \{ m \in \mathbb{R} \colon |f(x)| \leq m \text{ per q.o. } x \in E \}$$

che si vede essere delle norme che rendono $\mathrm{L}^p(E)$ degli spazi di Banach (per $p \in [1, +\infty]$).

Consideriamo invece $p \in I$. In questo caso è comunque vero che $\mathrm{L}^p(E)$ sono spazi vettoriali. Inoltre la funzione $d_p(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx$ è una distanza (inveriante per translazioni), a causa della (2.13). È facile vedere che d_p induce su $L^q(0,1)$ una topologia compatibile con le operazioni lineari. Dimostriamo che l'unico aperto convesso è tutto lo spazio. Sia U un aperto convesso. A meno di translazioni possiamo supporre che $0 \in U$. Sia allora $\rho > 0$ tale che $B(0,\rho) \subset U$.

Prendiamo una qualunque funzione $f \in L^p(0,1)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si trovano $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ tali che $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|^p \, dx = \dfrac{1}{n} d_p(f,0)$ (usando la continuità dell'integrale rispetto agli estremi). Poniamo $f_k := f \, 1_{[x_{i-1}, x_i]}$. Allora:

$$d_p \left(n f_k, 0 \right) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} n^p |f(x)|^p \, dx = \frac{n^p}{n} d_p(f,0) = \frac{d_p(f,0)}{n^{1-p}}.$$

Ma allora, se n è abbastanza grande, $n f_k \in B(0,\rho) \subset U$ per ogni $k = 1, \ldots, n$. Per la convessità di U, da $f = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} n f_k$ si deduce che $f \in U$.

Ne segue che non esiste nessun funzionale lineare e continuo su $L^p(0,1)$ diverso dal funzionale nullo. Infatti se chi fosse un tale φ, allora $U := \{ f \colon \varphi(f) < o \}$ sarebbe un aperto convesso non banale. Tutto questo mostra che, se $p > 1$:

- L^p non è uno spazio localmente convesso.
- Non vale il teorema di separazione (2.5.6) in L^p: si prenda per esempio $C = \{x_1\}$ e $K = \{x_2\}$ con $x_1 \neq x_2$.

2.8 Operatori chiusi

2.8.1 Definizione. In questo paragrafo X e Y sono spazi normati. Chiameremo *operatore illimitato* da X in Y un'applicazione lineare definita su un sottospazio lineare $\mathcal{D}(L)$ di X a valori in Y (il termine illimitato in realtà dovrebbe essere "non necessariamente limitato" dato che il caso L continuo da X in Y è contenuto nella definizione). Poniamo:

$$\begin{aligned}
\ker(L) &:= \{ x \in \mathcal{D}(L) \colon Lx = 0 \}, \\
R(L) &:= \{ y \in Y \colon \exists x \in \mathcal{D}(L) \text{ con } Lx = y \}, \\
G(L) &:= \{ (x,y) \in X \times Y \colon x \in \mathcal{D}(L), y = Lx \}
\end{aligned}$$

detti rispettivamente il *nucleo*, *l'immagine* e il *grafico* di L (sono tutti spazi lineari).

2.8.2 Definizione. Siano L_1, L_2 due operatori da X in Y. Scriviamo $L_1 \subset L_2$ se L_2 è un'estensione di L_1, cioè se $\mathcal{D}(L_1) \subset L_2$ e $L_2|_{\mathcal{D}(L_1)} = L_1$. Notiamo che $L_1 \subset L_2$ se e solo se $G(L_1) \subset G(L_2)$.

2.8.3 Definizione. Diremo che $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ è *chiuso*, se $G(L)$ è chiuso in $X \times Y$.

È conseguenza del Teorema dell'Applicazione Aperta (anzi è una formulazione equivalente di quel teorema) che ogni operatore lineare chiuso tra spazi di Banach è necessariamente continuo (Teorema del Grafico Chiuso).

2.8.4 Proposizione. *Sia $\mathcal{D}(L) \subset X$, $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ un operatore chiuso. Allora:*

- *il nucleo di L, cioè lo spazio lineare $\ker(L) := \{x \in \mathcal{D}(L) : Lx = 0\}$ è chiuso;*
- *se L è iniettivo allora $L^{-1} : R(L) \to X$ è chiuso, dove $R(L) := L(\mathcal{D}(L))$ è l'immagine di L.*

È anche chiaro che, se $L : X \to Y$ è continuo, allora è chiuso, mentre non vale il viceversa.

2.8.5 Proposizione. *Se L_1, L_2 sono operatori chiusi, allora $L := L_1 + L_2$, definito su $\mathcal{D}(L) := \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(L_2)$ è un operatore chiuso.*

Se $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ è un operatore chiuso e $M : Y \to Y_1$ è lineare e continuo, allora $L_1 := M \circ L$ è un operatore chiuso definito su $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$.

Se $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ è un operatore chiuso e $M : X_1 \to X$ è lineare e continuo, allora $L_1 := L \circ M$ è un operatore chiuso, definito su $\mathcal{D}(L_1) = M^{-1}(\mathcal{D}(L))$.

2.8.6 Lemma. *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach. Sia X' un sottospazio lineare denso di X e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare continua. Allora esiste un'unica estensione lineare e continua $\tilde{L} : X \to Y$, di L a tutto X.*

2.8.7 Notazione. Dati $x \in X$ e x^* in X^* indicheremo come si fa di solito:

$$\langle x, x^* \rangle_{X,X^*} \, (= \langle x, x^* \rangle \text{ se non c'è ambiguità}) := x^*(x).$$

2.8.8 Definizione. Siano X e Y spazi normati. Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ con $\mathcal{D}(L)$ denso in X. Definiamo *l'aggiunto* $L^* : Y^* \to X^*$ ponendo:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(L^*) := \left\{ y^* \in Y^* : \sup_{\|x\|_X = 1} \langle Lx, y^* \rangle < +\infty \right\}, \\
&L^* y^* := x^* \in X^* \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle Lx, y^* \rangle_{Y,Y^*} = \langle x^*, x \rangle_{X,X^*} \;\; \forall x \in \mathcal{D}(L).
\end{aligned}$$

(al solito $\langle x, x^* \rangle_{X,X^*} := x^*(x)$ se $x \in X$ e $x^* \in X^*$ e lo stesso per $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,Y^*}$). Notiamo che $L^* y^*$ è univocamente definito per il Lemma (2.8.6) (con $Y = \mathbb{R}$), e che L^* è lineare. Dunque:

$$y^* \in \mathcal{D}(L^*), \; x^* = L^* y^* \Leftrightarrow \langle x, x^* \rangle_{X,X^*} = \langle Lx, y^* \rangle_{Y,Y^*} \quad \forall x \in \mathcal{D}(L).$$

2.8.9 Osservazione. Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ con $\mathcal{D}(L)$ denso in X. Si vede immediatamente dalla definizione che, dati $x^* \in X^*$ e $Y^* \in Y^*$:

$$y^* \in \mathcal{D}(L^*), x^* = L^* y^* \Leftrightarrow \langle x^*, x \rangle_{X,X^*} = \langle Lx, y^* \rangle_{Y,Y^*} \; \forall x \in \mathcal{D}(L). \tag{2.14}$$

2.8.10 Osservazione. Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ con $\mathcal{D}(L)$ denso in X. Allora segue facilmente dalle definizioni che:

(a) Se $M : X \to Y$ è lineare e continuo, allora $\mathcal{D}(L + M) = \mathcal{D}(L)$ e $(L + M)^* = L^* + M^*$;

(b) Se $M : Y \to Y_1$ è lineare e continuo, allora $L^* \circ M^* \subset (M \circ L)^*$;

(c) Se $M : X_1 \to X$ è lineare e continuo e se $\mathcal{D}(L \circ M) = M^{-1}(\mathcal{D}(L))$ è denso in X_1, allora $M^* \circ L^* \subset (L \circ M)^*$.

2.8.11 Osservazione. Siano L_1, L_2 due operatori da X in Y, aventi dominio denso. Se $L_1 \subset L_2$ si ha $L_2^* \subset L_1^*$. Per vederlo basta applicare le definizioni.

2.8.12 Proposizione. *Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$, con $\mathcal{D}(L)$ denso in X, allora L^* è chiuso.*

Dimostrazione. Siano $(y_n^*)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L^*)$ che converga a un punto $y^* \in Y^*$ e supponiamo che $x_n^* := L^* y_n^*$ converga a un punto x^* in X^*. Allora per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ si ha $y_n^*(Lx) = x_n^*(x)$ da cui passando al limite $y^*(Lx) = x^*(x)$. Questo equivale a dire che $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$ e $x^* = L^* y^*$. $\square$

ESEMPI ??

2.8.13 Teorema. *Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ con $\mathcal{D}(L)$ denso. Allora L è continuo se e solo se $\mathcal{D}(L^*) = Y^*$. Quando ciò avviene, allora anche L^* è continuo e $\|L^*\| = \|L\|$.*

Dimostrazione. Se L è continuo segue facilmente dalle definizioni che $\mathcal{D}(L^*) = Y^*$, che L^* è continuo e che $\|L^*\| \leq \|L\|$. Se fosse $\|L^*\| < \|L\|$ esisterebbe $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$ e $\|Lx_0\| > \|L^*\|$. Per Hahn-Banach esiste y_0^* in Y^* con $\|y_0^*\| \leq 1$ e $\langle Lx_0, y_0^* \rangle_{Y,Y^*} = \|Lx_0\|$. Ma allora si trova l'assurdo: $\|L^*\| \geq \|L^* y_0^*\| \geq \langle x_0, L^* y_0 \rangle_{X,X^*} = \langle Lx_0, y^* \rangle_{Y,Y^*} > \|L^*\|$.

Viceversa consideriamo la palla unitaria B in X e notiamo che, per ogni $y^* \in Y^*$, dato che $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$, si ha $y^* \circ L \in X^*$. Dunque:

$$\sup_{x \in B} |y^*(Lx)| < +\infty \Leftrightarrow \sup_{y \in L(B)} |y^*(y)| < +\infty \Leftrightarrow \sup_{y \in L(B)} |J_Y(y)(y^*)| < +\infty.$$

Per il Teorema di Banach-Steinhaus (nota che X^* è completo) deve esistere M tale che

$$|y^*(y)| = |J_Y(y)(y^*)| \leq M \|y^*\| \qquad \forall y \in L(B)\, \forall y^* \in X^*.$$

Ne segue $\|y\| \leq M$ per ogni $y \in L(B)$, dunque L è continua. $\square$

2.8.14 Definizione. Sia F un sottospazio lineare di X^*. Diciamo che F è *totale*, se per ogni $x \in X$ con $x \neq 0$ esiste $x^* \in F$ tale che $\langle x, x^* \rangle_{X,X^*} \neq 0$.

2.8.15 Lemma. *Sia X è uno spazio di Banach riflessivo. Allora un sottospazio $F \subset X^*$ è totale se e solo se F è denso in X^*.*

Dimostrazione. Se F è denso, allora è totale per il teorema di Hahn-Banach (vedi la Proposizione (2.5.8)). Viceversa supponiamo F totale, ma $\overline{F} \neq X^*$. Allora esiste $x_0^{**} \in X^{**} \setminus \{0\}$ tale che $\langle x^*, x_0^{**} \rangle_{X^*,X^{**}} = 0$ per ogni $x^* \in F$ (sempre per Hahn-Banach). Dato che X è riflessivo, allora $x_0^{**} = J_X(x_0)$ per un $x_0 \in X$, e quindi $\langle x_0, x^* \rangle_{X,X^*} = 0$ per ogni $X^* \in F$. Ma questo contraddice il fatto che F sia totale. $\square$

2.8.16 Definizione. Diciamo che un operatore illimitato $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ è *chiudibile*, se esiste una sua estensione chiusa, cioè se esiste $\tilde{L} : \mathcal{D}(\tilde{L}) \to Y$, con $\tilde{L}$ chiuso e $L \subset \tilde{L}$. Notiamo che questo equivale a dire che $G(L) \subset G(\tilde{L}) = \overline{G(\tilde{L})}$.

2.8.17 Proposizione. *Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$. Allora sono equivalenti:*

(a) *L è chiudibile;*

(b) *esiste la* minima estensione chiusa *di L, denotata con $\bar{L}$, individuata dalla proprietà che $\bar{L}$ è chiuso, $L \subset \bar{L}$, e se $\tilde{L}$ è chiuso e $L \subset \tilde{L}$, allora $\bar{L} \subset \tilde{L}$;*

(c) *se $(0, y_0) \in \overline{G(L)}$, allora $y_0 = 0$.*

Inoltre se $\mathcal{D}(L)$ è denso in X, allora L è chiudibile se e solo se

(d) *$\mathcal{D}(L^*)$ è totale.*

Infine, sempre se $\mathcal{D}(L)$ è denso, si ha $L^* = \bar{L}^*$.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (c) Sia $\tilde{L}$ un'estensione chiusa di L. Allora $G(L) \subset G(\tilde{L}) = \overline{G(\tilde{L})}$. Dato che $\tilde{L}$ è univoca e $\tilde{L}0 = 0$, si ha $(0, y) \in \overline{G(L)} \Rightarrow (0, y) \in \overline{G(\tilde{L})} \Rightarrow y = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Dimostriamo che $\overline{G(L)}$ è un grafico, cioè che, se $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{G(L)}$, allora $y_1 = y_2$. Per la linearità ciò è equivalente a $(0, y) \in \overline{G(L)} \Rightarrow y = 0$, che è l'ipotesi. Dunque $\bar{L}$ definito da:

$$\mathcal{D}(\bar{L}) := \left\{x \in X : \exists y \in Y \text{ con } (x, y) \in \overline{G(L)}\right\}, \; y = \bar{L}x \Leftrightarrow (x, y) \in \overline{G(L)}.$$

è un operatore chiuso con $G(L) \subset G(\bar{L})$, cioè $L \subset \bar{L}$; inoltre se $\tilde{L}$ è chiuso e $L \subset \tilde{L}$, allora da $G(L) \subset G(\tilde{L}) = \overline{G(\tilde{L})}$ segue $\overline{G(L)} \subset G(\tilde{L})$, cioè $G(\bar{L}) \subset G(\tilde{L})$, cioè la tesi.

(b) $\Rightarrow$ (a) è ovvia.

Supponiamo ora che $\overline{\mathcal{D}(L)} = X$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Prendiamo y_0 in Y con $y_0 \neq 0$. Dato che $(0, y_0) \notin \overline{G(L)}$ esiste $z^* \in (X \times Y)^*$ tale che $\langle (0, y_0), z^* \rangle \neq 0$ e $\langle (x, y), z^* \rangle = 0$ per ogni $(x, y) \in G(L)$. Se $z^* = (x^*, y^*)$, con $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$ questo equivale a $\langle y_0, y^* \rangle \neq 0$ e $\langle x, x^* \rangle + \langle Lx, y^* \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Dalla seconda eguaglianza si ha $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$ (e $L^*y^* = -x^*$). Abbiamo quindi verificato che $\mathcal{D}(L^*)$ è totale.

(d) $\Rightarrow$ (c) Sia $(0, y_0) \in \overline{G(L)}$. Dunque esiste una successione $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to 0$ e $Lx_n \to y_0$. Sia $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$; allora:

$$\langle Lx_n, y^* \rangle_{Y,Y^*} = \langle x_m, L^*y^* \rangle_{X,X^*} \to 0 \Rightarrow \langle y_0, y^* \rangle_{Y,Y^*} = 0.$$

Dato che $\mathcal{D}(L^*)$ è totale si ha $y_0 = 0$.

Verifichiamo l'ultima affermazione. Siano $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$ e $x \in \mathcal{D}(\bar{L})$. Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to x$ e $Lx_n \to \bar{L}x$. Ne segue:

$$\left\langle \bar{L}x, y^* \right\rangle_{Y,Y^*} = \lim_{n\to\infty} \langle Lx_n, y^* \rangle_{Y,Y^*} = \lim_{n\to\infty} \langle L^*y^*, x_n \rangle_{X,X^*} = \langle L^*y^*, x \rangle_{X,X^*}.$$

Questo significa che $y^* \in \mathcal{D}(\bar{L}^*)$ e $\bar{L}^*y^* = L^*y^*$. Usando la (2.8.11) si ha la tesi. □

2.8.18 Corollario. *Siano X e Y spazi di Banach e sia $L : X \to Y$ lineare. Allora L è continuo se e solo se $\mathcal{D}(L^*)$ è totale.*

Dimostrazione. Se L è continuo allora $\mathcal{D}(L^*) = Y^*$ e quindi $\mathcal{D}(L^*)$ è totale. Se viceversa $\mathcal{D}(L^*)$ è totale, allora per la (2.8.17) si ha che L è chiudibile. Dato che $\mathcal{D}(L) = X$ questo significa che L è chiuso ed essendo L definito su un Banach L deve essere continuo. □

2.8.19 Proposizione. *Siano X normato e Y Banach riflessivo. Sia $L : \mathcal{D}(L) \to Y$ un operatore illimitato con $\mathcal{D}(L)$ denso in X. Allora $\mathcal{D}(L^*)$ è denso in Y^* se e solo se L è chiudibile. Inoltre se ciò avviene si ha $\bar{L} = J_Y^{-1} L^{**} J_X$.*

Dimostrazione. Per la prima parte basta usare la Proposizione (2.8.17) e la caratterizzazione fornita nel Lemma (2.8.15). Per la seconda notiamo che L^{**} è ben definito perché $\mathcal{D}(L^*)$ è denso ed è chiuso per la Proposizione (2.8.12). Dato che J_X e J_Y sono isometrie è chiaro che $\tilde{L} := J_Y^{-1} L^{**} J_X$ è chiuso. Vediamo che $L \subset \tilde{L}$; siano $x \in \mathcal{D}(L)$ e $y^* \in \mathcal{D}(L^*)$:

$$\langle L^*y^*, J_X x \rangle_{X^*,X^{**}} = \langle x, L^*y^* \rangle_{X,X^*} = \langle Lx, y^* \rangle_{Y,Y^*} = \langle y^*, J_Y Lx \rangle_{Y^*,Y^{**}}$$

da cui si deduce che $J_X x \in \mathcal{D}(L^{**})$ e $L^{**} J_X x = J_Y Lx$; questo è come dire $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\tilde{L})$ e $\tilde{L}|_{\mathcal{D}(L)} = L$. Dimostriamo che $\tilde{L}$ è la minima estensione di L. Per questo basta far vedere che $G(\tilde{L}) \subset \overline{G(L)} = G(\bar{L})$. Se ciò non fosse vero esisterebbe $x_0 \in \mathcal{D}(\tilde{L})$ con $(x_0, \tilde{L}x_0) \notin \overline{G(L)}$. Per Hahn-Banach troverei allora $(x_0^*, y_0^*) \in (X \times Y)^*$ con $\langle x_0, x_0^* \rangle_{X,X^*} + \left\langle \tilde{L}x_0, y_0^* \right\rangle_{Y,Y^*} \neq 0$ e $\langle x, x_0^* \rangle_{X,X^*} + \langle \bar{L}x, y_0^* \rangle_{Y,Y^*} = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. La seconda proprietà significa che $y_0^* \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^* y_0^* = -x_0^*$. Ne segue:

$$- \langle x_0, x_0^* \rangle_{X,X^*} = \langle x_0, L^* y_0^* \rangle_{X,X^*} = \langle L^* y_0^*, J_X x_0 \rangle_{X^*,X^{**}} = \langle y_0^*, L^{**} J_X x_0 \rangle_{Y^*,Y^{**}} = \left\langle y_0^*, J_Y \tilde{L} x_0 \right\rangle_{Y^*,Y^{**}} = \left\langle \tilde{L}x_0, y_0^* \right\rangle_{Y,Y^*} \neq - \langle x_0, x_0^* \rangle_{X,X^*} .$$

Si è dunque trovato un assurdo per cui $\tilde{L} = \bar{L}$. □

2.8.20 Lemma. *Sia X un Banach riflessivo. Allora $J_X^* = (J_{X^*})^{-1}$ (entrambi vanno da $X^{***} \to X^*$).*

Dimostrazione. Sia $x_0^* \in X^*$. Allora per ogni $x \in X$:

$$\langle x, J_X^* \circ J_{X^*} x_0^* \rangle_{X,X^*} = \langle J_X x, J_{X^*} x_0^* \rangle_{X^{**},X^{***}} = \langle x_0^*, J_X x \rangle_{X^*,X^{**}} = \langle x, x_0^* \rangle_{X,X^*} .$$

Dunque $J_X^* \circ J_{X^*}$ è l'identità su X^*. Viceversa sia $x_0^{***} \in X^{***}$. Allora per ogni $x \in X$:

$$\langle J_X x, J_{X^*} \circ J_X^* x_0^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}} = \langle J_X^* x_0^{***}, J_X x \rangle_{X^*,X^{**}} = \langle x, J_X^* x_0^{***} \rangle_{X,X^*} = \langle J_X x, x^{***} \rangle_{X^{**},X^{***}} .$$

Dato che J_X è un isomorfismo $J_{X^*} \circ J_X^* x_0^{***} = x_0^{***}$ e questo conclude la dimostrazione. □

Nel resto del paragrafo H indica uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotiamo con $r : H \to H^*$ la mappa definita da $\langle x_2, r(x_1) \rangle_{H,H^*} = \langle x_2, x_1 \rangle$ per ogni x_1, x_2 in H. Per il teorema di rappresentazione di Riesz r è un omeomorfismo.

È semplice verificare che $r^* \circ J_H = r$ dunque $r^* = r \circ J_H^{-1}$.

2.8.21 Definizione. Sia $L : \mathcal{D}(L) \to H$ dove $\mathcal{D}(L)$ è denso in H. Poniamo $L^\star := r^{-1} L^* \circ r$. Dunque $L^\star : \mathcal{D}(L^\star) \to H$ dove $\mathcal{D}(L^\star) = \{x \in H : rx \in \mathcal{D}(L^*)\} = r^{-1}(\mathcal{D}(L^*)) \subset X$. Si deduce facilmente da questa definizione che:

$$x \in \mathcal{D}(L^\star), y = L^\star x \Leftrightarrow \langle x, Lx' \rangle = \langle y, x' \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(L). \tag{2.15}$$

$\mathcal{D}(L^\star)$ è denso se e solo se L è chiudibile; in tal caso $\bar{L}^\star = L^\star$ e $L^{\star\star} = \bar{L}$ (dalla (2.8.19)).

Diciamo che L è *simmetrico* se $L \subset L^\star$, cioè se

$$\langle x_1, Lx_2 \rangle = \langle x_2, Lx_1 \rangle \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(L).$$

Diciamo che L è *autoaggiunto* se $L = L^\star$ (che include la condizione $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^\star)$).

2.8.22 Proposizione. *Sia $L : \mathcal{D}(L) \to H$ chiuso con $\mathcal{D}(L)$ denso in H. Allora:*

(a) *$R(L)^\perp := \{x \in H : \langle x, x^* \rangle = 0 \ \forall x^* \in R(L)\} = \ker(L^\star)$;*

(b) *$\ker(L)^\perp := \{x \in H : \langle x, x^* \rangle = 0 \ \forall x \in \ker(L)\} = \overline{R(L^\star)}$;*

(c) *se esiste $\gamma_0 > 0$ tale che $\|Lx\|_{X^*} \geq \gamma_0 \|x\|_X$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, allora $R(L)$ è chiuso.*

Dimostrazione. (a) si ha:

$$x \in R(L)^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in R(L) \Leftrightarrow$$
$$\langle x, Lx'\rangle = 0 \ \forall x' \in \mathcal{D}(L) \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(L^{\star}), \ L^{\star}x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(L^{\star}).$$

(b) Segue dalla (a) per $L^{\star}$, usando la chiusura di L, per cui $L^{\star\star} = L$.

(c) Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L)$, siano $x_n^* := Lx_n$ e supponiamo $x_n^* \to x_0^*$. Per l'ipotesi $\|x_n - x_m\|_X \leq \gamma_0^{-1}\|x_n^* - x_m^*\|_{X^*}$ e quindi $(x_n)_n$ è di Cauchy. Dunque $(x_n)_n$ tende a un punto $x_0 \in H$. Per la chiusura di L le proprietà $x_n \to x_0$, $Lx_n \to x_0^*$ implicano $x_0 \in \mathcal{D}(L)$ e $x_0^* = Lx_0$, dunque $x_0^* \in R(L)$. □

2.8.23 Osservazione. Nella situazione della proposizione precedente, se L è autoaggiunto e vale la diseguaglianza in (c), allora $\ker(L) = \{0\}$, $R(L) = H$ e $L^{-1} : H \to H$ è continuo. L'ultima affermazione segue dal fatto che L^{-1} è chiuso e il suo dominio è un Banach.

Capitolo 3

Funzioni convesse

3.1 Funzioni convesse su uno spazio l.c.

In questo paragrafo $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale.

3.1.1 Definizione. Sia $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Chiamiamo *dominio* di f l'insieme:

$$\mathcal{D}(f) := \{x \in K : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Diciamo che f è *propria* se f non vale mai $-\infty$ e non è identicamente eguale a $+\infty$.

3.1.2 Definizione. Se $A \subset \mathbb{X}$ e $f : A \to [-\infty, +\infty]$ chiamo epigrafico di f l'insieme

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} : x \in A, f(x) \leq y\}$$

3.1.3 Definizione. Siano $K \subset \mathbb{X}$ e $f : K \to [-\infty, +\infty]$. Diciamo che f è convessa se il suo epigrafico è convesso.

3.1.4 Proposizione. *Dati $K \subset \mathbb{X}$ e $f : K \to [-\infty, +\infty]$ sono equivalenti:*

(a) f è convessa;

(b)) l'insieme $\tilde{\mathcal{D}}(f) := \{x \in K : f(x) < +\infty\}$ è convesso e per ogni $x_1, x_2 \in \tilde{\mathcal{D}}(f)$, $\lambda \in]0, 1[$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{3.1}$$

Ovviamente la (3.1) *vale automaticamente se $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, purché abbia senso.*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Siano $x_1, x_2 \in \tilde{\mathcal{D}}(f)$ e siano $y_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tali che $y_i \geq f(x_i)$. Allora $(x_i, y_i) \in \text{epi}(f)$ da cui, se $\lambda \in [0, 1]$, $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in \text{epi}(f)$. Dunque

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \quad \forall y_1 \geq f(x_1), \forall y_2 \geq y_2,$$

da cui $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \tilde{\mathcal{D}}(f)$ e vale la (3.1). Ragionando a rovescio si ricava (b) $\Rightarrow$ (a). $\square$

3.1.5 Definizione. Diciamo che f è strettamente convessa se è convessa e nella (3.1) vale la disuguaglianza stretta ogni qualvolta $x_1 \neq x_2$.

3.1.6 Osservazione. Sia $f : K \to [-\infty, +\infty]$ convessa propria. Da (3.1.4) segue che $\mathcal{D}(f)$ è convesso e non vuoto.

3.1.7 Proposizione. *Sia $f : K \to [-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e supponiamo che $x_0 \in K$ e $f(x_0) = -\infty$. Allora per ogni $x \in K$ con $f(x) < +\infty$ si ha: $f(x_0 + \lambda(x - x_0)) = -\infty$ per ogni λ con $0 \leq \lambda < 1$.*

Dimostrazione. Se $f(x) < +\infty$ si ha che $x_0, x \in \tilde{K}$. Preso $\lambda \in]0,1[$ si può applicare la (3.1) e ottenere $f(x_0 + \lambda(x - x_0)) \le \lambda(-\infty) + (1-\lambda)f(x) = -\infty$. □

3.1.8 Corollario. *Siano $\mathbb{X}$ S.V.T. e $f : K \to [-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. Se $\mathcal{D}(f)$ ha parte interna non vuota, allora f è propria.*

3.1.9 Proposizione. *Sia $K \subset \mathbb{X}$ convesso e sia $f : K \to [-\infty, +\infty]$. Allora f è convessa se e solo se $\tilde{\mathcal{D}}(f)$ è convesso e per ogni n intero, per ogni n-pla di punti $x_1, \dots, x_n \in K$ e per ogni n-pla di numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si ha:*

$$x_i \in K,\ \lambda_i \in]0,1[\ \forall i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

3.1.10 Proposizione.

1. *Se f, g sono convesse, $\lambda, \mu > 0$, allora $\lambda f + \mu g$ è convessa – nella definizione di somma conveniamo che la differenza di due infiniti faccia $+\infty$ (in questo modo $\tilde{\mathcal{D}}(f+g) = \tilde{\mathcal{D}}(f) \cap \tilde{\mathcal{D}}(g)$).*

2. *Se f è convessa e se $G : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ è convessa crescente, allora $G \circ f$ è convessa.*

3. *Se $f : Y \to [-\infty, +\infty]$ è convessa, se $y_0 \in Y$ e $L : \mathbb{X} \to Y$ è lineare, allora $g : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ definita da $g(x) = f(y_0 + Lx)$ è convessa.*

4. *Se $(f_i)_{i \in \mathscr{I}}$ è una famiglia arbitraria di funzioni convesse, $f_i : K \to [-\infty, +\infty]$, allora $f : K \to [-\infty, +\infty]$ definita da $f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$ è convessa.*

Dimostrazione. Le prime tre proprietà seguono applicando le definizioni. L'ultima segue dalla definizione di convessità mediante l'epigrafico e dall'osservazione seguente. □

3.1.11 Osservazione. Se $f_i : A \to [-\infty, +\infty]$ per $i \in \mathscr{I}$ è una famiglia di funzioni e se $f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$, si ha

$$\mathrm{epi}(f) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} \mathrm{epi}(f_i).$$

In effetti $(x, y) \in \mathrm{epi}(f) \Leftrightarrow f(x) \le y \Leftrightarrow f_i(x) \le y\ \forall i \in \mathscr{I} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{epi}(f_i)\ \forall i \in \mathscr{I}$.

3.1.12 Definizione. Sia $A \subset \mathbb{X}$. Chiamiamo *indicatrice* di A la funzione $\chi_A : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ definita da:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A, \\ +\infty & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

3.1.13 Osservazione. Sia $A \subset \mathbb{X}$. A è convesso se e solo se χ_A è convessa. Inoltre $f : A \to [-\infty, +\infty]$ è convessa se e solo se è convessa la funzione $\bar{f} : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ definita da:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A, \\ +\infty & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Nota che $\chi_A = \bar{f}$ se f è la funzione nulla su A. In virtù di questa osservazione (di facile dimostrazione) non è restrittivo considerare funzioni definite su tutto lo spazio $\mathbb{X}$.

3.2 Convessità e continuità

Supponiamo che $\mathbb{X}$ sia uno spazio vettoriale topologico. Al solito $\mathscr{I}(x_0)$ indica la famiglia degli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{X}$. Ricordiamo la definizione di limite inferiore e semicontinuità.

3.2.1 Definizione (Limiti inferiore e superiore)**.** Sia $A \subset \mathbb{X}$. Sia $x_0 \in \mathbb{X}$. Diciamo che x_0 è di *accumulazione* per A, se $(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathscr{I}(x_0)$. Indichiamo con A' l'insieme dei punti di accumulazione per A. Diciamo che x_0 è isolato in A se $x_0 \in A \setminus A'$.

Se $f : A \to [-\infty, +\infty]$ e $x_0 \in A'$ definiamo il *limite inferiore* e il *limite superiore*:

$$\liminf_{x \to x_0} := \sup_{U \in \mathscr{I}(x_0)} \inf_{x \in U \cap A \setminus \{x_0\}} f(x), \qquad \limsup_{x \to x_0} := \inf_{U \in \mathscr{I}(x_0)} \sup_{x \in U \cap A \setminus \{x_0\}} f(x).$$

3.2.2 Definizione (semicontinuità)**.** Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $x_0 \in A$. Diciamo che f è *semicontinua inferiormente* (*semicontinua superiormente*) in x_0 se x_0 è isolato in A oppure se è di accumulazione e

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) \qquad \left(\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \right).$$

Diciamo che f è semicontinua inferiormente (superiormente) su A se è semicontinua inferiore (superiore) in ogni x_0 di A. Abbrevieremo spesso la locuzione "semicontinua inferiormente (superiormente)" con s.c.i. (s.c.s.).

Notiamo che $f \equiv -\infty$ è s.c.i. ($f \equiv +\infty$ è s.c.i.).

3.2.3 Osservazione. La definizione (3.2.1) non tiene conto del valore di f in x_0 ed è quella che, nel caso di eguaglianza tra limite inferiore e limite superiore, produce la tradizionale definizione di limite. In alternativa possiamo definire, per qualunque $x_0 \in \mathbb{X}$:

$$\liminf_{x \to x_0}{}^* f(x) := \sup_{U \in \mathscr{I}(x_0)} \inf_{x \in U \cap A} f(x), \quad \limsup_{x \to x_0}{}^* f(x) := \inf_{U \in \mathscr{I}(x_0)} \sup_{x \in U \cap A} f(x).$$

(con le solite convenzioni $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$). Allora, se $x_0 \in A$, $\liminf\limits_{x \to x_0}{}^* \leq f(x_0)$ e $\limsup\limits_{x \to x_0}{}^* \geq f(x_0)$ e la la semicontinuità inferiore (superiore) di f in $x_0 \in A$ equivale a:

$$\liminf_{x \to x_0}{}^* f(x) = f(x_0) \qquad \left(\limsup_{x \to x_0}{}^* f(x) = f(x_0) \right). \tag{3.2}$$

Si vede in effetti che:

$$\begin{matrix} \liminf\limits_{x \to x_0}{}^* f(x) \\ \left(\limsup\limits_{x \to x_0}{}^* f(x) \right) \end{matrix} = \begin{cases} +\infty \ (-\infty) & \text{se } x_0 \notin \bar{A}, \\ f(x_0) & \text{se } x_0 \in A \setminus A', \\ \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \left(\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \right) & \text{se } x_0 \in A' \setminus A, \\ \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \wedge f(x_0) \left(\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \vee f(x_0) \right) & \text{se } x_0 \in A \cap A', \end{cases} \tag{3.3}$$

da cui la (3.2). Detto altrimenti $f : A \to [-\infty, +\infty]$ è s.c.i. in $x_0 \in A$ se:

$$\forall C < f(x_0) \ \exists U \in \mathscr{I}(x_0) \ : \ \forall x \in U \cap A \ f(x) > C; \tag{3.4}$$

è s.c.s. in $x_0 \in A$ se:

$$\forall C > f(x_0) \ \exists U \in \mathscr{I}(x_0) \ : \ \forall x \in U \cap A \ f(x) < C. \tag{3.5}$$

Notiamo anche che, per calcolare $\liminf\limits_{x \to x_0}{}^* f(x) \left(\limsup\limits_{x \to x_0}{}^* f(x) \right)$ si può estendere f con il valore $+\infty$ ($-\infty$) al di fuori di A.

3.2.4 Proposizione. *Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Allora sono equivalenti:*

(a) f è s.c.i. in A;

(b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ il sottolivello $f^c := \{x \in A : f(x) \leq c\}$ *è chiuso in A;*

(c) $\mathrm{epi}(f) \cap A \times \mathbb{R}$ *è chiuso in $A \times \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) Sia $x_0 \in A$ con $x_0 \notin f^c$, cioè $f(x_0) > c$. Per la semicontinuità $\sup_{U \in \mathscr{I}(x_0)} \inf f(U \cap A) > c$; dunque esiste $U_0 \in \mathscr{I}(x_0)$ tale che $\inf f(U_0 \cap A) > c$. Questo implica che $U_0 \cap A \cap f^c = \emptyset$, cioè x_0 è esterno in A a f^c. Dunque f^c è chiuso in A.

(b) $\Rightarrow$ (c) Siano $x_0 \in A$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tali che $(x_0, y_0) \notin \mathrm{epi}(f)$, cioè $-\infty < y_0 < f(x_0)$. Sia $y_1 \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 < y_1 < f(x_0)$. Dato che $x_0 \notin f^{y_1}$ e f^{y_1} è chiuso in A, esiste U_0 in $\mathscr{I}(x_0)$ tale che $U_0 \cap A \cap f^{y_1} = \emptyset$. Ne segue immediatamente che $(U_0 \cap A) \times] - \infty, y_1[$ è un intorno di (x_0, y_0) in $A \times \mathbb{R}$ che non interseca $\mathrm{epi}(f)$. Dunque $\mathrm{epi}(f)$ è chiuso in $A \times \mathbb{R}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sia $x_0 \in \mathbb{X}$. Se $f(x_0) = -\infty$ allora f è s.c.i. ; se no prendiamo $c \in \mathbb{R}$ con $c < f(x_0)$. Dunque $(x_0, c) \notin \mathrm{epi}(f)$ e dato che $\mathrm{epi}(f)$ è chiuso deve esistere un intorno W_0 di (x_0, c) con $W_0 \cap \mathrm{epi}(f) = \emptyset$. Per come è fatta la topologia di $A \times \mathbb{R}$ esistono $U_0 \in \mathscr{I}(x_0)$ e $\varepsilon > 0$ tali che $(U_0 \cap A) \times]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset W_0$. Se $x \in U_0 \cap A$ ne segue $f(x) \geq c + \varepsilon \geq c$ e questo implica $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq c$, da cui la tesi. $\square$

3.2.5 Proposizione. *Sia $f : A \to [-\infty, +\infty]$ allora f è s.c.i. se e solo se $-f$ è s.c.s. .*

Se $f, g : A \to] - \infty, +\infty]$ sono s.c.i. e $\lambda, \mu > 0$ allora $\lambda f + \mu g$ è s.c.i. .

Se $f_i ; A \to [-\infty, +\infty]$ per $i \in \mathscr{I}$ sono s.c.i. , allora $f : A \to [-\infty, +\infty]$ definita da $f(x) := \sup_{i \in \mathscr{I}} f_i(x)$ è s.c.i. (anche se $\mathscr{I} = \emptyset$, nel qual caso $f \equiv -\infty$). Si noti che $\mathrm{epi}(f) = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} \mathrm{epi}(f_i)$.

3.2.6 Proposizione. *Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ definiamo:*

$$\overline{f}(x) := \liminf_{x' \to x}{}^* f(x') \quad \left(\underline{f}(x) := \limsup_{x' \to x}{}^* f(x') \right).$$

Allora $\overline{f}(\underline{f}) : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ è s.c.i. (è s.c.s.). Inoltre $\overline{f} \leq f$ ($\underline{f} \geq f$) in A e, se $x_0 \in A$, f è s.c.i. in x_0 (è s.c.s. in x_0) se e solo se $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$ ($\underline{f}(x_0) = f(x_0)$).

Dimostrazione. Consideriamo il caso di f s.c.i. . La relazione $\overline{f} \leq f$ segue dalla (3.3) mentre l'ultima affermazione discende da (3.2). Dimostriamo che $\bar{f}$ è s.c.i. . Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 \notin \overline{f}^c$, cioè $c < \overline{f}(x_0)$ Per definizione di $\bar{f}$ esiste $U \in \mathscr{I}(x_0)$ tale che $\inf_{x \in U \cap A} f(x) > c$. Allora se $x \in \mathring{U}$ si ha $\mathring{U} \in \mathscr{I}(x)$ da cui $\overline{f}(x) = \liminf_{x' \to x}{}^* f(x') \geq \inf_{x' \in \mathring{U} \cap A} f(x') > c$, cioè $\mathring{U} \cap \overline{f}^c = \emptyset$. Dunque $\overline{f}^c$ è chiuso per ogni c da cui la semicontinuità di $\overline{f}$. $\square$

3.2.7 Osservazione. Indichiamo $\Lambda(f) := \{g : \mathbb{X} \to [-\infty, \infty] : g \leq f, g \text{ è s.c.i. }\}$. Allora $\bar{f}(x) = \tilde{f}(x) := \sup_{g \in \Lambda(f)} g(x)$. Infatti $\bar{f} \in \Lambda(f)$, da cui $\bar{f} \leq \tilde{f}$. D'altra parte $\tilde{f}$ è s.c.i. per (3.2.5), dunque $\tilde{f}(x_0) = \liminf_{x \to x_0}{}^* \tilde{f}(x) \leq \liminf_{x \to x_0}{}^* f(x) = \bar{f}(x_0)$.

Inoltre $\mathrm{epi}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{epi}(f)}$. In effetti $\mathrm{epi}(\bar{f}) \supset \overline{\mathrm{epi}(f)}$ è ovvio, mentre si dimostra facilmente che $\overline{\mathrm{epi}(f)}$ è un epigrafico, da cui l'inclusione opposta. In particolare se f è convessa, allora $\bar{f}$ è convessa.

D'ora in avanti supponiamo che $\mathbb{X}$ sia uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Indichiamo con $\mathbb{X}^*$ il duale di $\mathbb{X}$ e useremo la solita notazione $\langle x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} = x^*(x)$, quando $x \in \mathbb{X}$ e $x^* \in \mathbb{X}^*$. Inoltre $K \subset \mathbb{X}$ sarà un convesso di $\mathbb{X}$.

3.2.8 Proposizione. *Sia $f : K \to [-\infty, +\infty]$ convessa e supponiamo che esista x_0 tale che $f(x_0) = -\infty$. Allora per ogni punto x in cui $f(x) < +\infty$ e f è s.c.i. in x si ha $f(x) = -\infty$. In particolare, se f è s.c.i. in K, allora $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{X}$ con $f(x) < +\infty$. Allora per la Proposizione (3.1.7) si ha $f(x_0 + t(x - x_0)) = -\infty$. Dato che f è s.c.i. ne segue $f(x) = -\infty$. □

3.2.9 Proposizione. *Se $f : K \to [-\infty, +\infty]$ è convessa s.c.i., allora f è debolmente s.c.i. .*

Dimostrazione. Per ipotesi, usando (a) ⇒ (b) nella (3.2.4), si ha che f^c è convesso chiuso per ogni $c \in \mathbb{R}$. Per la Proposizione (2.6.9) f^c è debolmente chiuso. Usando (b) ⇒ (a) nella (3.2.4) si deduce la tesi. □

3.2.10 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ convessa, s.c.i. con $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$. Allora esistono $x^* \in \mathbb{X}^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + c \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

In particolare, se $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$, $f(x) > -\infty$ per ogni x in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Dato che f è convessa e s.c.i. l'epigrafico $\mathrm{epi}(f)$ è convesso e chiuso in $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$: allora $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{epi}(f)$ per cui $\mathrm{epi}(f) \neq \emptyset$. Sia inoltre $-\infty < y_0 < f(x_0)$. Dato che $(x_0, y_0) \notin \mathrm{epi}(f)$, usando Hahn–Banach si trovano $x^* \in \mathbb{X}^*$ e $\eta \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\langle x_0, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta y_0 < q := \inf \left\{ \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta y : (x, y) \in \mathrm{epi}(f) \right\}. \tag{3.6}$$

In particolare $\eta y \geq q - \langle x_0, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} > \eta y_0$ per ogni $y \geq f(x_0)$, da cui $\eta > 0$. Ne segue:

$$f(x) \geq \frac{q}{\eta} + \left\langle x, -\frac{x^*}{\eta} \right\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

□

3.2.11 Osservazione. Osservando la dimostrazione si vede che abbiamo dimostrato che, se $-\infty < y_0 < f(x_0) < +\infty$, allora esiste $x^* \in \mathbb{X}^*$ tale che

$$f(x) \geq y_0 + \langle x^*, x - x_0 \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

3.2.12 Definizione. Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ una funzione. Definiamo $\overline{\mathrm{co}}(f) : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ ponendo:

$$\overline{\mathrm{co}}(f)(x) := \sup_{g \in \Gamma(f)} g(x)$$
$$\text{dove } \Gamma(f) = \{g : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty] : g \text{ convessa, s.c.i. }, g \leq f \text{ in } \mathbb{X}\}.$$

È evidente che $\overline{\mathrm{co}}(f) \leq f$. Inoltre $\overline{\mathrm{co}}(f)$ è convessa e semicontinua inferiormente in quanto estremo superiore di funzioni convesse s.c.i. (dunque $\overline{\mathrm{co}}(f) \in \Gamma(f)$).

3.2.13 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$. Si ha:*

$$\mathrm{epi}(\overline{\mathrm{co}}(f)) = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{epi}(f)).$$

Dimostrazione. Se $f \equiv +\infty$ è semplice vedere che $\overline{\text{co}}(f)) \equiv +\infty$, dunque entrambi gli insiemi sono vuoti e vale la tesi. Supponiamo dunque che esista x_0 con $f(x_0) < +\infty$.

Facciamo vedere che se $K \subset \mathbb{X} \times \mathbb{R}$ è un convesso chiuso contenente $\text{epi}(f)$, allora:

$$(x, y) \in K \Rightarrow (x, y') \in K \qquad \forall y' \geq y. \tag{3.7}$$

Per questo prendiamo $\eta \geq f(x_0)$, di modo che $(x_0, \eta) \in \text{epi}(f) \subset K$. Prendiamo $t_\eta := \dfrac{y' - y}{\eta - y}$ ($\to^+ 0$ se $\eta \to +\infty$) e prendiamo $x_\eta := x + t_\eta(x_0 - x)$. Se $\eta \geq y'$ si ha $0 \leq t_\eta \leq 1$ e $(x_\eta, y') = (x, y) + t_\eta((x_0, \eta) - (x, y))$, perché $y + t_\eta(\eta - y) = y'$: ne segue $(x_\eta, y') \in K$. Mandando $\eta \to +\infty$: $(x_\eta, y') \to (x, y')$ dunque $(x, y') \in K$, a causa della chiusura di K.

La proprietà (3.7) implica che $K = \text{epi}(g_K)$, dove $g_K(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in K\}$; in particolare g_K è convessa, s.c.i. e $g_K \leq f$. D'altra parte è evidente che se $g : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ è convessa, s.c.i. e $g \leq f$, allora l'insieme $K_g := \text{epi}(g)$ è convesso, chiuso e contiene $\text{epi}(f)$: Se ne ricava che:

$$\overline{\text{co}}(\text{epi}(f)) = \bigcap_{\substack{K \text{ convesso chiuso} \\ \text{epi}(f) \subset K}} K = \bigcap_{\substack{g \text{ convessa s.c.i.} \\ g \leq f}} \text{epi}(g) = \text{epi}\left(\sup_{\substack{g \text{ convessas.c.i.} \\ g \leq f}} g \right) = \text{epi}(\overline{\text{co}} f).$$

$\square$

3.2.14 Definizione. Diciamo che $l : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ è una funzione affine se $l(x) = \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + c$ per opportuni $x^* \in \mathbb{X}^*$ e $c \in [-\infty, +\infty]$ (consideriamo affini anche le due funzioni $l \equiv -\infty$ e $l \equiv +\infty$; queste sono le uniche ad avere valori infiniti). Se $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ poniamo:

$$\Gamma_a(f) := \{l : \mathbb{X} \to \mathbb{R} : \ l \text{ affine, } l \leq f \text{ in } \mathbb{X}\}.$$

3.2.15 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$. Allora per ogni x in $\mathbb{X}$:*

$$\overline{\text{co}}(f)(x) = \sup_{l \in \Gamma_a(f)} l(x).$$

Dimostrazione. Dato che $\Gamma_a(f) \subset \Gamma(f)$ si ha:

$$\overline{co}(f)(x) = \sup_{g \in \Gamma(f)} g(x) \geq \sup_{g \in \Gamma_a(f)} g(x) =: \overline{co}_a(f)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Supponiamo per assurdo che non valga l'eguaglianza. Allora esiste $x_0 \in \mathbb{X}$ tale che $\overline{co}(f)(x_0) > \overline{co}_a(f)(x_0)$. Possiamo prendere $y_0 \in \mathbb{R}$ con $\overline{co}(f)(x_0) > y_0 > \overline{co}_a(f)(x_0)$. Per definizione esiste $g \in \mathbb{K}(f)$ tale che $g(x_0) > y_0$ e allora per la (3.2.11) esiste x_* in $\mathbb{X}^*$ tale che:

$$(f(x) \geq) \ g(x) \geq y_0 + \langle (x - x_0, \times \rangle =: l(x) \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Ma allora $l \in \Gamma_a(f)$ da cui $\overline{co}_a(f)(x_0) \geq l(x_0) = y_0$ che è assurdo. $\square$

3.2.16 Osservazione. $\Gamma_a(f) = \Gamma_a(\overline{\text{co}}(f))$. Infatti da $f \geq \overline{\text{co}}(f)$ segue $\Gamma_a(f) \supset \Gamma_a(\overline{\text{co}}(f))$. Viceversa se $l \in \Gamma_a(f)$ allora $\overline{\text{co}}(f) \geq l$ per la (3.2.15), cioè $l \in \Gamma_a(\overline{\text{co}}(f))$.

3.2.17 Osservazione. Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$. Non è detto che valga:

$$S \in \mathscr{S}(\text{epi}(f)) \Leftrightarrow S = \text{epi}(l) \text{ con } l \in \Gamma_a(f). \tag{3.8}$$

Prendiamo infatti per esempio $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ con $f(x) = +\infty$ per ogni x eccetto $x = 0$ e $f(0) = 0$ ($f = \chi_{\{0\}}$). Allora $\text{epi}(f) = \{(0, y) : y \geq 0\}$ e il semispazio $S := \{(x, y) : x \geq 0\}$ contiene $\text{epi}(f)$, ma S non è epigrafico di nessuna $l : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, tanto meno di una l affine (S è "verticale").

3.2.18 Proposizione. *Sia* $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ *e sia* x_0 *in* $\mathbb{X}$.

(a) *Se* $f(x_0) = \overline{\mathrm{co}}(f)(x_0)$, *allora* f *è s.c.i. in* x_0.

(b) *Se* f *è convessa vale anche il viceversa.*

Dimostrazione. Per le definizioni si ha $f \geq \bar{f} \geq \overline{\mathrm{co}}(f)$.

Se $f(x_0) = \overline{\mathrm{co}}(f)(x_0)$, allora $\bar{f}(x_0) = f(x_0)$ dunque f è s.c.i. .

Se f è convessa, allora $\overline{f}$ è convessa, s.c.i. e $\overline{f} \leq f$ (cioè $\bar{f} \in \Gamma(f)$) e quindi $\overline{\mathrm{co}}(f) \geq \overline{f}$. Se f è s.c.i. in x_0 allora $f(x_0) = \bar{f}(x_0)$ da cui $f(x_0) = \overline{\mathrm{co}}(f)(x_0)$. □

3.2.19 Osservazione. Supponiamo che $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ sia convessa e semicontinua inferiormente in un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Allora per ogni $y_0 < f(x_0)$ esiste $x^* \in \mathbb{X}^*$ tale che

$$f(x) \geq y_0 + \langle x - x_0, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Per vederlo basta applicare l'osservazione (3.2.11) alla funzione $\overline{\mathrm{co}}(f)$, ricordando che $\overline{\mathrm{co}}(f) \leq f$ e $\overline{\mathrm{co}}(f)(x_0) = f(x_0)$

Esaminiamo ora le proprietà di continuità di una funzione convessa. Generalizzeremo quanto trovato nel caso di dimensione finita, tenendo peratro presente che in generale $\mathcal{D}(f)$ può avere parte interna vuota anche in casi interessanti.

3.2.20 Lemma. *Sia* $x_0 \in \mathbb{X}$ *e sia* U_0 *un intorno aperto convesso di* x_0. *Sia* $f : U_0 \to [-\infty, +\infty[$ *convessa e superiormente limitata in* U_0. *Allora o* $f(x) = -\infty$ *per ogni* $x \in U_0$ *oppure* $f(x) > -\infty$ *per ogni* $x \in U_0$ *e* f *è continua in* U_0.

Dimostrazione. Mostriamo che se $f(x_0) = -\infty$ allora $f(x) = -\infty$ per ogni $x \in U_0$. In effetti preso un $x \in U_0$ esiste $\bar{t} > 1$ tale che $\bar{u} := x_0 + \bar{t}(x - x_0) \in U_0$ (perché U_0 è aperto). Ma allora $f(x_0 + t(\bar{x} - x_0)) = -\infty$ per ogni $t \in [0, 1[$ (da (3.1.7)). Dato che per $t = 1/\bar{t}$ si ottiene x, ne segue $f(x) = -\infty$.

Supponiamo allora $f(x_0) > -\infty$ e sia $a_0 := \sup\limits_{x \in U_0} f(x)$. Sia W un intorno convesso e simmetrico di zero tale che $x_0 + W \subset U_0$. Fissiamo ε con $0 < \varepsilon < 1$ e sia $h \in \varepsilon W \subset W$. Allora $x_0 + \dfrac{h}{\varepsilon}$, $x_0 - \dfrac{h}{\varepsilon}$ $x_0 + h$ e $x_0 - h$ sono in U_0. Usando la convessità:

$$\begin{aligned}
x_0 + h = x_0 + \varepsilon \frac{h}{\varepsilon} &\Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0) + \varepsilon \left(f\left(x_0 + \frac{h}{\varepsilon} \right) - f(x_0) \right) \\
&\leq f(x_0) + \varepsilon (a_0 + |f(x_0)|); \\
x_0 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{1+\varepsilon} (x_0 + h) &\Rightarrow f(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f\left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{1+\varepsilon} f(x_0 + h) \\
&\Leftrightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0) - \varepsilon \left(f\left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon} \right) - f(x_0) \right) \geq f(x_0) - \varepsilon (a_0 + |f(x_0)|).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[\qquad h \in \varepsilon W \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \varepsilon (a_0 + |f(x_0)|)$$

da cui la continuità di f in x_0. Questo ragionamento si può ripetere per ogni x in U_0. □

3.2.21 Proposizione. *Sia* $f : K \to [-\infty, +\infty]$ *una funzione convessa. Allora sono equivalenti:*

(a) $\mathcal{D}(f)$ *ha parte interna non vuota e* f *è continua su* $\mathring{\mathcal{D}}(f)$;

(b) esistono un punto x_0 e un un suo intorno U_0 tali che $f(x_0) \neq -\infty$, $U_0 \subset K$ e $\sup\limits_{x\in U} f(x) < +\infty$.

Dimostrazione. Chiaramente (a) $\Rightarrow$ (b). Viceversa siano x_0 e U_0 come nell'ipotesi di (b). Sia $x \in \mathring{\mathcal{D}}(f)$. Allora esiste $t_1 > 1$ tale che $x_1 := x_0 + t_1(x - x_0) \in \mathcal{D}(f)$. Prendiamo $W := \dfrac{t_1 - 1}{t_1}(U_0 - x_0)$; W è un intorno di zero tale che $U_0 = x_0 + \dfrac{t_1}{t_1 - 1}W$. Se $h \in W$ possiamo scrivere $x + h = \dfrac{1}{t_1}x_1 + \dfrac{t_1 - 1}{t_1}\tilde{x}$, dove

$$\tilde{x} = \frac{t_1}{t_1 - 1}(x+h) - \frac{1}{t_1 - 1}x_1 = \frac{t_1}{t_1 - 1}(x+h) - \frac{1}{t_1 - 1}(x_0 + t_1(x - x_0)) = x_0 + \frac{t_1}{t_1 - 1}h \in U_0,$$

e quindi

$$f(x+h) \leq \frac{1}{t_1}f(x_1) + \frac{t_1}{t_1 - 1}f(\tilde{x}) \leq \frac{1}{t_1}f(x_1) + \frac{t_1}{t_1 - 1}\sup_{U_0} f \qquad \forall h \in W.$$

Dunque f è limitata superiormente su $x + W$ e $f(x) > -\infty$; per il Lemma (3.2.20) f è continua in $x + W$. $\square$

3.2.22 Osservazione. Sia $f : K \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa. Allora

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f)}}} \subset \left\{(x,y) : x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}, y > f(x)\right\}.$$

Se poi esiste $\bar{x} \in \mathcal{D}(f)$ con f continua in $\bar{x}$, allora vale l'eguaglianza.

Dimostrazione. Se $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f)}}}$ esistono U intorno di x_0 e $\delta > 0$ con la proprietà $U \times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\subset \mathrm{epi}(f)$. Questo implica $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$ e $f(x) \leq y_0 - \delta < y_0$ per ogni $x \in U$; in particolare $f(x_0) < y_0$. Abbiamo dimostrato l'inclusione.

Per l'inclusione opposta prendiamo $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$ e $y_0 > f(x_0)$. Per il lemma (3.2.21) f è continua in x_0 e quindi esistono U intorno di x_0 e $\delta > 0$ con $y_0 > f(x)$ per ogni $x \in U$. Ne segue $U \times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\subset \mathrm{epi}(f)$ e quindi $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f)}}}$. $\square$

3.2.23 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ convessa e semicontinua inferiormente. Allora f è continua in $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathring{\mathcal{D}}(f)$. Dato $c > f(x_0)$ poniamo $W_0 := \{h : f(x_0 + h) \leq c\}$. W_0 contiene 0, è convesso e per la semicontinuità di f è chiuso. Se pongo $\tilde{W} := W_0 \cap (-W_0)$, $\tilde{W}$ ha le stesse proprietà e in più è simmetrico. Dico che $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} n\tilde{W} = \mathbb{X}$. Infatti se $x \in \mathbb{X}$, allora $x_0 + tx \in \mathcal{D}(f)$ per $|t| \leq \bar{t}$, se $\bar{t}$ è abbastanza piccolo. Allora la funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tx)$ è ben definita convessa su $[-\bar{t}, \bar{t}]$ Per i risultati in dimensione 1, φ è continua in $]-\bar{t}, \bar{t}[$ e dunque $\varphi(t) < c$ per $t \in]-\bar{t}_1, \bar{t}_1[$, quando $\bar{t}_1$ è piccolo. Questo implica che $\pm\frac{1}{n}x \in W_0$ per $n \geq 1/\bar{t}_1$ e quindi $x \in n\tilde{W}$ per $n \geq 1/\bar{t}_1$. Per la proprietà di Baire almeno uno degli $n\tilde{W}$ ha parte interna non vuota. Ma per la simmetria e la convessità ne segue che 0 è nella parte interna di $n\tilde{W}$ e quindi di $\tilde{W}$. Se $\tilde{U} := x_0 + \tilde{W}$ si ha allora che $\tilde{U}$ è un intorno di x_0 in cui $f \leq c$; per il teorema precedente f è continua in $\mathring{\mathcal{D}}(f)$. $\square$

3.2.24 Osservazione. Supponiamo che $\mathbb{X}$ sia un Banach ed $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ sia convessa, semicontinua inferiormente con $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}} \neq \emptyset$. Sia $D \subset \mathbb{X}$ denso in $\mathbb{X}$. Allora:

$$\inf f = \inf_D f. \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x) \geq c$ per ogni $x \in D$. Per il teorema (3.2.23) si ha $f(x) \geq c$ per ogni $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$. Fissiamo un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$. Se ora $x \in \mathcal{D}(f)$ sappiamo che il segmento $]x, x_0]$ è contenuto in $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$ (cfr (0.2.7)): dunque $\varphi(t) := f(x + t(x_0 - x) \geq c$ per ogni $t \in]0, 1]$. Ma la funzione di una variabile φ è semicontinua superiormente su $[0, 1]$ (cfr (1.1.7)), da cui $f(x) = \varphi(0) \geq c$. □

Il seguente risultato è alla base di innumerevoli applicazioni.

3.2.25 Proposizione. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $f : X \to]-\infty, \infty]$ convessa, s.c.i. propria per cui valga:*

$$\lim_{\|x\|_X \to \infty} f(x) = +\infty. \tag{3.10}$$

Allora f ammette minimo finito: esiste $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = \inf_X f \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dato $c \in \mathbb{R}$ il sottolivello $f^c := \{x \in X : f(x) \leq c\}$ è convesso ed è anche chiuso a causa della semicontinuità; dunque f^c è debolmente chiuso. Dato che f è propria esiste un c per cui $f^c \neq \emptyset$. A causa della (3.10) f^c è limitato e quindi, mettendo tutto insieme, f^c è debolmente compatto, visto che X è riflessivo. Dato che f è convessa s.c.i. essa è anche debolmente s.c.i. e quindi ha minimo su f^c. Ne segue la tesi. □

3.3 Sottodifferenziale

Anche in questo paragrafo tutti gli spazi sono localmente convessi e di Hausdorff e si indicherà $\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} = x^*(x)$ per $x \in \mathbb{X}$, $x^* \in \mathbb{X}^*$. Dato che i valori $-\infty$ vengono assunti in casi decisamente patologici le funzioni avranno sempre valore in $]-\infty, \infty]$. Inoltre (a meno che non sia differentemente affermato) considereremo sempre f definite su tutto lo spazio (ci si può sempre ricondurre a questa situazione ponendo $f(x) = +\infty$ in tutti i punti fuori dal dominio - naturalmente questa estensione potrebbe creare problemi con la semicontinuità, ma questo verrà eventualmente affrontato caso per caso).

3.3.1 Definizione. Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa (???). Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e sia $x_0^* \in \mathbb{X}^*$. Diciamo che x_0^* è *un sottodifferenziale* per f nel punto x_0 se

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathbb{X} \tag{3.11}$$

(naturalmente sarebbe sufficiente chiedere la diseguaglianza per tutti gli x in $\mathcal{D}(f)$). Indicheremo con $\partial f(x_0)$ l'insieme di tutti i sottodifferenziali per f in x_0. Tale insieme può naturalmente essere vuoto. Conveniamo che $\partial f(x_0) = \emptyset$ se $x_0 \notin \mathcal{D}(f)$, di modo che ∂f è un'applicazione da $\mathbb{X}$ nelle parti di $\mathbb{X}^*$.

Chiameremo (con un abuso di linguaggio) $\partial f(x_0)$ *il sottodifferenziale di* f in x_0. Chiameremo *dominio* di ∂f l'insieme $\mathcal{D}(\partial f) := \{x \in \mathbb{X} : \partial f(x) \neq \emptyset\}$. Se $x_0 \in \mathcal{D}(\partial f)$ diremo che f è *sottodifferenziabile* in x_0.

3.3.2 Osservazione. Se $x_0 \in \mathbb{X}$ allora $\partial f(x_0)$ è un sottoinsieme convesso e chiuso di $(\mathbb{X}^*, w^*)$.

3.3.3 Osservazione. Nella (3.11) basterebbe prendere $x \in \bar{U}$ dove $\bar{U}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ tale che $x_0 \in U$ e per ogni $x \in \mathbb{X}$ esiste $t_x > 0$ tale $x_0 + t(x - x_0) \in \bar{U}$ per tutte le $x \leq t_x$. ($U - x_0$ è assorbente). Per esempio bastano le x di un intorno di x_0. Infatti dato un $x \in \mathcal{D}(f)$ e $t \in]0, t_x[$ possiamo applicare la (3.11) a $x_0 + t(x - x_0)$ da cui:

$$\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq \frac{f(x_0 + t(x - x_0))}{t} \leq f(x) - f(x_0),$$

dove la seconda diseguaglianza segue dal fatto che i rapporti incrementali di una funzione convessa unidimensionale sono crescenti.

3.3.4 Osservazione. Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ convessa. L'operatore (multivoco) ∂f è monotono, cioè

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{X}^* \text{ con } y_i \in \partial f(x_i), i = 1, 2.$$

Per vederlo basta ragionare come in (1.3.9).

3.3.5 Osservazione. Siano f convessa, $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e $x_0^* \in \mathbb{X}^*$. Allora:

$$x_0^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = \overline{\text{co}}(f)(x_0) \text{ e } = x_0^* \in \partial\overline{\text{co}}(f)(x_0) \tag{3.12}$$

Infatti la "$\Leftarrow$" segue dal fatto che $\overline{\text{co}}(f)(x_0) \leq f$. Viceversa è chiaro che, se $x_0^* \in \partial f(x_0)$, allora f è s.c.i. in x_0 e quindi $f(x_0) = \overline{\text{co}}(f)(x_0)$. Inoltre, se $x_0^* \in \partial f(x_0)$, si ha:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \ \forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow \overline{\text{co}}(f)(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \ \forall x \in \mathbb{X}$$

da cui, se $f(x_0) = \overline{\text{co}}(f)(x_0)$ si deduce $x_0^* \in \partial\overline{\text{co}}(f)(x_0)$.

3.3.6 Definizione. Sia $K \subset \mathbb{X}$ un convesso (????) e sia $x \in K$. Chiamiamo *cono normale a K in x* il sottodifferenziale della funzione indicatrice di K nel punto x:

$$N_K(x) := \partial\chi_K(x) = \left\{\nu^* \in \mathbb{X}^* \colon \langle x' - x, \nu^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq 0 \ \forall x' \in K\right\}.$$

In effetti è facile vedere che vale l'eguaglianza a destra, in particolare che $N_K(x)$ è un cono: $x^* \in N_K(x) \Rightarrow tx^* \in N_K(x)$ per ogni $t \geq 0$. In particolare $0 \in N_K(x)$ per ogni $x \in K$. Se $x \in \mathring{K}$ allora $N_K(x) = \{0\}$ (lo si vede come nella dimostrazione di (1.3.2)).

3.3.7 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa e siano $x \in \mathbb{X}$ e $x^* \in \mathbb{X}^*$. Allora:*

$$x^* \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x^*, -1) \in N_{\text{epi}(f)}((x, f(x))).$$

Dimostrazione. Sia $x^* \in \partial f(x)$; se $(x', y') \in \text{epi}(f)$:

$$\langle (x', y') - (x, f(x)), (x^*, -1) \rangle = \langle x' - x, x^* \rangle - (y' - f(x)) \leq \langle x' - x, x^* \rangle - (f(x') - f(x)) \leq 0.$$

e quindi $(x^*, -1) \in N_{\text{epi}(f)}((x, f(x)))$. Il viceversa si fa in modo analogo con $y' = f(x')$. $\square$

3.3.8 Osservazione. Supponiamo che $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ sia una funzione. Siano $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, $y_0 \geq f(x_0)$, $w_0^* \in \mathbb{X}^*$ e $\eta_0^* \in \mathbb{R}$.

(a) Supponiamo $(w_0^*, \eta_0^*) \in N_{\text{epi}(f)}((x_0, y_0))$. Allora $\eta_0^* \leq 0$. Se poi $y_0 > f(x_0)$ deve essere $\eta_0^* = 0$.

(b) Si ha
$$(w_0^*, 0) \in N_{\text{epi}(f)}((x_0, y_0)) \Leftrightarrow w_0^* \in N_{\mathcal{D}(f)}(x_0)$$

In particolare se $x_0 \in \widehat{\mathring{\mathcal{D}(f)}}$ e $x_0^* \neq 0$, allora $\eta_0^* < 0$ e $y_0 = f(x_0)$, perché in tal caso $N_{\mathcal{D}(f)}(x_0) = \{0\}$.

Dimostrazione. Per la definizione del cono normale si ha:

$$\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + (y - y_0)\eta_0^* \leq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f), \quad \forall y \geq f(x).$$

Prendendo $x = x_0$ e $y > y_0$ si trova $(y - y_0)\eta_0^* \leq 0$ e dunque $\eta_0^* \leq 0$. Se $y_0 > f(x_0)$ si può prendere y in $[f(x_0), y_0[$ ottenendo $\eta_0^* \geq 0$, dunque $\eta_0^* = 0$.

Se $\eta_0^* = 0$ la diseguaglianza sopra diventa

$$\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

che è equivalente a $x_0^* \in N_{\mathcal{D}(f)}(x_0)$. $\square$

3.3.9 Osservazione. Siano $f, g : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ due funzioni convesse e sia $\lambda > 0$. Allora

- $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$;
- $\partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subset \partial(f+g)(x_0)$, per ogni $x \in \mathbb{X}$.

3.3.10 Teorema. *Siano* $f_1, f_2 : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ *due funzioni convesse e supponiamo che esista* $\bar{x} \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ *tale che* f_1 *sia continua in* $\bar{x}$. *Allora*

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g).$$

Dimostrazione. Prendiamo un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) = \mathcal{D}(f_1 + f - 2)$. Per l'Osservazione (3.3.9) vale $\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \subset \partial(f_1 + f_2)(x_0)$. Dobbiamo dimostrare l'inclusione opposta e cioè far vedere che, se $x_0^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0)$, si può scrivere $x_0^* = x_1^* + x_2^*$ con $x_i^* \in \partial f_i(x_0)$ $(i = 1, 2)$. Preso dunque un tale x_0^* si ha:

$$f_1(x) + f_2(x) \geq f_1(x_0) + f_2(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.13}$$

Definiamo $\bar{f}_1(x) := f_1(x) - f_1(x_0) - \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$; è chiaro che f_1 è convessa ed è continua in $\bar{x}$; in particolare $\bar{x}$ è interno a $\mathcal{D}(\bar{f}_1)$. Sia inoltre $\bar{f}_2(x) := f_2(x) - f_2(x_0)$; anche $\bar{f}_2$ è convessa. Per la (3.13) si ha $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 \geq 0$. Consideriamo i due convessi di $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$:

$$K_1 := \operatorname{epi}(\bar{f}_1), \qquad K_2 := \left\{(x, y) : (x, -y) \in \operatorname{epi}(\bar{f}_2)\right\}.$$

Per (3.2.22) $(x, y) \in \overset{\circ}{\widehat{K_1}}$ se e solo se x è interno a $\mathcal{D}(\bar{f}_1)$ e $y > \bar{f}_1(x)$. Dunque $\overset{\circ}{\widehat{K_1}} \neq \emptyset$, dato che $\bar{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\bar{f}_1)$. Dico che $\overset{\circ}{\widehat{K_1}} \cap K_2 = \emptyset$. Infatti se $(x, y) \in \overset{\circ}{\widehat{K_1}} \cap K_2$ si avrebbe $\bar{f}_1(x) < y$ e $\bar{f}_2(x) \leq -y$ da cui $\bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x) < 0$ che contrasta con (3.13). Per la prima versione geometrica di Hahn-Banach esiste un elemento non nullo di $(\mathbb{X} \times \mathbb{R})^*$ $(\simeq \mathbb{X}^* \times \mathbb{R})$ che separa K_1 e K_2: questo equivale a dire che esistono $w_0^* \in \mathbb{X}^*$, $\eta_0^* \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{gathered}\langle x', w_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0^* y' \leq \langle x'', w_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} - \eta_0^* y'' \\ \forall x' \in \mathcal{D}(\bar{f}_1),\ \forall x'' \in \mathcal{D}(\bar{f}_2),\ \forall y' \geq \bar{f}_1(x'),\ \forall y'' \geq \bar{f}_2(x'').\end{gathered} \tag{3.14}$$

Se si prende $x' = x \in \mathcal{D}(\bar{f}_1)$, $y' = y \geq \bar{f}_1(x)$, $x'' = x_0$, $y'' = \bar{f}_2(x_0) = 0$ si ottiene:

$$\langle x - x_0, w_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0^*(y - 0) \leq 0 \qquad \forall (x, y) \in \operatorname{epi}(\bar{f}_1),$$

dunque $(w_0^*, \eta_0^*) \in N_{\operatorname{epi}(\bar{f}_1)}(x_0, \bar{f}_1(x_0))$ $(\bar{f}_1(x_0) = 0)$. Sappiamo che $\eta_0^* \leq 0$ per (3.3.8). Se fosse $\eta_0^* = 0$, utilizzando la (3.14) con $x' = \bar{x} + h$, $y' = \bar{f}_1(\bar{x} + h)$, $x'' = \bar{x}$ e $y'' = \bar{f}_2(\bar{x})$, dove h varia in un intorno di zero U tale che $\bar{x} + U \subset \mathcal{D}(\bar{f}_1)$, si avrebbe:

$$\langle h, w_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq 0 \qquad \forall h \in U,$$

da cui $w_0^* = 0$, che è impossible. Allora possiamo definire $x_2^* := \dfrac{w_0^*}{\eta_0^*}$ e dato che $N_{\operatorname{epi}(\bar{f}_1)}(x_0)$ è un cono si ha $(-x_2^*, -1) \in N_{\operatorname{epi}(\bar{f}_1)}(x_0)$. Per la Proposizione (3.3.7) si ha $-x_2^* \in \partial \bar{f}_1(x_0)$. Usando la definizione di $\bar{f}_1$:

$$f_1(x) - f_1(x_0) - \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \geq \langle -x_2^*, x - x_0 \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f_1)$$

che è equivalente a $x_0^* - x_2^* \in \partial f_1(x_0)$. Analogamente se $x'' = x \in \mathcal{D}(\bar{f}_2)$, $y'' = y \leq \bar{f}_2(x)$, $x' = x_0$, $y' = \bar{f}_1(x_0) = 0$ si ottiene da (3.14):

$$\langle x - x_0, -w_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + (y - 0)\eta_0^* \leq 0 \qquad \forall (x, y) \in \operatorname{epi}(\bar{f}_2),$$

cioè $(-w_0^*, \eta_0^*) \in N_{\operatorname{epi}(\bar{f}_2)}(x_0, \bar{f}_2(x_0))$ $(\bar{f}_2(x_0) = 0)$. Dunque $(x_2^*, -1) \in N_{\operatorname{epi}(\bar{f}_2)}(x_0)$ da cui $x_2^* \in \partial \bar{f}_2(x_0) = \partial f_2(x_0)$. In definitiva x_0^* è somma di $x_0^* - x_2^* \in \partial f_1(x_0)$ e $x_2^* \in \partial f_2(x_0)$. $\square$

3.3.11 Esempio. Prendiamo $f, g : \mathbb{R} \to]-\infty, \infty]$ definite da:

$$f(x) := \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0, \\ +\infty & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

f e g sono convesse e continue sul loro rispettivo dominio (e anche semicontinue inferiormente su $\mathbb{R}$). f è sottodifferenziabile (anzi differenziabile) per $x > 0$, non è sottodifferenziabile per $x \leq 0$. g è sottodifferenziabile (anzi differenziabile) per $x < 0$, non è sottodifferenziabile per $x \geq 0$. La somma $f + g$ è l'indicatrice di $\{0\}$ e quindi è sottodifferenziabile in $x = 0$ (e solo lì) e $\partial(f+g)(0) = \mathbb{R}$. Dunque non è vero che $\partial(f+g)(0) = \partial f(0) + \partial g(0)$ ($\partial f(0) = \partial g(0) = \emptyset$).

3.3.12 Corollario. *Siano K_1 e K_2 due convessi e supponiamo che $\mathring{K}_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Allora*

$$N_{K_1 \cap K_2}(x) = \{\nu_1 + \nu_2 : \nu_1 \in N_{K_1}(x), \nu_2 \in N_{K_2}(x)\} \qquad \forall x \in K_1 \cap K_2.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema (3.3.10) a $f := \chi_{K_1}$ e $g := \chi_{K_2}$. □

3.3.13 Proposizione. *Se $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ è convessa ed esiste un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ in cui f è continua (dunque $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$), allora f è sottodifferenziabile in tutti i punti di $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$. Notiamo che f è anche continua in tutto $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$ per la Proposizione* (3.2.21).

Dimostrazione. Prendiamo $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f)}}$ e introduciamo la funzione $g := \chi_{\{x_0\}}$. La somma $(f+g)(x)$ vale $f(x_0)$ se $x = x_0$ e $+\infty$ altrove. È immediato allora che $\partial(f+g)(x_0) = \mathbb{X}^*$. Per il Teorema (3.3.10) $\partial(f+g)(x_0) = \partial f(x_0) + \partial g(x_0)$: in particolare $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. □

3.3.14 Proposizione. *Siano $f_1, f_2 : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ convesse e poniamo $f := \max(f_1, f_2)$. Supponiamo che esista $\bar{x} \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$ tale che f_1 è continua in $\bar{x}$. Allora dati x_0 in $\mathcal{D}(f)$ e x_0^* in $\mathbb{X}^*$ si ha che $x_0^* \in \partial f(x_0)$ se e solo se vale una delle seguenti alternative:*

(a) $f(x_0) = f_2(x_0)$ ed esistono $\nu_1^* \in N_{\mathcal{D}(f_1)}(x_0)$ e $x_2^* \in \partial f_2(x_0)$ tali che $x_0^* = \nu_1^* + x_2^*$;

(b) $f(x_0) = f_1(x_0)$ ed esistono $x_1^* \in \partial f_1(x_0)$ e $\nu_2^* \in N_{\mathcal{D}(f_2)}(x_0)$ tali che $x_0^* = x_1^* + \nu_2^*$;

(c) $f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$ ed esistono $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ con $t_1 + t_2 = 1$, esistono $x_1^* \in \partial f_1(x_0)$ e $x_2^* \in \partial f_2(x_0)$ per cui

$$x_0^* = t_1 x_1^* + t_2 x_2^*$$

Si noti che se $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(f_i)}}$ allora $N_{\mathcal{D}(f_i)}(x_0) = \{0\}$. Se poi f_i è continua in x_0 vale anche $\partial f_i(x_0) \neq \emptyset$, a causa della Proposizione (3.3.13). *Ne segue che, se entrambe le f_i sono continue in x_0 e se $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, allora si può scrivere:*

$$\partial f(x_0) = \{t_1 x_1^* + t_2 x_2^* : t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = 1, x_1^* \in \partial f_1(x_0), x_2^* \in \partial f_2(x_0)\}.$$

Dimostrazione. Indichiamo $y_0 := f(x_0)$. Ricordiamo che $\mathrm{epi}(f) = \mathrm{epi}(f_1) \cap \mathrm{epi}(f_2)$. Se vale (a) si ha $(\nu_1^*, 0) \in N_{\mathrm{epi}(f_1)}(x_0, y_0)$ (per la (b) di (3.3.8) e perché $y_0 \geq f_1(x_0)$) e $(x_2^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f_2)}(x_0, y_0)$ (per la (3.3.7) e perché $y_0 = f_2(x_0)$). Per (3.3.12) (la parte facile) si ha che $(\nu_1^* + x_2^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(x_0, y_0) = N_{\mathrm{epi}(f_1) \cap \mathrm{epi}(f_2)}(x_0, y_0)$. Dunque (di nuovo per la (3.3.7)) $\nu_1^* + x_2^* \in \partial f(x_0)$. Stesso discorso se vale (b).

Se invece vale (c), usando la (3.3.7) e il fatto che le normali formano un cono, abbiamo $t_i(x_i^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f_i)}(x_0, y_0)$, per $i = 1, 2$ (nota che $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$). Per (3.3.12) si ha che $t_1(x_1^*, -1) + t_2(x_2^*, -1) = (t_1x_1^* + t_2x_2^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(x_0, y_0)$. Di nuovo per (3.3.7) ne segue $t_1x_1^* + t_2x_2^* \in \partial f(x_0)$.

Viceversa sia $x^* \in \partial f(x_0)$; dunque $(x^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(x_0, y_0)$. Dato che f_1 è continua in $\bar{x}$, epi(f_1) ha parte interna dunque, per (3.3.12), si ottiene che esistono $w_i^* \in \mathbb{X}^*$, $\eta_i^* \in \mathbb{R}$, con $(w_i^*, \eta_i^*) \in N_{\mathrm{epi}(f_i)}(x_0, y_0)$ (per $i = 1, 2$) e tali che $(x^*, -1) = (w_1^*, \eta_1^*) + (w_2^*, \eta_2^*)$. Per la (a) di (3.3.8) si ha $\eta_i^* \leq 0$. Supponiamo che $\eta_1^* = 0$. Allora $\eta_2^* = -1$ e per la (a) di (3.3.8) deve essere $f_2(x_0) \geq y_0$ e dunque $f_2(x_0) = y_0$. Per la (b) di (3.3.8) $\nu_1^* := w_1^* \in N_{\mathcal{D}(f_1)}(x_0)$, inoltre $x_2^* := w_2^* \in \partial f_2(x_0)$. Ne segue che vale (a). Analogamente se $\eta_2^* = 0$ vale la (b). Se invece entrambi gli η_i sono negativi ricaviamo $f_i(x_0) \geq y_0$ e ponendo $x_1^* := \dfrac{w_i^*}{-\eta_i}$. si ha (le normali formano un cono): $(x_i^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}(f_i)}(x_0, y_0)$ da cui

$$(x_0^*, -1) = -\eta_1^*(x_1^*, -1) - \eta_2^*(x_2^*, -1).$$

Ne segue la (c) con $t_i = -\eta_i$. □

3.3.15 Osservazione. Il controesempio (3.3.11) serve anche come controesempio all'enunciato precedente. In quel caso infatti non esiste $\bar{x}$ come richiesto.

Un esempio semplice per vedere il significato di (3.3.14) è il caso di $f_1(x) := x$, $f_2(x) := -x$ (in $\mathbb{R}$), per cui $f(x) = |x|$. Si vedere allora che $\partial f(x)(0) = [-1, 1]$, come previsto dalla Proposizione (3.3.14). In questo caso le f_i sono continue.

Un esempio in cui vale la (3.3.14) senza la continuità di entrambe le f_i è dato da:

$$f_1(x) := x, \qquad f_2(x) := \chi_{]-\infty,0]}(x) - \sqrt{|x|},$$

si vede facilmente che le f_i sono convesse e :

$$\partial f_1(x) = \{1\}\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \partial f_2(x) = \left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\} \text{ se } x > 0,\ \partial f_2(x) = \emptyset, \text{ se } \leq 0.$$

Inoltre $f := \max(f_1, f_2) = f_1 + \chi_{]-\infty,0]}$ da cui (usando il teorema di somma (3.3.10)):

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial\chi_{]-\infty,0]}(x) = \partial f_1(x) + N_{]-\infty,0]}(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x > 0, \\ ]-\infty, 1] & \text{se } x = 0, , \\ \emptyset & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

in accordo col caso (b) della (3.3.14).

3.3.16 Proposizione. *Siano $g : \mathbb{Y} \to]-\infty, \infty]$ convessa e $L : \mathcal{D}(L) \to \mathbb{Y}$ un operatore lineare illimitato con dominio $\mathcal{D}(L)$ denso. Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ definito da*

$$f(x) := \begin{cases} g(Lx) & \text{se } x \in \mathcal{D}(L), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È chiaro che $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathcal{D}(L) \colon Lx \in \mathcal{D}(g)\}$. Supponiamo che esista $\bar{x} \in \mathcal{D}(L)$ tale che g è continua in $\bar{y} := L\bar{x}$. Allora per ogni $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, posto $y_0 := Lx_0$, si ha:

$$\partial f(x_0) = L^*\left(\partial g(y_0)\right)$$

(nota che, se $x_0 \in \mathcal{D}(L)$, y_0 esiste ed è in $\mathcal{D}(g)$). Dato che $L^*(\emptyset) = \emptyset$, la formula sopra significa che $x_0^* \in \partial f(x_0)$ se e solo se esiste $y_0^* \in \partial g(y_0)$ tale che $y_0^* \in \mathcal{D}(L^*)$ e $x_0^* = L^*y_0^*$.

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in \mathcal{D}(L)$ tale che $y_0 := Lx_0 \in \mathcal{D}(g)$.

Supponiamo che $y_0^* \in \partial g(y_0)$ e che $y_0^* \in \mathcal{D}(L^*)$. Allora per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$:

$$f(x) = g(Lx) \geq g(y_0) + \langle Lx - y_0, y_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} = f(x_0) + \langle x - x_0, L^* y_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$$

e quindi $x_0^* := L^* y_0^* \in \partial(f)(x_0)$.

Viceversa supponiamo che $x_0^* \in \partial f(x_0)$; questo implica:

$$g(Lx) \geq g(y_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L).$$

Consideriamo il convesso $C := \Big\{ (Lx, g(y_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}) : x \in \mathcal{D}(L) \Big\}$ (in $\mathbb{Y} \times \mathbb{R}$). Per l'esistenza di $\bar{y}$ l'epigrafico epi(g) ha parte interna e per la diseguaglianza precedente si ha $C \cap \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f \circ L)}}} = \emptyset$. Per Hahn-Banach esistono $w_0^* \in \mathbb{Y}^*$, $\eta_0^* \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli con:

$$\begin{aligned} \langle Lx, w_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} + \eta_0^* (g(y_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}) \leq \\ \langle y, w_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} + \eta_0^* z \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L)\ \forall y \in \mathcal{D}(g)\ \forall z \geq g(y). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Se prendiamo $x = x_0$; allora la relazione sopra diventa:

$$\langle y - y_0, -w_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - \eta_0^* (z - g(y_0)) \leq 0 \qquad \forall (y, z) \in \mathrm{epi}(g).$$

In altri termini $(-w_0^*, -\eta_0^*) \in N_{\mathrm{epi}(g)}(y_0, g(y_0))$. Ne segue $\eta_0^* \geq 0$. Se fosse $\eta_0^* = 0$ usando la (3.15) con $x = \bar{x}$ si otterrebbe:

$$\langle y - \bar{y}, -w_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} \leq 0 \qquad \forall (y, z) \in \mathrm{epi}(g),$$

cioè $-w_0^* \in N_{\mathcal{D}(g)}(\bar{y})$. Ma questo implicherebbe $-w_0^* = 0$ perché $\bar{y} \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(g)}}$, da cui $(w_0^*, \eta_0^*) = (0, 0)$, che è impossibile. Dunque $\eta_0^* > 0$, da cui, dividendo per η_0^*, si ha $\left(\dfrac{-w_0^*}{\eta_0^*}, -1 \right) \in N_{\mathrm{epi}(g)}(y_0, g(y_0))$ che equivale a $y_0^* := \dfrac{-w_0^*}{\eta_0^*} \in \partial g(y_0)$.

Se ora prendiamo $y = y_0 = Lx_0$ e $z = g(y_0)$ in (3.15) e dividiamo per η_0^* otteniamo:

$$\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq \langle L(x - x_0), y_0^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L).$$

Per linearità vale l'eguaglianza. Questo equivale a dire che $y_0^* \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^* y_0^* = x_0^*$.

Dunque $x_0^* \in L^*(\partial g(y_0))$ e la dimostrazione è conclusa. □

3.3.17 Osservazione. Notiamo che per l'inclusione $L^* (\partial g(y_0)) \subset \partial(f)(x_0)$ non si è usata la continuità di g.

3.3.18 Osservazione. Nel teorema di composizione l'unica ipotesi su L è che abbia dominio denso, in modo che sia possibile definire L^*. Questo non assicura che f sia s.c.i. . Per avere la semicontinuità inferiore di f si può chiedere che valgano (tutte) le seguenti ipotesi:

- $\mathbb{Y}$ è un Banach riflessivo;
- g è s.c.i. e coerciva;
- L è un operatore chiuso.

Vediamo che sotto queste ipotesi f è s.c.i. . Per questo fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo una successione (x_n) in $\mathbb{X}$ tale che $f(x_n) \leq c$. Questo significa che $x_n \in \mathcal{D}(L)$ e che, posto $y_n := Lx_n$ si ha $g(y_n) \leq c$. Per la coercività si deduce che (y_n) è limitato in $\mathbb{Y}$ e allora esistono una sottosuccessione (y_{n_k}) e un punto y in $\mathbb{Y}$ tali che $y_{n_k} \xrightarrow{w} y$. Dato che il grafico dil L è chiuso, e quindi debolmente chiuso, se ne ricava che $x \in \mathcal{D}(L)$ e $y = Lx$. Per la semicontinuità di g:

$$f(x) = g(Lx) = g(y) \le \liminf_{k\to\infty} g(y_{n_k}) = \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \le c.$$

Questo prova che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\{f \le c\}$ è chiuso, da cui la tesi.

3.3.19 Definizione. Sia $A \subset \mathbb{X}$ un aperto e sia $f : A \to [-\infty, +\infty]$ una funzione. Dato $h \in \mathbb{X}$, se esiste

$$f'(x_0)(h) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

chiamiamo $f'(x_0)(h)$ *derivata direzionale* di f in x_0 lungo (o nella direzione di) h. Ammettiamo in questa definizione che $f'(x_0)(h)$ possa anche valere $+\infty$ o $-\infty$. A rigore dovremmo scrivere $f'_+(x_0)(h)$ dato che si tratta di una derivata destra.

Se $f'(x_0)(h)$ esiste finita per ogni h e se esiste $x^* \in \mathbb{X}^*$ tale che $f'(x_0)(h) = \langle h, x^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ diciamo che f è *differenziabile secondo Gateaux* in x_0 e chiamiamo x^* il *differenziale di Gateaux* di f in x_0, che indicheremo con $f'(x_0)$ (dunque $f'(x_0)(h) = \langle h, f'(x_0)\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$!!).

3.3.20 Proposizione. *Sia $\mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e sia $x \in \mathcal{D}(f)$. Allora per ogni $x' \in \mathcal{D}(f)$ esiste $f'(x)(x' - x) \in [-\infty, +\infty[$. Dato inoltre $x^* \in \mathbb{X}^*$ si ha:*

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x' - x) \ge \langle x' - x, x^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \quad \forall x' \in \mathcal{D}(f). \tag{3.16}$$

Dimostrazione. La derivata direzionale $f'(x)(x' - x)$ è la derivata destra in $t = 0$ della funzione $\varphi(t) := f(x + t(x' - x))$; tale derivata esiste (eventualmente con valore $-\infty$) per le proprietà delle funzioni convesse di una variabile.

Se $x^* \in \partial f(x)$ allora, per ogni $x' \in \mathcal{D}(f)$ e ogni $t > 0$:

$$f(x+t(x'-x)) \ge f(x) + \langle t(x'-x), x^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \Leftrightarrow \frac{f(x + t(x' - x)) - f(x)}{t} \ge \langle x' - x, x^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} .$$

Facendo tendere $t \to 0^+$ si ottiene la "$\Rightarrow$". Supponiamo viceversa che valga la disuguaglianza a destra in (3.16). Usando la monotonia dei rapporti incrementali della φ si ha, per ogni $x' \in \mathcal{D}(f)$ e ogni $t \in]0, 1]$:

$$f(x') - f(x) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1} \ge \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \ge \varphi'_+(0) = f'(x)(x' - x) \ge \langle x' - x, x^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} .$$

Ne segue che $x^* \in \partial f(x)$, dunque vale la"$\Leftarrow$". □

3.3.21 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa e sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.*

(a) *Se f è differenziabile secondo Gateaux in x_0, allora f è sottodifferenziabile in x_0 e $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

(b) *Se f è continua e sottodifferenziabile in x_0 e $\partial f(x_0) = \{x_0^*\}$, allora f è differenziabile secondo Gateaux in x_0 e $f'(x_0) = x_0^*$.*

Dimostrazione. (a) Per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ si ha $f'(x_0)(x - x_0) = \langle x - x_0, f'(x_0)\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ e quindi, per la proposizione (3.16), se ne ricava $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$. Sia ora $x_0^* \in \partial f(x_0)$. Se $h \in \mathbb{X}$ e $t > 0$, si ha:

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \ge \langle h, x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \Rightarrow \langle h, f'(x_0)\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} = f'(x_0)(h) \ge \langle h, x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} ,$$

da cui $\langle h, f'(x_0) - x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \geq 0$ per ogni $h \in \mathbb{X}$; questo è possibile solo se $f'(x_0) = x_0^*$. Dunque $f'(x_0)$ è l'unico sottodifferenziale per f in x_0.

(b) Sia $h \in \mathbb{X}$ e poniamo $\varphi(t) := f(x_0 + t(x - x_0))$, che è convessa in t ed è finita se $|t| \leq \varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ opportuno, a causa della continuità di f in x_0; ne segue $-\infty < \varphi'_-(0) \leq \varphi'_+(0) < +\infty$ (per le proprietà in una variabile). Sia m un numero con $m \in [\varphi'_-(0), \varphi'_+(0)]$; per la convessità di φ (usando la Proposizione (1.1.10)) si ha:

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + mt \qquad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x_0 + t(x - x_0)) \geq f(x_0) + mt \qquad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Questo implica che il convesso $C := \{(x_0 + th, f(x_0) + tm) : t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ (che è un segmento) non interseca $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f)}}}$. Dato che f è continua in x_0, $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{epi(f)}}} \neq \emptyset$ e quindi possiamo applica Hahn-Banach e trovare (w_0, η_0) in $\mathbb{X}^* \times \mathbb{R}$ tali che:

$$\langle x_0 + th, w_0\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0(f(x_0) + tm) \leq \langle x, w_0\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0 y \;\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \forall x \in \mathcal{D}(f), \forall y > f(x).$$

Come al solito si deduce che $\eta_0 > 0$; dividendo per η_0:

$$\left\langle x_0 + th, \frac{w_0}{\eta_0}\right\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + f(x_0) + tm \leq \left\langle x, \frac{w_0}{\eta_0}\right\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + f(x) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Mettendo $t = 0$ si ricava che $-w_0/\eta_0 \in \partial f(x_0)$ e dunque $-w_0/\eta_0 = x_0^*$. Mettendo $x = x_0$ si ricava $t\,\langle h, x_0^*\rangle\, h_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \geq tm$ per ogni $\in \mathbb{R}$, che è possibile solo se $\langle h, x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} = m$. In definitiva $\varphi'_-(0) = \varphi'_+(0) = \langle h, x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ da cui $f'(x_0)(h)$ esiste e $f'(x_0)(h) = \langle h, x_0^*\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$. Dunque x_0^* è il differenziabile di Gateaux di f in x_0. □

3.3.22 Esempio. Consideriamo $\mathbb{X} = \ell_2 := \left\{x = (x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\right\}$. Sia $(\lambda)_n$ una successione divergente di numeri positivi. Poniamo

$$f(x) := \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2 \qquad \forall x \in \ell_2,$$

dove si intende che $f(x) = +\infty$ se la serie è divergente. Chiaramente

$$\mathcal{D}(f) = \left\{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2 < +\infty\right\} = \left\{(x_n)_n : (\sqrt{\lambda_n} x_n)_n \in \ell_2\right\}.$$

Notiamo che se $x', x'' \in \mathcal{D}(f)$ si ha $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x'_n x''_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n {x'_n}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n {x''_n}^2\right)^{1/2}$. Se ne deduce che la derivata direzionale esiste per le direzioni in $\mathcal{D}(f)$: se $h \in \mathcal{D}(f)$, $t > 0$ si ha:

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n + \frac{t}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2 \Rightarrow f'(x_0)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n.$$

Se invece $h \notin \mathcal{D}(f)$ è chiaro che $f'(x_0)(h)$ non esiste, dato che $f(x_0 + th) = +\infty$ per $t \neq 0$; in particolare f non è differenziabile secondo Gateaux in nessun punto.

Peraltro se $(\lambda x_{0,n})_n \in \ell_2$, allora f è sottodifferenziabile in x_0, dato che:

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n$$

e l'applicazione $h \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n$ è (lineare e) continua su ℓ_2, dato che:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 x_{n,0}{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dunque il vettore $x_0^* := (\lambda_n x_{0,n})_n$ è un elemento di $\partial f(x_0)$ (è chiaro che ℓ_2 è uno spazio di Hilbert e quindi possiamo identificare ℓ_2^* con ℓ_2).

Facciamo vedere che $\mathcal{D}(\partial f) = W := \{x \in \ell_2 : (\lambda_n x_n)_n \in \ell_2\}$ e che $\partial f(x_0) = \{(\lambda_n x_{0,n})_n\}$ per ogni $x_0 \in W$. Sia infatti $x_0^* \in \partial f(x_0)$, allora per ogni $h \in \mathcal{D}(f)$ e $t > 0$:

$$f(x_0 + th) \geq f(x_0) + t\,\langle h, x_0^* \rangle_{ell^2} \Rightarrow f'(x_0)(h) \geq \langle h, x_0^* \rangle_{\ell^2},$$

dunque, per il calcolo di $f'(x_0)(h)$ visto sopra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_{0,n} h_n \geq \langle h, x_0^* \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{0,n} h_n \qquad \forall h \in \mathcal{D}(f).$$

Dato che $\mathcal{D}(f)$ è uno spazio lineare deve valere l'eguaglianza. Dato che $\mathcal{D}(f)$ è denso in ℓ^2 se ne deduce $\alpha_{0,n} = \lambda_n x_{0,n}$ per ogni n. Dunque $(\lambda_n x_{0,n})_n \in \ell_2$ e $x_0^* = (\lambda_n x_{0,n})_n$.

3.3.23 Proposizione. *Siano $K \subset \mathbb{X}$ un aperto convesso e $f : K \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Gateaux in K. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(a) *f è convessa;*

(b) *si ha:*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, f'(x_0) \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x, x_0 \in K;$$

(c) *L'applicazione $x \mapsto f'(x)$ è monotona, cioè*

$$\langle x_1 - x_2, f'(x_1) - f'(x_2) \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \geq 0 \qquad \forall x, x_0 \in K.$$

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca fedelmente quella del caso finito dimensione (vedi la Proposizione (1.2.5)). □

3.3.24 Proposizione. *Supponiamo $f, g : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ due funzioni convesse. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ e supponiamo che f sia differenziabile secondo Gateaux in x_0. Allora $\partial(f+g)(x_0) = f'(x_0) + \partial g(x_0)$ $(= \partial f(x_0) + \partial g(x_0))$.*

Dimostrazione. Supponiamo $x_0^* \in \partial h(x_0)$, dove $h = f + g$. Sia $x \in \mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ e sia $t \in]0, 1]$. Allora:

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &\geq \frac{g(x_0 + t(x - x_0) - g(x_0))}{t} \geq \\ &\frac{h(x_0 + t(x - x_0)) - h(x_0) - (f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \geq \\ &\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} - \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \end{aligned}$$

(nel primo passaggio si è usata la (1.1.5)). Passando al limite per $t \to 0^+$ si ha:

$$g(x) - g(x_0) \geq \langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} - f'(x_0)(x - x_0) = \langle x - x_0, x_0^* - f'(x_0) \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*},$$

da cui $x_0^* - f'(x_0) \in \partial g(x_0)$. Usando la (3.3.9) si ottiene la tesi. □

3.3.25 Osservazione. Nella Proposizione (3.3.24) basta che $f'(x_0)(x-x_0)$ esista per ogni $x \in \mathcal{D}(g)$ e che si possa scrivere $f'(x_0)(x-x_0) = \langle x-x_0, w_0\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ per ogni $x \in \mathcal{D}(g)$, per un opportuno $w_0 \in \mathbb{X}^*$ (in questo caso la tesi diventa $\partial(f+g)(x_0) \subset w_0 + \partial g(x_0)$).

3.3.26 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Hilbert e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ propria, convessa e semicontinua. Sia $\lambda > 0$. Allora:*

$$\forall y \in \mathbb{X} \quad \exists x \in \mathcal{D}(f) \text{ tale che } y - \lambda x \in \partial f(x).$$

possiamo esprimere la formula sopra dicendo che l'operatore multivoco $\lambda I + \partial f$ è surgettivo. Inoltre $x = (\lambda I + \partial f)^{-1}(y)$ è unico e

$$\|(\lambda I + \partial f)^{-1}(y_2) - (I + \partial f)^{-1}(y_1)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y_2 - y_1\| \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Se $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{X}$ e se $y_i - \lambda x_i \in \partial f(x_i)$ allora

$$\langle x_2 - x_1, (y_2 - \lambda x_2) - (y_1 - \lambda x_1)\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle \geq \|x_2 - x_1\|^2$$

da cui

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y_2 - y_1\|.$$

che è la (3.17). Per dimostrare l'esistenza di x consideriamo la funzione

$$F(x) := f(x) + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \langle x, y\rangle .$$

$x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e $c < f(x_0)$ allora esiste $y_0 \in \mathbb{X}$ tale che

$$f(x) \geq c + \langle x, y_0\rangle$$

(vedi l'osservazione (3.2.19)) e allora

$$F(x) \geq c + \langle x, y_0\rangle + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \langle x, y\rangle \geq c_1 + \frac{\lambda}{4}\|x\|^2$$

per una opportuna c_1. Ne segue che $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty$. Per la (3.2.25) esiste un punto di minimo $x \in \mathbb{X}$ per F e per definizione di sottodifferenziale abbiamo $0 \in \partial F(x)$. Ma si vede subito che la mappa $x \mapsto G(x) := \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \langle x, y\rangle$ è differenziabile secondo Gateaux e $G'(x) = \lambda x - y$. Per (3.3.24) $\partial F(x) = \partial f(x) + G'(x)$ e quindi $y - \lambda x \in \partial f(x)$. □

3.4 Il principio variazionale di Ekeland

3.4.1 Teorema (Principio Variazionale di Ekeland)**.** *Siano $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico completo e $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione semicontinua inferiormente e inferiormente limitata. Siano inoltre $\bar{x} \in \mathbb{X}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che:*

$$f(\bar{x}) < \inf_{x\in\mathbb{X}} f(x) + \varepsilon.$$

Allora per ogni $\lambda > 0$ esiste un punto $x_\lambda \in \mathbb{X}$ tale che:

$$f(x_\lambda) \leq f(\bar{x}) \tag{3.18}$$

$$d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda \tag{3.19}$$

$$f(x) \geq f(x_\lambda) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda) \qquad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.20}$$

Dimostrazione. Siano $\bar{x}$, ε e λ come nell'ipotesi. Consideriamo la seguente relazione d'ordine (parziale) su $\mathbb{X}$:

$$x' \preceq x'' \Leftrightarrow f(x') \leq f(x'') - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'').$$

Non è difficile verificare che quella definita sopra è effettivamente una relazione d'ordine.

Introduciamo ricorsivamente una successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{X}$ e una successione $(S_n)_n$ di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ ponendo:

$$x_1 := \bar{x}, \qquad S_1 := \{x \in \mathbb{X} : x \preceq x_1\},$$
$$x_{n+1} \in S_n \text{ tale che } f(x_{n+1}) < \inf_{x \in S_n} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \qquad S_{n+1} := \{x \in \mathbb{X} : x \preceq x_{n+1}\}.$$

Chiaramente $S_{n+1} \subset S_n$ per ogni n (per la transitività dell'ordinamento). Gli S_n sono chiusi: in effetti dato $x \in \mathbb{X}$ l'insieme $\{x' : x' \preceq x\}$ è chiuso poiché f è s.c.i. .

Dico che per ogni n:

$$\sup \{d(x, x_n) : x \in S_n\} \leq \frac{\lambda}{2^n}. \tag{3.21}$$

Sia infatti $x \in S_n \subset S_{n-1}$. Da $x \preceq x_n$ si ha:

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_n) \leq f(x_n) - f(x) \tag{3.22}$$

D'altra parte $x \in S_{n-1}$ da cui, per la definizione di x_n

$$f(x_n) \leq \inf_{x \in S_{n-1}} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{3.23}$$

Mettendo insieme (3.22) e (3.23) si ottiene (3.21).

Da (3.21) e da $S_{n+1} \subset S_n$ segue che la successione $(x_n)_n$ è di Cauchy: se $n \geq m \geq \bar{n}$ si ha $d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{\lambda}{2^i} \leq \frac{\lambda}{2^{\bar{n}-1}}$. Dunque per la completezza di $\mathbb{X}$ deve esistere $x_\lambda := \lim_{n \to \infty} x_n$. Dato che gli S_n sono chiusi deve essere $x_\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Notiamo che, se $x \preceq x_\lambda$, allora $x \preceq x_n$ per ogni n e, da (3.21), segue $x = x_\lambda$. Per la costruzione degli x_n si ha:

$$d(x_\lambda, \bar{x}) \leq d(x_\lambda, x_n) + d(x_n, x_1) \leq d(x_\lambda, x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_\lambda, x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda}{2^k}$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$ si deduce la (3.19). Infine sia x in $\mathbb{X}$: se $x = x_\lambda$ la (3.20) vale banalmente. Se $x \neq x_\lambda$ non può essere $x \preceq x_\lambda$ e quindi esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x \notin S_{n_1}$. Dato che $S_{n+1} \subset S_n$ ne segue $x \notin S_n$ per ogni $n \geq n_1$, cioè:

$$f(x) \geq f(x_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - x_n\| \qquad \forall n \geq n_1.$$

Facendo tendere $n \to \infty$ e usando la semicontinuità di f si deduce la (3.20). □

3.4.2 Definizione. Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico. Sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ e sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Chiamiamo *pendenza di f in x_0* :

$$|\nabla f|(x_0) := - \liminf_{x \to x_0}{}^{*} \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x, x_0)} \qquad (\in [0, +\infty]).$$

(convenendo che $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{d(x,x_0)} = 0$ se $x = x_0$). Notiamo che $|\nabla f|(x_0) \leq M$ se e solo se

$$f(x) \geq f(x_0) - Md(x,x_0) + o(f(x,x_0)) \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.24}$$

e che $|\nabla f|(x_0)$ è l'estremo inferiore degli M verificanti la disuguaglianza sopra (se non ce n'è nessuno allora $|\nabla f|(x_0) = +\infty$).

Se $\mathbb{X}$ è un Banach e f è differenziabile in x_0 chiaramente $|\nabla f|(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$.

3.4.3 Osservazione. La (3.20) equivale a $|\nabla f|(x_\lambda) \leq \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$. Il Principio Variazionale di Ekeland permette dunque di trovare successioni minimizzanti con pendenza piccola. In altri termini, se $(\mathbb{X}, d)$ è uno spazio metrico completo e $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ è s.c.i. e inferiormente limitata, allora esiste una successione (x_n) in $\mathbb{X}$ tale che

$$f(x_n) \to 0 \qquad , \qquad |\nabla f|(x_n) \to 0.$$

Dato n possiamo infatti prendere $\bar{x}_n$ in modo che $f\bar{x}_n) < \inf f + \dfrac{1}{n}$ e scegliere $\lambda := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Per il Principio Variazionale si trova x_n con

$$f(x_n) \leq f(\bar{x}_n) \leq \inf f + \frac{1}{n} \qquad , \qquad |\nabla f|(x_n) \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3.4.4 Osservazione. Se $\mathbb{X}$ è normato, $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ è convessa e $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ allora

$$M \geq |\nabla f|(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) - M\|x - x_0\| \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.25}$$

Infatti se $M \leq |\nabla f|(x_0)$ e se $x \in \mathbb{X}$, $t > 0$ prendendo $x_0 + t(x - x_0)$ al posto di x in (3.24):

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + t(x - x_0) - f(x_0)}{t} \geq -M\|x - x_0\| - \frac{o(t)}{t}$$

che per $t \to 0^+$ ci dà la disuguaglianza richiesta (l'altra implicazione è ovvia).

3.4.5 Osservazione. Se $\mathbb{X}$ è uno spazio normato e $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ è convessa, per ogni $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ si ha:

$$x_0^* \in \partial f(x_0) \Rightarrow |\nabla f|(x_0) \leq \|x_0^*\|.$$

Infatti se $x_0^* \in \partial f(x_0)$ si ha:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle \geq f(x_0) - \|x - x_0\|\|x_0^*\| \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

da cui $|\nabla f|(x_0) \leq \|x_0^*\|$, a a causa della (3.25).

3.4.6 Lemma. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa. Supponiamo che esistano $x_0 \in \mathbb{X}$, $c, M \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(x) \geq c - M\|x - x_0\| \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Allora esiste $x_0^* \in \mathbb{X}^*$ con $\|x_0^*\| \leq M$ e

$$f(x) \geq c - \langle x - x_0, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi fatta epi(f) e il cono aperto

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} : y < c - M\|x - x_0\|\}$$

non si intersecano. Dato che $\mathring{C} \neq \emptyset$ per Hahn-Banach esiste $(w_0, \eta_0) \in \mathbb{X}^* \times \mathbb{R}$ tale che:

$$\langle x, w_0 \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0 y < \langle x', w_0 \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \eta_0 y' \quad \forall x, x' \in \mathbb{X},\ \forall y < c - M\|x - x_0\|,\ \forall y' \geq f(x').$$

Al solito si vede che $\eta_0 > 0$. Ponendo $x_0^* := -\dfrac{w_0}{\eta_0}$ (e passando alla chiusura di C) si ha:

$$-\langle x, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + c - M\|x - x_0\| \leq -\langle x', x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + f(x') \qquad \forall x, x' \in \mathbb{X}.$$

Mettendo $x = x_0$ si ricava la disuguaglianza richiesta. Mettendo $x' = x_0$ si trova:

$$\langle x - x_0, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq M\|x - x_0\| + f(x_0) - c. \qquad \forall x \in \mathbb{X},$$

Se $R > 0$, $\|\hat{x}\| = 1$ e usiamo $x = x_0 + R\hat{x}$ nella disuguaglianza precedente otteniamo:

$$R\langle \hat{x}, x_0^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \leq RM\|\hat{x}\| + f(x_0) - c. \qquad \forall R > 0, \quad \forall \hat{x} \in \mathbb{X} \text{ con } \|\hat{x}\| = 1$$

da cui

$$\|x_0^*\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1} \langle \hat{x}, x_0^* \rangle \leq M + \frac{f(x_0) - c}{R} \qquad \forall R > 0$$

che implica $\|x_0^*\| \leq M$. □

3.4.7 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Allora sono equivalenti:*

(a) $|\nabla f|(x_0) < +\infty$*;*

(b) *esiste $x^* \in \partial f(x_0)$ tale che $\|x^*\| \leq |\nabla f|(x_0)$.*

In definitiva, se f è convessa:

$$|\nabla f|(x) = \inf\{\|x^*\| : x^* \in \partial f(x)\}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (a)⇒(b). Se $|\nabla f|(x_0) < +\infty$ per (3.25) abbiamo:

$$f(x) \geq f(x_0) - |\nabla f|(x_0)\|x - x_0\| \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Sia x^* come dall Lemma (3.4.6); allora $x^* \in \partial f(x_0)$ e $|x^*| \leq |\nabla f|(x_0)$. (b)⇒(a) è ovvio. □

3.4.8 Corollario. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Siano $\bar{x} \in \mathbb{X}$, $\varepsilon > 0$ tali che: $f(\bar{x}) < \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x) + \varepsilon$. Allora per ogni $\lambda > 0$ esiste un punto $x_\lambda \in \mathbb{X}$ tale che:*

$$f(x_\lambda) \leq f(\bar{x})$$
$$d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda$$
$$\exists x_\lambda^* \in \partial f(x_\lambda) \ t.c.\ \|x_\lambda^*\|_{\mathbb{X}^*} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema (3.4.1) e la proposizione (3.4.7). □

Una conseguenza di quanto sopra è che l'estremo inferiore di una funzione convessa si "può raggiungere" tramite punti con sottodifferenziale piccolo.

3.4.9 Corollario. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa, propria, inferiormente limitata e semicontinua inferiormente. Allora esistono una successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{X}$ e una successione $(x_n^*)_n$ in $\mathbb{X}^*$ tali che:*

$$f(x_n) \to \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x), \quad x_n^* \in \partial f(x_n), \quad x_n^* \to 0.$$

Dimostrazione. Dato n si prende $\bar{x}_n$ tale che $f(\bar{x}_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n}$ e fissato $\lambda = \lambda_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ si prende $x_n := x_{\lambda_n}$, dove x_λ è il punto ottenuto nella Proposizione precedente. □

3.4.10 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ convessa e semicontinua inferiormente. Allora $\mathcal{D}(\partial f)$ è denso in $\mathcal{D}(f)$ (cioè $\mathcal{D}(f) \subset \overline{\mathcal{D}(\partial f)}$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Dato che f è finita e s.c.i. in x_0, ragionando come nell'Osservazione (3.2.19), possiamo trovare $w_n \in \mathbb{X}^*$ tale che

$$f x) \geq f(x_0) - \frac{1}{n} + \langle x - x_0, w_n \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Posto $f_1(x) := f(x) - \langle x - x_0, w_n \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ abbiamo che f_1 è convessa, semicontinua inferiormente, $f_1(x) \geq -1/n$ per ogni x e $f_1(x_0) = 0$. Applicando la (3.4.8) con $\lambda = 1/n$ troviamo un punto x_n che dista meno di $1/n$ da x_0 tale che $f_1(x_n) \leq 0$ e un sottodifferenziale x_n^* per f_1 in x_n tale che $\|x_n^*\| \leq 1$. In particolare $\|x_0 - x_n\| \leq 1/n$ e $w_n + x_n^* \in \partial f(x_n)$. □

La seguente proposizione è analoga al Corollario (3.4.9). In questo caso però f non è supposta convessa e si chiede per contro che sia differenziabile secondo Gateaux.

3.4.11 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach e sia $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ semicontinua inferiormente, propria e inferiormente limitata, tale che f sia differenziabile secondo Gateaux in ogni punto di $\mathcal{D}(f)$. Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(f)$ tale che*

$$f(x_n) \to \inf_{x \in \mathcal{D}(f)} f(x), \qquad f'(x_n) \to 0.$$

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{N}$ possiamo prendere $\bar{x}_n \in \mathcal{D}(f)$ tale che $f(\bar{x}_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n}$. Usando il principio variazionale di Ekeland con $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ troviamo $x_n \in \mathcal{D}(f)$ tale che $\|\bar{x}_n - x_n\| \leq \lambda_n$, $f(x_n) \leq f(\bar{x}_n)$ e $f(x) \geq f(x_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}\|x - x_n\|$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. La seconda proprietà implica che $f(x_n) \to \inf_X f$. Dalla terza si deduce

$$f'(x_n)(h) \geq -\frac{1}{\sqrt{n}}\|h\| \qquad \forall h \in \mathbb{X}.$$

Ne segue $\|f'(x_n)\|_{\mathbb{X}^*} \leq 1/\sqrt{n}$ da cui la tesi. □

3.5 Minimizzazione di funzionali quadratici

Vediamo ora un esempio importante, che è il prototipo di molte applicazioni. Si tratta di un problema lineare, ma le tecniche si potrebbero estendere anche a casi non lineari.
****

In tutto questo paragrafo consideriamo uno spazio di Banach riflessivo X, la cui norma verrà indicata con $\|\cdot\|_X$; indicheremo inoltre con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X^*}$ la dualità tra X e X^* (scriveremo cioè $\langle x, x^* \rangle_{X,X^*}$ invece di $x^*(x)$, per ogni x in X e ogni x^* in X^*).

Consideremo anche uno spazio di Hilbert H, con norma $\|\cdot\|_H$, tale che $H \hookrightarrow X$ ($H \subset X$ e l'immersione $i = i_{H,X}$ di H in X è continua) e H sia denso in X (come sottoinsieme di X) e una applicazione bilineare $a : H \times H \to \mathbb{R}$, con a continua rispetto alla norma di H.

3.5.1 Definizione. Dati X, H e a come sopra definiamo $\mathcal{D}(L) \subset X$ e $L : \mathcal{D}(L) \to X^*$ mediante la condizione:

$$x \in \mathcal{D}(L), x^* = Lx \Leftrightarrow x \in H, \sup_{h \in H, \|h\|_X \le 1} a(x,h) < +\infty, \langle h, x^* \rangle_{X,X^*} = a(x,h) \quad \forall h \in H \tag{3.26}$$

Notiamo che la (3.26) definisce effettivamente e in maniera univoca un operatore su $\mathcal{D}(L)$. In effetti se $x \in \mathcal{D}(L)$ allora $|a(x,h)| \le C \|h\|_X$ per ogni $h \in H$ per un'opportuna costante C. A causa della densità di H in X (e della completezza di X) esiste un unico $x^* \in X^*$ che estende a tutto X il funzionale lineare $h \mapsto a(x,h)$. Vale inoltre $\|x^*\|_{X^*} \le C$. È anche evidente che L è un operatore lineare.

3.5.2 Proposizione. *Sia L come nella definizione preceente. Allora*
L è chiuso.

Dimostrazione. Siano $(x_n)_n$ una successione in $\mathcal{D}(L)$, e $(x_n^*)_n$ una successione in X^* con $x_n^* = Lx_n$. Questo equivale a $x_n \in H$, $a(x_n, h) = \langle h, x_n^* \rangle$ $\forall h \in H$. □

****

3.5.3 Esempio. Siano X uno spazio di Banach riflessivo e H uno spazio di Hilbert tali che $H \hookrightarrow X$ ($H \subset X$ e l'immersione di H in X è continua) e supponiamo H denso in X. Indicheremo con $\|\cdot\|_H$ e $\|\cdot\|_X$ le norme in H e in X.e con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X^*}$ la dualità tra X e X^*.

Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una applicazione bilineare, continua e simmetrica su H tale che:

$$\exists \nu_H > 0 \text{ tale che:} \qquad a(x,x) \ge \nu_H \|x\|_H^2 \qquad \forall x \in H. \tag{3.27}$$

Notiamo che sotto queste ipotesi $\langle x', x'' \rangle_a := a(x', x'')$ è un prodotto scalare che induce su H una norma equivalente a quella originale. Avremmo anche potuto chiedere solamente H Banach (e in effetti, se si guardano le dimostrazioni che seguono, si vede che il prodotto scalare di H non viene mai utilizzato); in ogni caso la presenza di a implica che H possiede comunque una struttura hilbertiana. Definiamo $f_0 : X \to]-\infty, \infty]$ ponendo:

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} a(x,x) & \text{se } x \in H, \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus H. \end{cases}$$

(a) f_0 è convessa e s.c.i. . La prima affermazione è di semplice verifica, dimostriamo la seconda. Siano per questo $x_0 \in X$ e $(x_n)_n$ una successione in X tale che $x_n \xrightarrow{X} x_0$. Se $f_0(x_n) \to +\infty$ la tesi è ovvia. Se questo non accade allora, a meno di considerare una sottosuccessione, possiamo supporre $f_0(x_n)$ limitata; in particolare $x_n \in H$ per ogni n. Dalla (3.27) si deduce che $(x_n)_n$ è limitata in H. Sempre a meno di passare a una estratta, possiamo supporre che $(x_n)_n$ converga debolmente in H a un limite $\tilde{x} \in H$. Ma allora x_n tende debolmente in X a $\tilde{x}$ e quindi $\tilde{x} = x_0$. Dunque $x_0 \in H$ e $x_n \rightharpoonup x_0$ in H. Ne segue:

$$\begin{aligned} f_0(x_n) = \frac{1}{2} a(x_n, x_n) = \frac{1}{2} a(x_0, x_0) + a(x_0, x_n - x_0) + \frac{1}{2} a(x_n - x_0, x_n - x_0) \ge \\ \frac{1}{2} a(x_0, x_0) + a(x_0, x_n - x_0) + \frac{\nu_H}{2} \|x_n - x_0\|_H^2 \ge f_0(x_0) + a(x_0, x_n - x_0). \end{aligned} \tag{3.28}$$

La convergenza debole in H implica che $a(x_0, x_n - x_0) \to 0$ (la mappa $h \mapsto a(x_0, h)$ è lineare e continua su H), da cui la semicontinuità. Notiamo che da quanto sopra:

$$x_n \xrightarrow{X} x_0, f_0(x_n) \to f_0(x_0) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{H} x_0. \tag{3.29}$$

(b) Per ogni $x_0, h \in H$ esiste la derivata direzionale $f_0'(x_0)(h) = a(x_0, h)$ – questo si vede immediatamente dalla definizione. Dico che, se $x_0 \in \mathcal{D}(f_0) = H$ e $\alpha_0 \in X^*$ si ha :

$$\alpha_0 \in \partial f_0(x_0) \Leftrightarrow a(x_0, h) = f_0'(x_0)(h) = \langle h, \alpha_0 \rangle_{X,X^*} \qquad \forall h \in H. \tag{3.30}$$

Dimostro "$\Rightarrow$": se $\alpha_0 \in \partial f_0(x_0)$, presi $h \in H$ e $t > 0$ si ha:

$$f_0(x_0 + th) \geq f_0(x_0) + t \langle h, \alpha_0 \rangle_{X,X^*} \Rightarrow f_0'(x_0)(h) \geq \langle h, \alpha_0 \rangle_{X,X^*}.$$

Prendendo $-h \in H$ al posto di h si trova la diseguaglianza opposta, da cui l'eguaglianza di destra in (3.30). Viceversa se $x \in H$ e $t \in]0, 1]$, per la convessità (vedi la (c) di (1.1.5)):

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \geq f'(x_0)(x - x_0).$$

Dunque da $f_0'(x_0)(h) \geq \langle h, \alpha_0 \rangle_{X,X^*}$ $\forall h \in H$, si deduce $\alpha_0 \in \partial f_0(x_0)$.

(c) Consideriamo $w_0 \in X^*$ e poniamo $f_{w_0}(x) := f_0(x) - \langle x, w_0 \rangle_{X,X^*}$. È chiaro che f_{w_0} è convessa, s.c.i. e propria su X, che $\mathcal{D}(f_{w_0}) = H$ e che $\partial f_{w_0} = \partial f_0 - \{w_0\}$ (per uno qualunque dei due teoremi di somma (3.3.10) o (3.3.24)). Se $x \in H$, si ha:

$$\begin{aligned} f_{w_0}(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - \langle x, w_0 \rangle_{X,X^*} \geq \frac{\nu_H}{2} \|x\|_H^2 - \|w_0\|_{X^*} \|x\|_X \geq \\ \frac{\nu_H}{2S^2} \|x\|_X^2 - \|w_0\|_{X^*} \|x\|_X \geq \frac{\nu_H}{4S^2} \|x\|_X^2 - \frac{S^2}{\nu_H} \|w_0\|_{X^*}^2 \to +\infty \quad \text{se } \|x\|_X \to +\infty, \end{aligned}$$

dove S è la norma dell'immersione $i_{H,X} : H \to X$, per cui vale (3.10). Applicando la Proposizione (3.2.25) otteniamo che f_{w_0} ha minimo in un punto $\bar{x}$. Questo equivale a $0 \in \partial f_{w_0}(\bar{x}) = \partial f_0(\bar{x}) - \{w_0\}$ e cioè, per il punto (b), alla condizione:

$$a(\bar{x}, h) = \langle h, w_0 \rangle_{X,X^*} \qquad \forall h \in H. \tag{3.31}$$

Siano $w_1, w_2 \in X^*$ e siano x_1, x_2 dei corrispondenti punti di minimo per f_{w_1} e f_{w_2}. Scrivendo la (3.31) per x_2 e x_1, con $h = x_2 - x_2$, e sottraendo si ha:

$$a(x_2 - x_1, x_2 - x_1) = \langle x_2 - x_1, w_2 - w_1 \rangle_{X,X^*} \leq \|w_2 - w_1\|_{X^*} \|x_2 - x_1\|_X.$$

Usando la (3.27) e la disuguaglianza $\|x\|_X \leq S \|x\|_H$, se ne ricava:

$$\|x_2 - x_1\|_H \leq \frac{S}{\nu_H} \|w_2 - w_1\|_{X^*} \tag{3.32}$$

In particolare se $w_1 = w_2 \Rightarrow x_2 = x_1$, dunque dato $w \in X^*$ esiste un unico punto di minimo per f_w, che possiamo denotare con x_w.

(d) Definiamo un operatore lineare $L : \mathcal{D}(L) \to X^*$, con $\mathcal{D}(L) \subset X$, ponendo:

$$\mathcal{D}(L) := \left\{ x \in H : \sup_{x' \in H, \|x'\|_X = 1} a(x, x') < +\infty \right\}, \tag{3.33}$$

$$Lx := w \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a(x, x') = \langle x', w \rangle_{X,X^*} \;\; \forall x' \in H. \tag{3.34}$$

Vediamo che, se $x \in \mathcal{D}(L)$, Lx è ben definito. In effetti se $x \in \mathcal{D}(L)$ la forma lineare $x' \mapsto \varphi(x') := a(x, x')$, definita su H, è limitata rispetto alla norma di X. Dato che H è denso in X, φ si estende a una, e a una sola, $w \in X^*$, e quindi $w = Lx$. Il fatto che L sia lineare è di verifica immediata.

È anche chiaro che la (3.31) equivale a dire $L\bar{x} = w_0$ e quindi, per quanto visto nel punto (c), si ha $Lx = w$ se e solo se $x = x_w$. Ne segue $R(L) = X^*$.

(e) Dico che $\mathcal{D}(L)$ è denso in X. Se non lo fosse, per Hahn-Banach, esisterebbe $x_0^* \in X^*$ con $x_0^* \neq 0$ e $\langle x, x_0^* \rangle_{X,X^*} = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Dato che $R(L) = X^*$ esiste $x_0 \in \mathcal{D}(L)$ con $Lx_0 = x_0^*$, cioè $a(x_0, h) = \langle h, x_0^* \rangle_{X,X^*}$ $\forall h \in H$. Prendendo $h = x_0$ ne seguirebbe $\nu_H \|x_0\|_H^2 \leq a(x_0, x_0) = \langle x_0, x_0^* \rangle_{X,X^*} = 0$, da cui $x_0 = 0$ e infine $x^* = 0$, che è assurdo.

(f) Dimostriamo che L è chiuso. Per questo prendiamo $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ e (y_n) in X^* tali che $Lx_n = y_n$ e supponiamo $x_n \to x$ in X e $y_n \to y$ in X^*. Per la (3.32) la $(x_n)_n$ è di Cauchy in H e quindi ha limite in H e siccome $x_n \to x$ in X si ha $x_n \to x$ in H; in particolare $x \in H$. Ma allora:

$$a(x, x') = \lim_{n\to\infty} a(x_n, x') = \lim_{n\to\infty} \langle x', y_n \rangle_{X,X^*} = \langle x', y \rangle_{X,X^*} \qquad \forall x' \in H,$$

che equivale a dire $x \in \mathcal{D}(L)$ e $y = Lx$.

(g) Dimostriamo che L è autoaggiunto (secondo la Definizione (2.8.21)).
Vediamo che $L \subset L^\star$. Infatti se $x_0 \in \mathcal{D}(L)$ si ha:

$$\langle x, Lx_0 \rangle_{X,X^*} = a(x_0, x) = \langle x_0, Lx \rangle_{X,X^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L).$$

da cui $x_0 \in \mathcal{D}(L^\star)$ (perché $x \mapsto \langle x_0, Lx \rangle_{X,X^*}$ è continua) e $L^\star x_0 = Lx_0$. Verifichiamo che $L^\star \subset L$. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(L^\star)$. Dato che $R(L) = X^*$ esiste un punto $x_1 \in \mathcal{D}(L)$ tale che $Lx_1 = L^\star x_0$. Dato che $L \subset L^\star$ si ha $x_1 \in \mathcal{D}(L^\star)$ e $L^\star x_1 = Lx_1$. Allora:

$$0 = \langle x, L^\star(x_1 - x_0) \rangle_{X,X^*} = \langle x_1 - x_0, Lx \rangle_{X,X^*} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L).$$

Dato che $R(L) = X$ se ne deduce $x_1 = x_0$ da cui $x_0 \in \mathcal{D}(L)$ e $Lx_0 = L^\star x_0$.

Abbiamo quindi mostrato che dati $H \hookrightarrow X$ e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineare, simmetrica, continua e coerciva (cioè verificante la (3.27)), definito $L : \mathcal{D}(L) \to X^*$ mediante le (3.33) e (3.34), si ha che L è chiuso, autoaggiunto, con dominio denso e che $R(L) = X^*$.

Notiamo infine che la (3.32) dice sostanzialmente che l' inversa L^{-1} (ben definita perché $R(L) = X^*$ e $\ker(L) = \{0\}$) è continua da X^* in H e quindi da X^* in X:

$$\|L^{-1}x^*\|_X \leq \gamma_1 \|L^{-1}x^*\|_H \leq \gamma_2 \|x^*\|_{X^*} \qquad \forall x^* \in X^* \tag{3.35}$$

per opportune $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ (ricavabili da (3.32)).

3.5.4 Osservazione. Se $H = X$ (dunque anche H Hilbert) e $a(x, y) = \langle x, y \rangle_H$ si vede subito dalla definizione che $\mathcal{D}(L) = H$, da cui la mappa L è continua e che L è l'isomorfismo da H^* in H fornito dal Teorema di Riesz.

Vediamo ora che si può invertire la costruzione precedente partendo dall'operatore $L : \mathcal{D}(L) \to X^*$ e costruendo H ed a. Notiamo che in quanto segue si suppone solo L simmetrico.

3.5.5 Esempio (Viceversa della costruzione precedente)**.** . Prendiamo X Banach riflessivo con norma $\|\cdot\|_X$ e indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X^*}$ la dualità tra X e il duale X^*. Consideriamo inoltre $L : \mathcal{D}(L) \to X^*$ un operatore chiuso con $\mathcal{D}(L)$ denso in X, L simmetrico e tale che esista $\nu_X > 0$ con:

$$\langle x, Lx \rangle_{X,X^*} \geq \nu_X \|x\|_X^2 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(L). \tag{3.36}$$

(a) Definiamo $q : \mathcal{D}(L) \to \mathbb{R}$ ponendo $q(x) := \langle x, Lx \rangle_{X,X^*}$. Usando la (3.36) è immediato verificare che q è convessa e s.c.i. in $\mathcal{D}(L)$. Definiamo ora $f_0 : X \to]-\infty, \infty]$:

$$f_0(x) = \frac{1}{2} \liminf_{x'\to x}{}^* \langle x', Lx' \rangle_{X,X^*} = \frac{1}{2}\overline{q}(x) \quad \forall x \in X.$$

$f_0(x) \in [0, +\infty]$ e per quanto già visto f_0 è convessa e s.c.i. – inoltre, per (3.36), vale:

$$f_0(x) \geq \frac{\nu_X}{2} \|x\|_X^2 \qquad \forall x \in X. \tag{3.37}$$

Dato che q è s.c.i. in $\mathcal{D}(L)$, $f_0(x_0) = \dfrac{1}{2} \langle x_0, Lx_0 \rangle_{X,X^*}$ per tutte le x_0 in $\mathcal{D}(L)$. Poniamo:

$$H := \{x \in X : f_0(x) < +\infty\} = \mathcal{D}(f_0).$$

(b) $f_0(\lambda x) = \lambda^2 f_0(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ questo è è ovvio, altrimenti si usa un cambio di variabile nel limite che definisce f_0.

(c) Vale la *legge del parallelogramma*:

$$f_0(x_1 + x_2) + f_0(x_1 - x_2) = 2f_0(x_1) + 2f_0(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in H. \tag{3.38}$$

Tale proprietà è chiaramente vera se $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(L)$ per la simmetria di L. Dati $x_1, x_2 \in H$ consideriamo $(x_{1,n})_n$ e $(x_{2,n})_n$ in $\mathcal{D}(L)$ tali che $x_{i,n} \to x_i$ in X, $\frac{1}{2} \langle x_{i,n}, Lx_{i,n} \rangle_{X,X^*} \to f_0(x_i)$ per $i = 1, 2$. Allora $s_n := x_{1,n} + x_{2,n} \to x_1 + x_2$ e $d_n := x_{1,n} - x_{2,n} \to x_1 - x_2$, da cui:

$$\begin{aligned} f_0(x_1 + x_2) + f_0(x_1 - x_2) &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \langle s_n, Ls_n \rangle_{X,X^*} + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \langle d_n, Ld_n \rangle_{X,X^*} \leq \\ &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \Big(\langle s_n, Ls_n \rangle_{X,X^*} + \langle d_n, Ld_n \rangle_{X,X^*} \Big) = \\ &\lim_{n\to\infty} \Big(\langle x_{1,n}, Lx_{1,n} \rangle_{X,X^*} + \langle x_{2,n}, Lx_{2,n} \rangle_{X,X^*} \Big) = 2f_0(x_1) + 2f_0(x_2). \end{aligned}$$

Per provare l'altra disuguaglianza si prendono $x' := \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $x'' := \dfrac{x_1 - x_2}{2}$, di modo che $x_1 = x' + x''$ e $x_2 = x' - x''$, e si applica la diseguaglianza appena trovata (alla fine serve anche l'omogeneità di grado 2).

(f) H è uno spazio lineare (questo segue subito dalla (3.38) e da (d)) e posto:

$$a(x_1, x_2) := \frac{f_0(x_1 + x_2) - f_0(x_1 - x_2)}{2}$$

per $x_1, x_2 \in H$, la mappa $a : H \times H \to \mathbb{R}$ è bilineare e simmetrica (notiamo che $a(x, x) = 2f_0(x)$). Per dimostrarlo cominciamo prendendo $x', x'', x \in H$ e notiamo che:

$$\begin{aligned} 2a(x' + x'', x) &= f_0 \left(x' + \frac{x}{2} + x'' + \frac{x}{2} \right) - f_0 \left(x' - \frac{x}{2} + x'' - \frac{x}{2} \right) = \\ 2f_0 \left(x' + \frac{x}{2} \right) + 2f_0 \left(x'' + \frac{x}{2} \right) &- f\,(x' - x'') - 2f_0 \left(x' - \frac{x}{2} \right) - 2f_0 \left(x'' - \frac{x}{2} \right) + f\,(x' - x'') = \\ &4a \left(x', \frac{x}{2} \right) + 4a \left(x'', \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Dunque $a(x' + x'', x) = 2a \left(x', \frac{x}{2} \right) + 2a \left(x'', \frac{x}{2} \right)$. Se si prende $x'' = 0$ si trova $a(x', x) = 2a \left(x', \frac{x}{2} \right)$ e quindi la formula precedente diventa $a(x' + x'', x) = a(x', x) + a(x'', x)$.
Da questo segue $a(nx', x) = n\, a(x', x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $m\, a(x'/m, x) = a(x', x)$, se $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ne segue che $a(qx', x) = q\, a(x', x)$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Per la convessità f_0 è continua su ogni sottospazio finito dimensionale di H e quindi nello spazio generato da x' e x, per cui $a(t\, x', x) = t\, a(x', x)$ per ogni $t \geq 0$. Dato che, per definizione, $a(-x', x) = -a(x', x)$ l'ultima proprietà è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$. Nello stesso modo si dimostra la linearità rispetto al secondo argomento di a.

(d) Dunque a è una mappa bilineare simmetrica su H con $a(x,x) = 2f_0(x,x) > 0$ per ogni $x \in H \setminus \{0\}$ (a causa di (3.37)). Allora a definisce un prodotto scalare su H tale che (indicando con $\|\cdot\|_H$ la norma indotta da a):

$$\|x\|_H^2 = a(x,x) = 2f_0(x) \geq \nu_X \|x\|_X^2 \tag{3.39}$$

e quindi l'immersione di H in X è continua. Inoltre, per costruzione, a è continua su H e verifica la (3.27) con $\nu_H = 1$. Notiamo che se $x', x'' \in \mathcal{D}(L)$ si ha:

$$a(x', x'') = \frac{\langle x' + x'', L(x' + x'')\rangle_{X,X^*} - \langle x' - x'', L(x' - x'')\rangle_{X,X^*}}{4} = \langle x', Lx''\rangle_{X,X^*}$$

(e) H è un Hilbert. Per dimostrarlo prendiamo $(x_n)_n$ di Cauchy in H. Per la (3.39) $(x_n)_n$ è di Cauchy in X e quindi converge in X a un punto $x_0 \in X$. Applicando la proprietà di Cauchy abbiamo che, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$2f_0(x_n - x_m) = \|x_n - x_m\|_H^2 \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

Se $m \to \infty$, per la semicontinuità di f_0 rispetto a X, si ha:

$$2f_0(x_n - x_0) \leq \liminf_{m\to\infty} 2f(x_n - x_m) \leq \varepsilon,$$

da cui $x_0 \in H$ e

$$\|x_n - x_0\|_H^2 \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n},$$

e cioè $x_n \to x_0$ in H.

(f) $\mathcal{D}(L)$ è denso in H (nella norma di H). Per vederlo fissiamo x_0 in H. Per definizione di H esiste $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \to x_0$ in X e $\|x_n\|_H^2 = \langle x_n, Lx_n\rangle_{X,X^*} \to 2f_0(x_0) = \|x_0\|_H^2$. Si ha:

$$\|x_n - x_0\|_H^2 = \|x_n\|_H^2 - 2\langle x_n, x_0\rangle_H + \|x_0\|_H^2$$

Nel termine di destra si ha $\|x_n\|_H^2 \to \|x_0\|_H^2$ per ipotesi; se si dimostra che $\langle x_n, x_0\rangle_H \to \|x_0\|_H^2$ ne segue $x_n \to x_0$ in H. Ma $(x_n)_n$ è limitata in H, dunque ammette una sottosuccessione debolmente convergente in H; dalla convergenza a x_0 in X si deduce che $x_n \rightharpoonup x_0$ in H; quest'ultimo fatto implica $\langle x_n, x_0\rangle_H \to \|x_0\|_H^2$ e conclude la dimostrazione.

Notiamo anche che, se $x \in H$ e $x' \in \mathcal{D}(L)$, presa $(x_n)_n$ in $\mathcal{D}(L)$ con $x_n \xrightarrow{H} x$, si ha:

$$a(x, x') = \lim_{n\to\infty} a(x_n, x') = \lim_{n\to\infty} \langle x', Lx_n\rangle_{X,X^*} = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Lx'\rangle_{X,X^*} = \langle x, Lx'\rangle_{X,X^*}. \tag{3.40}$$

(g) Abbiamo costruito uno spazio di Hilbert e una forma quadratica che verificano tutte le ipotesi dell'Esempio (3.5.3). Indichiamo con L' l'operatore associato ad a come in (3.5.3), cioè tale che

$$x \in \mathcal{D}(L'),\ w = L'x \Leftrightarrow a(x,h) = \langle h, w\rangle_{X,X^*} \quad \forall h \in H. \tag{3.41}$$

Dico che $L = L'$ (in particolare L è autoaggiunto). Dato che $\mathcal{D}(L)$ è denso in H, allora nella condizione di destra in (3.41) basta prendere $h \in \mathcal{D}(L)$. Da (3.40) e (3.41) segue:

$$x \in \mathcal{D}(L'),\ w = L'x \Leftrightarrow \langle x, Lh\rangle_{X,X^*} = \langle h, w\rangle_{X,X^*} \quad \forall h \in \mathcal{D}(L), \tag{3.42}$$

che equivale a dire $L' = L^\star$. Dato che L' è autoaggiunto ne segue $L' = L^{\star\star} = L$. L'ultima eguaglianza richiede la chiusura di L ed è l'unico punto in cui interviene l'ipotesi L chiuso. Se non avessimo messo tale ipotesi avremmo potuto dire che L è chiudibile in quanto $L^\star = L'$ ha dominio denso e $L' = L^\star = \bar{L}^\star$ da cui $L' = \bar{L}$.

3.5.6 Teorema (Friedrichs)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert $L : \mathcal{D}(L) \to H$ un operatore simmetrico con dominio denso e che $\langle Lx, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Allora L è chiudibile e $\bar{L}$ è autoaggiunto.*

Dimostrazione. Consideriamo $L_1 := I + L$ (I è l'identità). Allora $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$ è denso e si vede facilmente che anche L_1 è simmetrico. Inoltre, per la positività di L, vale per L_1 la diseguaglianza (3.36) con $\nu_X = 1$. Dato che $\mathcal{D}(L_1) \subset \mathcal{D}(L_1^\star)$ si ha che $\mathcal{D}(L_1^\star)$ è denso, dunque per la Proposizione (2.8.19), L_1 è chiudibile e $\bar{L}_1^\star = L_1^\star$. È facile verificare che $\bar{L}_1$ è simmetrico. Per quanto mostrato nell'Esempio (3.5.5) l'operatore che $\bar{L}_1$ è autoaggiunto. D'altra parte è facile vedere che $\bar{L}_1 - I$ è un operatore chiuso e $G(\bar{L}_1 - I) = \overline{G(L)}$; dunque L è chiudibile e $\bar{L}_1 = I + \bar{L}$. Dato che, per l'Osservazione (2.8.10), $(I + L)^\star = I + L^\star$, se ne ricava $L = L^\star$. □

3.6 Il teorema di Krein–Milman

3.6.1 Definizione. Sia K un insieme convesso in uno spazio X localmente convesso. Diciamo che $F \subset K$ è una *faccia* di K se F è convesso e se:

$$x, y \in K,\ t \in]0,1[,\ tx + (1-t)y \in F \Rightarrow x, y \in F.$$

Se $x_0 \in K$ e se $\{x_0\}$ è una faccia per K, diremo che x_0 è un *punto estremo* per K.

3.6.2 Osservazione. x_0 è un punto estremo per K se e solo se

$$x_0 = tx + (1-t)y \text{ con } x, y \in K \text{ e } t \in [0,1] \Rightarrow x = x_0 \text{ oppure } y = x_0.$$

Infatti se esistessero x, y in K e $t \in [0,1]$ tale che $x_0 = tx + (1-t)y$, allora dovrebbe essere $t \in]0,1[$; però se $\{x_0\}$ è una faccia ne seguirebbe $x, y \in \{x_0\}$ che è chiaramente in contraddizione con l'ipotesi. Viceversa se vale la proprietà sopra, allora $\{x_0\}$ è una faccia dato che da $x, y, \in K$, $t \in]0,1[$ e $tx + (1-t)y \in \{x_0\}$ (cioè $= x_0$), si deduce che uno tra x e y coincide con x_0 – ma essendo $t \neq 0$ e $t \neq 1$ anche l'altro punto deve coincidere con x_0.

Un'altra caratterizzazione è che x_0 è punto estremo per K se e solo se $x_0 \in K$ e $K \setminus \{x_0\}$ è (ancora) convesso.

3.6.3 Lemma. *Sia K convesso e non vuoto e sia φ un funzionale lineare su X. Posto*

$$A := \left\{ x \in K : Lx = \inf_{x' \in K} Lx' \right\}.$$

Allora A è una faccia di K (eventualmente vuota).

Dimostrazione. Se A è vuoto il risultato è banale. Sia dunque $A \neq \emptyset$; questo implica che $\alpha := \inf_{x' \in K} Lx'$ è in effetti un minimo, in particolare $\alpha \in \mathbb{R}$. Dato che A è l'intersezione di K con il piano affine $\{x : Lx = \alpha\}$, si ha che A è convesso. Siano ora $x, y \in K$ e $t \in]0,1[$ tali che $tx + (1-t)y \in A$. Allora $Lx = Ly = \alpha$ perché comunque $Lx \geq \alpha$ e $Ly \geq \alpha$ e se una delle diseguaglianze fosse stretta:

$$\alpha = L(tx + (1-t)y) = tLx + (1-t)Ly > t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$$

(nota che $t \neq 0, (1-t) \neq 0$), dunque un assurdo. In definitiva $x, y \in A$, da cui A è una faccia. □

3.6.4 Lemma. *Se $(F_i)_{i \in \mathscr{I}}$ è una famiglia di facce di K, anche $F := \bigcap_{i \in \mathscr{I}} F_i$ lo è.*

Dimostrazione. Chiaramente F è convesso essendo intersezione di convessi. Supponiamo che $x, y \in K$, $t \in]0,1[$ e che $x_y := tx + (1-t)y \in F$. Allora $x_t \in F_i$ per ogni $i \in \mathscr{I}$ e quindi, per definizione di faccia $x, y \in F_i$ per ogni $i \in \mathscr{I}$. Dunque $x, y \in \bigcap_{i\in\mathscr{I}} F_i = F$ e abbiamo dimostrato che F è una faccia. □

3.6.5 Lemma. *Sia F una faccia di K e sia $F' \subset F$. Allora F' è una faccia di K se e solo se F' è una faccia di F.*

Dimostrazione. Siano x, y in K e t in $]0,1[$ tali che $tx+(1-t)y \in F'$. Dato che $F' \subset F$ e che F è una faccia di K, se ne ricava $x, y \in F$. Dunque $x, y \in F$, $t \in]0,1[$ e $tx+(1-t)y \in F'$: essendo F' una faccia di F ne segue $x, y \in F'$. In definitiva F' è una faccia di K. Il viceversa è immediato □

3.6.6 Lemma. *Sia X uno spazio vettoriale localmente convesso di Hausdorff e sia $K \subset X$, K convesso e compatto. Allora ogni faccia chiusa e non vuota di K contiene un punto estremo per K.*

Dimostrazione. Sia $F_0 \neq \emptyset$ una faccia chiusa di K che dunque risulta essere compatta. Consideriamo $\mathscr{F} := \{\text{facce chiuse di } K \text{ con } F \subset F_0\}$ e introduciamo la relazione d'ordine:

$$F_1 \preceq F_2 \text{ se e solo se } F_2 \subset F_1 \qquad \forall F_1, F_2 \in \mathscr{F}.$$

Notiamo che gli elementi di $\mathscr{F}$ sono tutti compatti dato che sono insiemi chiusi contenuti in K è compatto. Dato che $F_0 \subset \mathscr{F}$ si ha $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una catena in $\mathscr{F}$; allora posto $\tilde{F} := \bigcap\limits_{F\in\mathcal{C}} F$, si ha $\tilde{F} \neq \emptyset$ perché intersezione di compatti non vuoti e $\tilde{F} \in \mathscr{F}$ (per (3.6.4)). Inoltre per costruzione $F \preceq \tilde{F}$ per ogni F in $\mathcal{C}$: dunque $\mathcal{C}$ ha massimo. Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $\bar{F}$ per $\mathscr{F}$. Dico che $\bar{F}$ contiene un solo punto, che sarà quindi un punto estremo di K contenuto in F_0. Se per assurdo esistessero $x_0, x_1 \in \bar{F}$, con $x_0 \neq x_1$, allora usando Hahn-Banach (seconda versione) troveremmo $L \in X^*$ tale che $Lx_0 < Lx_1$. Dato che $\bar{F}$ è compatto e L è continua esiste $\alpha := \min\limits_{x\in\bar{F}} Lx$ e, per il Lemma (3.6.3), $\bar{F}_L := \{x \in \bar{F} : Lx = \alpha\}$ è una faccia di $\bar{F}$. Sempre per la continuità di L si ha che F_L è chiusa. Dalla (3.6.5) segue allora che $\bar{F}_L \in \mathscr{F}$ e per costruzione $\bar{F} \preceq \bar{F}_L$. Per la massimalità di $\bar{F}$ dovrebbe valere $\bar{F}_L = \bar{F}$, però dal fatto che $x_0 \in \bar{F}$ si deduce $\alpha \leq Lx_0$ da cui $x_1 \notin \bar{F}_L$, che dà un assurdo. Ne segue che $\bar{L}$ è costituito da un solo punto e quindi la tesi è dimostrata □

3.6.7 Teorema (Krein-Milman)**.** *Sia X uno spazio vettoriale localmente convesso di Hausdorff e sia $K \subset X$, K convesso e compatto. Allora, se K_e denota l'insieme dei punti estremi di K, si ha $K = \overline{\text{co}}(K_e)$. In particolare se $K \neq \emptyset$ deve essere $K_e \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se $K = \emptyset$ la tesi è banale per cui supponiamo $K \neq \emptyset$. Per il Lemma (3.6.6), con $F_0 = K$, si ha $K_e \neq \emptyset$ Poniamo $\tilde{K} := \overline{\text{co}}(K_e)$; chiaramente $\tilde{K} \subset K$. Se l'inclusione fosse stretta ci sarebbe un punto $x_0 \in K \setminus \tilde{K}$ e allora, usando Hahn-Banach, troveremmo $L \in X^*$ tale che $Lx_0 < \sup\limits_{x\in\tilde{K}} Lx =: \beta$. Dato che K è compatto ed L è continua esiste $\alpha := \min\limits_{x\in K} Lx \leq Lx_0 < \beta$. Posto $K_L := \{x \in K : Lx = \alpha\}$, per il Lemma (3.6.3) si ha che K_L è una faccia non vuota di K. Inoltre K_L è chiusa per la continuità di L e quindi, per il Lemma (3.6.6) K_L deve contenere un punto estremo. Ma

□

Capitolo 4

Dualità e ottimizzazione

4.1 Dualità

4.1.1 Definizione. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e sia $a : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ una applicazione bilineare. Diremo che $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ sono *in dualità* secondo a, o che $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, a)$ è una dualità, se valgono le due seguenti proprietà "di separazione":

(S.1) se $a(x_1, x_2) = 0$ per ogni $x_2 \in \mathbb{X}_2$, allora $x_1 = 0$;

(S.2) se $a(x_1, x_2) = 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$, allora $x_2 = 0$.

Nel resto del paragrafo supponiamo che $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ siano in dualita tramite una a; inoltre scriveremo sempre $\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}$, o più brevemente $\langle x_1, x_2 \rangle$, al posto di $a(x_1, x_2)$. Notiamo che il ruolo di $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ è perfettamente simmetrico.

Se non altrimenti precisato, condidereremo su $\mathbb{X}_1$ la minima topologia $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ che rende continui tutti i funzionali $x_1 \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}$ al variare di $x_2 \in \mathbb{X}_2$; analogamente considereremo su $\mathbb{X}_2$ la minima topologia $\sigma(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)$ che rende continui tutti i funzionali $x_2 \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}$ al variare di $x_1 \in \mathbb{X}_1$. Ricordiamo che queste topologie rendono $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ spazi localmente convessi. Inoltre esse sono di Hausdorff, come si verifica facilmente usando (S.1) e (S.2). Con queste topologie è chiaro che $\mathbb{X}_2$ è (isomorfo a) un sottospazio di $\mathbb{X}_1^*$ e $\mathbb{X}_1$ è (isomorfo a) un sottospazio di $\mathbb{X}_2^*$.

Data una topologia localmente convessa τ_1 su $\mathbb{X}_1$ si dice che τ_1 *è consistente con* la dualità, se il duale di $(\mathbb{X}, \tau_1)$ coincide con $\mathbb{X}_2$ (stesso discorso scambiando $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$). Chiaramente in tal caso τ_1 è più fine di $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ e quindi è di Hausforff. È un problema interessante (di cui non trattiamo) caratterizzare la più fine tra le topologie consistenti con la dualità.

4.1.2 Lemma. *Siano $v_1, \dots, v_n$ n punti di $\mathbb{X}_2$ linearmente indipendenti. Allora esistono $u_1, \dots, u_n$ in $\mathbb{X}_1$ tali che $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ per $i, j = 1, \dots, n$ (si noti che di conseguenza $u_1, \dots, u_n$ sono linermente indipendenti).*

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione su n. Se $n = 1$ il risultato è una conseguenza di (S.2). Supponiamo la tesi vera per n e siano $v_1, \dots, v_{n+1}$ linearmente indipendenti in $\mathbb{X}_2$. Per l'ipotesi induttiva possiamo trovare $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ in $\mathbb{X}_1$ c on $\langle \tilde{u}_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ per $i, j = 1, \dots, n$. Poniamo:

$$M_1 := \operatorname{span}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n), \qquad M_2 := \{x' \in \mathbb{X}_1 : \langle x', v_1 \rangle = \dots = \langle x', v_n \rangle = 0\}.$$

Dico che $\mathbb{X}_1 = M_1 \oplus M_2$. Infatti se $x' = \lambda_1 \tilde{u}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{u}_n$ e $x' \in M_2$ si ottiene: $0 = \langle x_1, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{u}_i, v_j \rangle = \lambda_j$, da cui $x' = 0$. Inoltre se $x' \in \mathbb{X}_1$ e se $\lambda_i := \langle x', v_i \rangle$ non è difficile vedere che $x' - (\lambda_1 \tilde{u}_1 + \cdots + \lambda_n \tilde{u}_n) \in M_2$. Non è possibile che $\langle x_2', v_{n+1} \rangle = 0$ per tutti gli x_2' di M_2, perché in tal caso per ogni $x' \in \mathbb{X}_1$, coi λ_i detti sopra, si avrebbe:

$$\langle x', v_{n+1} \rangle = \langle \lambda_1 \tilde{u}_1 + \cdots + \lambda_n \tilde{u}_n, v_{n+1} \rangle = \lambda_1 \langle \tilde{u}_1, v_{n+1} \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \tilde{u}_n, v_{n+1} \rangle =$$
$$\langle \tilde{u}_1, v_{n+1} \rangle \langle x_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle \tilde{u}_n, v_{n+1} \rangle \langle x_1, v_n \rangle = \langle x_1, \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \rangle ,$$

dove $\mu_j := \langle \tilde{u}_j, v_{n+1} \rangle$, per $j = 1, \ldots, n$ e quindi, per (S.1), v_{n+1} sarebbe combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. Dunque deve esistere un punto $u_{n+1} \in M_2$ con $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle = 1$. Se definiamo allora $u_i := \tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i, v_{n+1} \rangle u_{n+1}$ per $i = 1, \ldots, n$, abbiamo la tesi. □

4.1.3 Corollario. *Siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{X}_2$ e sia φ una forma lineare su $\mathbb{X}_1$ tale che:*

$$\langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle = \cdots = \langle u, v_n \rangle = 0 \Rightarrow \varphi(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathbb{X}_1 \tag{4.1}$$

Allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che:

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, v_i \rangle \qquad \forall u \in \mathbb{X}_1.$$

Dimostrazione. Siano $u_1, \ldots, u_n$ come dal Lemma (4.1.2) e poniamo $\lambda_i := \varphi(u_i)$ per $i = 1, \ldots, n$. Dato $u \in \mathbb{X}_1$ definiamo $\mu_i := \langle u, v_i \rangle$ e $u' := u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$; si ha:

$$\langle u', v_j \rangle = \langle u, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle u_i, v_j \rangle = \langle x_1, v_j \rangle - \mu_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Allora, per l'ipotesi, deve essere $\varphi(u') = 0$, cioè:

$$0 = \varphi(u) - \sum_{i=1}^{n} \mu_j \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, v_i \rangle \Leftrightarrow \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, v_i \rangle .$$

Per l'arbitrarietà di u abbiamo dimostrato la tesi. □

Nel seguente risultato ricordiamo che su $\mathbb{X}_1$ c'è la topologia $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ e su $\mathbb{X}_2$ c'è la topologia $\sigma(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)$.

4.1.4 Proposizione. *Se φ è una forma lineare su $\mathbb{X}_1$, allora esiste $x_2 \in \mathbb{X}_2$ tale che $\varphi(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle$ per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$. In altri termini $\mathbb{X}_2$ è (isomorfo a) $\mathbb{X}_1^*$. Analogamente $\mathbb{X}_1$ è isomorfo a $\mathbb{X}_2^*$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathbb{X}_1^*$. Per la caratterizzazione della topologia $\sigma(\mathbb{X}1, \mathbb{X}_2)$ (Proposizione (2.6.2)) esistono $v_1, \ldots, v_n$ in x_2 e una costante C tali che

$$|\varphi(u)| \leq C \max_{i=1,\ldots,n} | \langle u, v_i \rangle | \qquad \forall u \in \mathbb{X}_1.$$

Tale relazione implica la (4.1), da cui, per il Corollario (4.1.3) φ è (rappresentabile come) combinazione lineare dei v_i e dunque è (rappresentabile come) un elemento di $\mathbb{X}_2$. □

4.1.5 Osservazione. Supponiamo che $\mathbb{X}$ sia uno spazio normato, che quindi ha la sua topologia τ indotta dalla norma. Prendiamo $\mathbb{X}_1 := \mathbb{X}$ $\mathbb{X}_2 := \mathbb{X}^* = \mathbb{X}_\tau^*$ (si vuole evidenziare che X^* dipende da τ) e $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$. È chiaro che valgono (S.1) (per la (2.5.8)) e (S.2) (per definizione di X^*). Dunque X e X^* sono in dualità tramite $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e , per definizione, le topologie indotte dalla dualità sono w (topologia debole) su $\mathbb{X}$ e w^* (topologia debole star) su $\mathbb{X}^*$. La proposizione precedente stabilisce allora che

$$(\mathbb{X}, w)^* = (\mathbb{X}^*, w^*) \quad \text{e} \quad (\mathbb{X}_\tau^*, w^*)^* = (\mathbb{X}, w).$$

4.1.6 Definizione. Sia $f : \mathbb{X}_1 \to [-\infty, +\infty]$ una funzione. Chiamiamo *funzione coniugata* o *polare* di f la funzione $f^* : \mathbb{X}_2 \to [-\infty, +\infty]$ definita da:

$$f^*(x_2) := \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \left(\langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1)\right).$$

4.1.7 Osservazione. Per la definizione di estremo superiore si ha:

$$\begin{aligned} f^*(x_2) = \inf\{c : c \geq \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1)\ \forall x_1 \in \mathbb{X}_1\} = \\ \inf\{c : f(x_1) \geq \langle x_1, x_2 \rangle - c\ \forall x_1 \in \mathbb{X}_1\} = -\sup\{c : f(x_1) \geq \langle x_1, x_2 \rangle + c\ \forall x_1 \in \mathbb{X}_1\}. \end{aligned}$$

Se conveniamo di scrivere $l \parallel x_2$ (l è parallelo a x_2), quando l è affine, $x_2 \in \mathbb{X}_2$ e $l(x_1) = l(0) + \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2}$ per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$, allora la proprietà sopra si esprime:

$$-f^*(x_2) = \sup_{l \in \Gamma_a(f)\ ,\ l \parallel x_2} l(0). \tag{4.2}$$

Vale anche:

$$\Gamma_a(f) = \left\{ l = \langle \cdot, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} + q : f^*(x_2) \leq -q \right\}.$$

Infatti, dato $(x_2, q) \in \mathbb{X}_2 \times \mathbb{R}$ e posto $l(x_1) := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} + q$, si ha:

$$\begin{aligned} l \in \Gamma_a(f) \Leftrightarrow f(x_1) \geq \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} + q \quad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1 \Leftrightarrow \\ -q \geq \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} - f(x_1) \quad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1 \Leftrightarrow f^*(x_2) \leq -q. \end{aligned}$$

4.1.8 Proposizione. *Siano $f, g : \mathbb{X}_1 \to [-\infty, +\infty]$. Valgono le seguenti proprietà.*

(a) *Se esiste un punto $x_1 \in \mathbb{X}_1$ in cui $f(x_1) = -\infty$, allora f^* è identicamente eguale a $+\infty$ (il viceversa non vale, vedi per esempio $f(x) = -x^2$).*

(b) *Si ha:*

$$\exists x_2 \in \mathbb{X}_2 \text{ tale che } f^*(x_2) = -\infty \Leftrightarrow f \equiv +\infty \Leftrightarrow f^* \equiv = -\infty.$$

(c) *Qualunque sia f la funzione f^* è convessa e semicontinua inferiormente.*

(d) $f^* = \overline{\text{co}}(f)^*$.

(e) *Sia $x_1 \in \mathcal{D}(f)$. Allora $x_2 \in \partial f(x_1)$ se e solo se $f(x_1) + f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2}$.*

(f) $f^*(0) = -\inf_{\mathbb{X}_1} f$.

(g) *Se $f \leq g$, allora $f^* \geq g^*$.*

(h) *Data una famiglia di funzioni $(f_i)_{i \in \mathscr{I}}$, allora:*

$$\left(\inf_{i \in \mathscr{I}} f_i\right)^* = \sup_{i \in \mathscr{I}} f_i^*, \qquad \left(\sup_{i \in \mathscr{I}} f_i\right)^* \leq \inf_{i \in \mathscr{I}} f_i^*.$$

(i) *Se $\lambda > 0$ e $q \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$f(\lambda x_1)^*(x_2) = f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right), \quad (\lambda f)^*(x_2) = \lambda f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right), \quad (f + q)^* = f^* - q.$$

Se $\tilde{f}(x) := f(-x)$ allora $(\tilde{f})^* = \tilde{f}^*$.

(j) *Se* $x_0 \in \mathbb{X}_1$ *e se denotiamo con* f_{x_0} *la funzione translata:* $f_{x_0}(x) := f(x - x_0)$ *per* $x \in \mathbb{X}_1$, *allora* $f^*_{x_0}(x_2) = f^*(x_2) + \langle x_0, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}$. *Viceversa, se* $x_0 \in \mathbb{X}_2$, *allora* $(f + \langle \cdot, x_0 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2})^* = f^*_{x_0}$.

(k) $f^{**} = \overline{\mathrm{co}}(f)$. *Specifichiamo che* $f^{**} = (f^*)^*$, *e che, nella seconda iterazione dello* *, *si scambiano* $\mathbb{X}_1$ *e* $\mathbb{X}_2$.

(l) $f^{***} = f^*$.

Dimostrazione. (a) Per ogni $x_2 \in \mathbb{X}_2$ si ha $f^*(x_2) \geq \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(x_1) = +\infty$.

(b) Sia $x_2 \in \mathbb{X}_2$. Allora $f^*(x_2)$ può fare $-\infty$ se e solo se $\langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) = -\infty$ per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$ e cioè se e solo se f è identicamente eguale a $+\infty$. Il resto è immediato.

(c) Se f assume in qualche punto il valore $-\infty$, allora $f^* \equiv +\infty$ che è s.c.i. . Se invece $f > -\infty$ in $\mathbb{X}_1$, allora

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathcal{D}(f)} \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(x_1) \qquad \forall x_2 \in \mathbb{X}_2$$

(chiaramente i punti x_1 in cui $f(x_1) = +\infty$ si possono tralasciare). Dato che, per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$, la funzione $x_2 \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(x_1)$ è continua su $\mathbb{X}_2$ (per definizione di $\sigma(X_1^*, x_2)$) ed è affine, allora f^* è s.c.i. e convessa.

(d) Per l'Osservazione (3.2.16) si ha $\Gamma_a(f) = \Gamma_a\left(\overline{\mathrm{co}}(f)\right)$ e quindi la tesi segue in virtù della (4.2).

(e) Dati x_1 con $f(x_1) \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{X}_2$ si ha:

$$\begin{aligned} x_2 \in \partial f(x_1) &\Leftrightarrow f(x_1') \geq f(x_1) + \langle x_1' - x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} \qquad \forall x_1' \in \mathbb{X}_1 \Leftrightarrow \\ & - f(x_1) + \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} \geq -f(x_1') + \langle x_1', x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} \qquad \forall x_1' \in \mathbb{X}_1 \Leftrightarrow \\ - f(x_1) + \langle x_1, x_2 \rangle &= \sup_{x_1' \in \mathbb{X}_1} \Big(-f(x_1') + \langle x_1', x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} \Big) \Leftrightarrow -f(x_1) + \langle x_1, x_2 \rangle = f^*(x_2). \end{aligned}$$

(f) È ovvio dalla definizione.

(g) Se $f \leq g$ e $x_2 \in \mathbb{X}_2$, si ha:

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(x_1) \Big) \geq \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - g(x_1) \Big) = g^*(x_2).$$

(h) Poniamo $\underline{f} := \inf_{i \in \mathscr{I}} f_i$. Se $x_2 \in \mathbb{X}_2$, allora:

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathscr{I}} f_i^*(x_2) &= \sup_{i \in \mathscr{I}} \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f_i(x_1) \Big) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \sup_{i \in \mathscr{I}} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f_i(x_1) \Big) = \\ & \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} + \sup_{i \in \mathscr{I}} (-f_i(x_1)) \Big) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - \underline{f}(x_1) \Big) = \underline{f}^*(x_2). \end{aligned}$$

Infine se $\overline{f} := \sup_{i \in \mathscr{I}} f_i$, basta notare che $f_i \leq \overline{f}$ $\forall i \in \mathscr{I}$ e quindi per (g) $f_i^* \geq \overline{f}^*$ $\forall i \in \mathscr{I}$.

(i) Sia $\lambda > 0$ e indichiamo (solo qui) $f_\lambda(x_1) := f(\lambda x_1)$. Allora, dato $x_2 \in \mathbb{X}_2$:

$$(f_\lambda)^*(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(\lambda x_1) \Big) = \sup_{u_1 \in \mathbb{X}_1} \left(\frac{1}{\lambda} \langle u_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(u_1) \right) = f^* \left(\frac{x_2}{\lambda} \right);$$

$$\tilde{f}(x_2)^* = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(-x_1) \Big) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle -x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2} - f(x_1) \Big) = f^*(-x_2).$$

Le altre due proprietà si dimostrano in modo analogo.

(j) Sia $x_0 \in \mathbb{X}_1$. Allora:

$$f^*_{x_0} = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} - f(x_1 - x_0) \Big) =$$
$$\sup_{u_1 \in \mathbb{X}_1} \Big(\langle u_1 + x_0, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} - f(u_1) \Big) = f^*(x_2) + \langle x_0, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2}$$

L'altra proprietà è un'immediata conseguenza della definizione.
(k) Dato $x_1 \in \mathbb{X}_1$, si ha, usando l'Osservazione (4.1.7):

$$\overline{\mathrm{co}}(f)(x_1) = \sup_{l \in \Gamma_a(f)} l(x_1) = \sup_{(x_2, q) \in \mathbb{X}_2 \times \mathbb{R} : -f^*(x_2) \geq q} \langle x_1, x_2 \rangle + q =$$
$$\sup_{x_2 \in \mathbb{X}_2} \langle x_1, x_2 \rangle - f^*(x_2) = f^{**}(x_1).$$

(l) Per la (d) e la (k)

$$f^{***} = (f^*)^{**} = (\overline{\mathrm{co}}(f)^*)^{**} = (\overline{\mathrm{co}}(f)^{**})^* = \overline{\mathrm{co}}(f)^* = f^*.$$

□

4.1.9 Osservazione. Se f è pari allora f^* è pari.

4.1.10 Corollario (Teorema di Fenchel-Moreau)**.** *Sia f propria. Allora f è convessa e s.c.i. se e solo se $f^{**} = f$.*

4.1.11 Osservazione. Da quanto detto sopra si deduce che f è propria se e solo se f^* è propria. Se f è propria vale la *diseguaglianza di Young*:

$$f(x_1) + f^*(x_2) \geq \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} \qquad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1,\ \forall x_2 \in \mathbb{X}_2;$$

inoltre (per la (e)) si ha l'eguaglianza se e solo se $x_2 \in \partial f(x_1)$. Nel caso di f convessa s.c.i. si ha anche che $x_2 \in \partial f(x_1)$ equivale a $x_1 \in \partial f^*(x_2)$. Quest'ultima proprietà segue dall'osservazione:

$$x_2 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) + f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle \Leftrightarrow f^{**}(x_1) + f^*(x_2) = \langle x_1, , x_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 \in \partial f^*(x_2)$$

4.1.12 Esempio. Si ha:

(a) Se $\bar{x}_2 \in \mathbb{X}_2$ e $q \in \mathbb{R}$ e se $f(x_1) = \langle x_1, \bar{x}_2 \rangle + q$ per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$, allora

$$f^*(x_2) = \begin{cases} -q & \text{se } x_2 = \bar{x}_2 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} = \chi_{\{\bar{x}_2\}} - q.$$

(b) Sia $\mathbb{X}_1 = X$ con X spazio normato e $\mathbb{X}_2 = X^*$ come nell'Osservazione (4.1.5). Sia $\psi : [-\infty, +\infty] \to]-\infty, \infty]$ una funzione convessa, s.c.i. , propria e pari. Poniamo $f(x) := \psi\left(\|x\|_X\right)$. Allora

$$f^*(x^*) = \psi^*\left(\|x^*\|_{X^*}\right). \tag{4.3}$$

Si noti che la parità di ψ serve (solo) a definire ψ^*. In effetti, se $x^* \in X^*$:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \left(\left\langle x, x^*_{X,X^*} \right\rangle - \psi\left(\|x\|_X\right) \right) = \sup_{\rho \geq 0} \sup_{x \in X, \|x\|_X = \rho} \left(\left\langle x, x^*_{X,X^*} \right\rangle - \psi(\rho) \right) =$$
$$\sup_{\rho \geq 0} \left(\rho \|x^*\|_{x^*} - \psi(\rho) \right) = \sup_{\rho \in \mathbb{R}} \left(\rho \|x^*\|_{x^*} - \psi(\rho) \right) = \psi^*\left(\|x^*\|_{X^*}\right)$$

(c) Se $E \subset X$ e $f = \chi_E$ allora:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \Big(\langle x, x^* \rangle_{X,X^*} - \chi_E(x) \Big) = \sup_{x \in E} \langle x, x^* \rangle_{X,X^*}.$$

Questa coniugata viene detta *funzione supporto* di E. Notiamo che:

$$(\chi_E)^* = (\overline{\text{co}}\,(\chi_E))^* = \big(\chi_{\overline{\text{co}}(E)}\big)^*$$

(d) La funzione $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ha come coniugata $\varphi^*(x^*) = \dfrac{(x^*)^2}{2}$, come si verifica facilmente.

4.1.13 Proposizione. *Supponiamo che $\mathbb{X}_1$ sia uno spazio normato con norma $\|\cdot\|_1$ e che $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_1^*$. Supponiamo che $f : \mathbb{X}_1 \to [-\infty, +\infty]$ sia convessa. Allora sono equivalenti*

(a) *esiste $x_2 \in \mathbb{X}_2$ con $f^*(x_2) \in \mathbb{R}$;*

(b) *f è propria e*

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon\ f(x_1) \geq -c(1 + \|x_1\|_1) \quad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1.$$

Dimostrazione. Se $f^*(x_2) \in \mathbb{R}$ allora f è propria (per (a) e (b) della (4.1.8)) e per ogni $x_1 \in \mathbb{X}_1$ si ha $f(x_1) \geq -f^*(x_2) + \langle x_1, x_2 \rangle$. Dato che $\mathbb{X}_2 \subset \mathbb{X}_1^*$ si ha $|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\|_1 \|x_2\|_{\mathbb{X}_1^*}$ e quindi vale (b). Viceversa supponiamo (b). Per il lemma (3.4.6) esiste $u_2 \in \mathbb{X}_2$ tale che:

$$f(x_1) \geq -c + \langle x_1, x_2 \rangle \qquad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1.$$

Per ogni n sia x_n in $\mathbb{X}$ tale che $f^*(x_n^*) = \langle x_n^*, x_n \rangle - f(x_n)$. Questo implica $f^*(x_2) \leq c < +\infty$. Dato che f è propria $f^*(x_2) > -\infty$ da cui (a). □

4.1.14 Proposizione. *Supponiamo che $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$ sia uno spazio di Banach riflessivo e che $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}^*$. Supponiamo che $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ sia debolmente s.c.i. , propria e che valga:*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty. \tag{4.4}$$

Allora f^* è finita ed è continua in ogni punto di $\mathbb{X}^*$.

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte è chiaro che per ogni $x^* \in \mathbb{X}^*$ la funzione $x \mapsto f(x) - \langle x^*, x \rangle$ ammette minimo finito in quanto propria, debolmente semicontinua con sottolivelli limitati (e quindi debolmente compatti). Dunque per ogni $x^* \in \mathbb{X}^*$ esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che $f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - f(x) \in \mathbb{R}$. Dico che f^* è semicontinua superiomente. Per vederlo fissiamo x^* in X^* e prendiamo una successione (x_n^*) in $\mathbb{X}^*$ tale che:

$$x_n^* \to x^*, \qquad \lim_{n \to \infty} f^*(x_n^*) = \overline{\ell} := \limsup_{z^* \to x^*}{}^* f^*(z^*).$$

Sia M una costante tale che $\|x_n^*\| \leq M$ per ogni n. Per ogni n sia x_n in $\mathbb{X}$ tale che $f^*(x_n^*) = \langle x_n^*, x_n \rangle - f(x_n)$. Per la (4.4) esiste R tale che $f(x) \geq 2M\|x\|$ per ogni x con $\|x\| \geq R$. Possiamo anche supporre che $RM \geq 1 - f(0)$. Se $\|x\| \geq R$ si ha:

$$\langle x_n^*, x \rangle - f(x) \leq \|x_n^*\| \|x\| - 2M\|x\| \leq (M - 2M)R = -MR < f(0) - 1.$$

Ne segue $f(x) \leq \sup\limits_{\|x\| \leq R} (\langle x_n^*, x \rangle - f(x)) - 1$ per ogni x con $\|x\| \geq R$ e quindi $\|x_n\| \leq R$. Dunque esistono $x \in \mathbb{X}$ e una successione (x_{n_k}) estratta da (x_n) tali che $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Allora

$$\limsup_{z* \to x^*} f^*(z^*) = \limsup_{k \to \infty}{}^* f^*(x_{n_k}^*) = \limsup_{k \to \infty}{}^* (\langle x_{n_k}^*, x_{n_k} \rangle - f(x_{n_k})) =$$
$$\langle x^*, x \rangle - \liminf_{k \to \infty}{}^* f(x_{n_k}) \leq \langle x^*, x \rangle - f(x) \leq f^*(x^*).$$

Abbiamo provato che f^* è s.c.s. . Dato che f^* è sempre s.c.i. si ha che f^* è continua. □

4.2 Dualità e ottimizzazione

In questo paragrafo $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ saranno due spazi in dualità mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2}$ e $\mathbb{Y}_1$ e $\mathbb{Y}_2$ due spazi in dualità mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2}$. Non è difficile verificare che allora i prodotti $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1$ e $\mathbb{X}_2 \times \mathbb{Y}_2$ sono in dualità mediante $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1, \mathbb{X}_2 \times \mathbb{Y}_2} := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2}$.

Considereremo inoltre una funzione $F : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1 \to [-\infty, +\infty]$ e indicheremo anche $f(x_1) := F(x_1, 0)$. L'idea sottostante è che $F(\cdot, x_2)$ è una *perturbazione* di f.

4.2.1 Definizione. Chiamiamo *problema primale* il problema:

$$\text{trovare } \bar{x}_1 \in \mathbb{X}_1 \text{ tale che } f(\bar{x}_1) = F(\bar{x}_1, 0) = \inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F(x_1, 0) = \inf_{\mathbb{X}_1} f. \tag{$\mathscr{P}$}$$

Sia $F^* : \mathbb{X}_2 \times \mathbb{Y}_2 \to [-\infty, +\infty]$ la coniugata di F. Chiamiamo *problema duale* il problema:

$$\text{trovare } \bar{y}_2 \in \mathbb{Y}_2 \text{ tale che } F^*(0, \bar{y}_2) = \inf_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} F^*(0, y_2). \tag{$\mathscr{P}^*$}$$

Tipicamente il problema duale si definisce come un problema di massimo:

$$\text{trovare } \bar{y}_2 \in \mathbb{Y}_2 \text{ tale che } -F^*(0, \bar{y}_2) = \sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} \left(-F^*(0, y_2)\right). \tag{$\mathscr{P}^*$}$$

Conveniamo di indicare (con un qualche abuso di notazione)

$$\inf \mathscr{P} := \inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F(x_1, 0), \qquad \sup \mathscr{P}^* := \sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} \left(-F^*(0, y_2)\right),$$

Che vengono detti il *valore* di $\mathscr{P}$ e di $\mathscr{P}^*$ rispettivamente. Diremo che $\mathscr{P}$ è *non banale* se $\inf \mathscr{P} < +\infty$ e che $\mathscr{P}^*$ è *non banale* se $\sup \mathscr{P} > +\infty$. Analogamente diremo che $\bar{x}_1$ è *soluzione non banale* di ($\mathscr{P}$) se $F(\bar{x}_1, 0) = \inf \mathscr{P} < +\infty$ e che $\bar{y}_2$ è *soluzione non banale* di ($\mathscr{P}^*$) se $-F(0, \bar{y}_2) = \sup \mathscr{P}^* > -\infty$.

Si può anche introdurre il *problema biduale*:

$$\text{trovare } \bar{x}_1 \in \mathbb{X}_1 \text{ tale che } F^{**}(\bar{x}_1, 0) = \inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F^{**}(x_1, 0). \tag{$\mathscr{P}^{**}$}$$

4.2.2 Proposizione. *Si ha:*

$$-\infty \leq \sup \mathscr{P}^* \leq \inf \mathscr{P} \leq +\infty. \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Siano $y_2 \in \mathbb{X}_1$ e $v \in \mathbb{Y}_2$. Allora

$$-F^*(0, y_2) = \inf_{(u,v) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1} F(u, v) - \langle v, y_2 \rangle \leq \inf_{v \in \times \mathbb{Y}_1} F(x_1, v) - \langle v, y_2 \rangle \leq F(x_1, 0).$$

□

La differenza $\inf \mathscr{P} - \sup \mathscr{P}^*$ (quando ha senso) viene detta *duality gap*.
ESEMPI DI DIS. STRETTA

4.2.3 Proposizione. *Supponiamo che*

$$\inf \mathscr{P} = \sup \mathscr{P}^*. \tag{4.6}$$

Allora per ogni $\bar{x}_1$ soluzione di ($\mathscr{P}$) e ogni $\bar{y}_2$ soluzione di ($\mathscr{P}^*$) si ha:

$$F(\bar{x}_1, 0) = -F^*(0, \bar{y}_2). \tag{4.7}$$

Viceversa se $\bar{x}_1 \in \mathbb{X}_1$ e $\bar{y}_2 \in \mathbb{Y}_2$ verificano la (4.7), allora $\bar{x}_1$ è soluzione di ($\mathscr{P}$), $\bar{y}_2$ è soluzione di ($\mathscr{P}^*$) e vale la (4.6).

Se uno (quindi entrambi) dei numeri (4.7) è finito, allora (4.7) equivale a:

$$F(\bar{x}_1, 0) + F^*(0, \bar{y}_2) = 0. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Se $\bar{x}_1$ è soluzione di $(\mathscr{P})$ si ha $F(\bar{x}_1, 0) = \inf \mathscr{P}$; se $\bar{y}_2$ è soluzione di $(\mathscr{P}^*)$ si ha $-F(0, \bar{x}_2) = \sup \mathscr{P}^*$. Dalla (4.6) segue (4.7). Viceversa, dalla (4.5) si deduce che

$$-F^*(0, y_2) \leq \sup \mathscr{P}^* \leq \inf \mathscr{P} \leq F(x_1, 0) \qquad \forall x_1 \in \mathbb{X}_1, \forall y_2 \in \mathbb{Y}_2.$$

Se $\bar{x}_1$ e $\bar{y}_2$ verificano (4.7), allora tutte le diseguaglianze scritte sopra sono eguaglianze. $\square$

D'ora in poi supponiamo che sia:

$$F \text{ convessa, s.c.i. e propria.} \tag{F}$$

In questo caso $F^{**} = F$, dunque $(\mathscr{P})$ è il duale di $(\mathscr{P}^*)$.

Indicheremo con $h : \mathbb{Y}_1 \to [-\infty, +\infty]$ la funzione:

$$h(y_1) := \inf_{\mathbb{X}_1} F(\cdot, y_1) = \inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F(x_1, y_1).$$

4.2.4 Proposizione. *Nell'ipotesi* (F)*, la funzione h è convessa.*

Dimostrazione. Siano v' e v'' in $\mathbb{Y}_1$ e sia $\lambda \in [0,1]$. Supponiamo $h(v'), h(v'') < +\infty$ (cfr. (3.1.4)). Siano $c', c'' \in \mathbb{R}$ tali che $c' > h(v')$ e $c'' > h(v'')$; possiamo trovare $u', u'' \in \mathbb{X}_1$ tali che $F(u', v') \leq c'$ e $F(u'', v'') \leq c''$. Poniamo $u_\lambda := \lambda u' + (1-\lambda)u''$, $v_\lambda := \lambda v' + (1-\lambda)v''$. Per la convessità di F si ha:

$$h(v_\lambda) \leq F(u_\lambda, v_\lambda) \leq \lambda F(u', v') + (1-\lambda)F(u'', v'') \leq \lambda c' + (1-\lambda)c''.$$

Per l'arbitrarietà di c', c'' si ha $h(v_\lambda) \leq \lambda h(v') + (1-\lambda)h(v'')$, cioè la tesi. $\square$

4.2.5 Osservazione. Per il risultato precedente basta che F sia convessa. In ogni caso non è detto che h sia propria, né che h sia s.c.i. .

4.2.6 Lemma. *Con le notazioni introdotte sopra, si ha:*

$$h^*(y_2) = F^*(0, y_2) \qquad \forall y_2 \in \mathbb{Y}_2. \tag{4.9}$$

Di conseguenza:

$$\sup \mathscr{P}^* = \sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} (-F^*(0, y_2)) = \sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} -h^*(y_2) = h^{**}(0).$$

Dimostrazione. Si ha:

$$F^*(0, y_2) = \sup_{(x_1, y_1) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1} \big(\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2} - F(x_1, y_1)\big) =$$
$$\sup_{y_1 \in \mathbb{Y}_1} \left(\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2} - \inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F(x_1, y_1)\right) = \sup_{y_1 \in \mathbb{Y}_1} \big(\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2} - h(y_1)\big) = h^*(y_2).$$

$\square$

Come prima individuiamo le condizioni in cui i valori del problema primale e del problema duale coincidono e sono finiti.

4.2.7 Definizione. Si dice che il problema $(\mathscr{P})$ è *normale* se $h(0) \in \mathbb{R}$ e h è s.c.i. in 0.

4.2.8 Proposizione. *Supponiamo che valga* (F)*. I seguenti fatti sono equivalenti.*

(a) *$(\mathscr{P})$ è normale.*

(b) *$(\mathscr{P}^*)$ è normale.*

(c) $\inf \mathscr{P} = \sup \mathscr{P}^* \in \mathbb{R}$ *(in particolare il duality gap è zero).*

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (c) Supponiamo che ($\mathscr{P}$) sia normale. Per la semicontinuità in zero, usando (a) dell'osservazione (3.2.18), si ha $\overline{\text{co}}(h)(0) = h(0)$. Dato che $\overline{\text{co}}(h) = h^{**}$ se ne deduce $h(0) = h^{**}(0)$ che equivale alla tesi in virtù del Lemma (4.2.6).

(c) $\Rightarrow$ (a) Se viceversa vale (c) si ha $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbb{R}$. Dato che $h^{**} = \overline{\text{co}}(h)$ abbiamo $\overline{\text{co}}(h)(0) = h(0)$. Possiamo allora applicare la (b) delll'osservazione (3.2.18) e ottenere che h è s.c.i. in zero.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Basta osservare che, essendo $F^{**} = F$, si ha:

$$\inf_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} F^*(0, y_2) = -\sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} (-F^*(0, y_2))) , \quad \sup_{x_1 \in \mathbb{X}_1} ((-F^{**}(x_1, 0)) = -\inf_{x_1 \in \mathbb{X}_1} F(x_1, 0).$$

□

Notiamo che, per (a) $\Leftrightarrow$ (c) basta la convessità di F (cfr. la (4.2.5)).

Come seconda cosa vediamo quando il problema duale ha soluzione.

4.2.9 Lemma. *Sempre assumendo* (F), *se* $h^{**}(0) \in \mathbb{R}$ *si ha:*

$$\partial h^{**}(0) = \left\{ \bar{y}_2 \in \mathbb{Y}_2 : -F^*(0, \bar{y}_2) = \sup_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} (-F^*(0, y_2) \right\} (= \{ sol. \ di \ (\mathscr{P}^*) \}) .$$

Dimostrazione. Per la (e) della (4.1.8) e per la (4.9) si ha:

$$\bar{y}_2 \in \partial h^{**}(0) \Leftrightarrow h^{**}(0) + h^{***}(\bar{y}_2) = \langle 0, \bar{y}_2 \rangle \Leftrightarrow h^{**}(0) + h^*(\bar{y}_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$h^*(\bar{y}_2) = \inf_{y_2 \in \mathbb{Y}_2} h^*(y_2) \Leftrightarrow F^*(0, \bar{y}_2) = \inf_{y_2 \in \mathbb{X}_2} F^*(0, y_2).$$

□

4.2.10 Definizione. Si dice che il problema ($\mathscr{P}$) è *stabile* se $h(0) \in \mathbb{R}$ e $\partial h(0) \neq \emptyset$.

4.2.11 Proposizione. *Sotto l'ipotesi* (F) *il problema* ($\mathscr{P}$) *è stabile se e solo se problema* ($\mathscr{P}$) *è normale e il problema* ($\mathscr{P}^*$) *ha una soluzione.*

Dimostrazione. Dimostriamo $\Rightarrow$. Se ($\mathscr{P}$) è stabile, allora $h(0) \in \mathbb{R}$ ed esiste $x_2 \in \partial h(0)$. Per la (3.12) si ha $h(0) = \overline{\text{co}}(h)(0)$ e $x_2 \in \partial \overline{\text{co}}(h)(0)$. Dunque h è s.c.i. in 0 e quindi ($\mathscr{P}$) è normale. Essendo $\overline{\text{co}}(h) = h^{**}$, si ha $x_2 \in \partial h^{**}(0)$; dal Lemma (4.2.9) si deduce che ($\mathscr{P}^*$) ha una soluzione. Per il viceversa basta ragionare al contrario. □

La seguente proposizione fornisce un criterio di stabilità.

4.2.12 Proposizione. *Supponiamo che* F *sia convessa, che* $h(0) = \inf_{\mathbb{X}_1} F(\cdot, 0) \in \mathbb{R}$ *e che*

$$\textit{esista } \tilde{x}_1 \in X_1 \textit{ tale che } F(\tilde{x}_1, \cdot) \textit{ sia finita e continua in} = 0. \tag{4.10}$$

Allora ($\mathscr{P}$) *è stabile.*

Dimostrazione. Se $F(\tilde{x}_1, \cdot)$ è continua in 0 e $F(\tilde{x}_1, 0) \in \mathbb{R}$, allora $F(\tilde{x}_1, \cdot)$ è limitata in un intorno di zero. Dato che $h(y_1) \leq F(\tilde{x}_1, y_1)$, si ha che h è superiormente limitata in un intorno di zero. Per il Lemma (3.2.20) h è continua in (un intorno di) zero e per (3.3.13) h è sottodifferenziabile in (un intorno di) zero. □

Usando la Proposizione (3.2.25) ricaviamo la la risolubilità di ($\mathscr{P}$).

4.2.13 Teorema. *Supponiamo che* $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$ *con* $\mathbb{X}$ *spazio di Banach riflessivo e* $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}^*$, *che* $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y}_1 \to]-\infty, \infty]$ *sia convessa, s.c.i. e propria, che siano verificata le ipotesi* (4.10) *e la* (3.10)*. Allora* $(\mathscr{P})$ *ha una soluzione non banale* $\bar{x}$, $(\mathscr{P}^*)$ *ha una soluzione non banale* $\bar{y}_2$.

Inoltre $\bar{x}$ *e* $\bar{y}_2$ *sono soluzioni se e solo se è verificata la condizione di estremalità* $F(\bar{x}, 0) + F^*(0, \bar{y}_2) = 0$ *e in tal caso* $\inf \mathscr{P} = \sup \mathscr{P}^* \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per la (4.10) $(\mathscr{P})$ è stabile; in particolare $F(\cdot, 0)$ è propria. Per ipotesi $F(\cdot, 0)$ è convessa s.c.i. e quindi, per la Proposizione (3.2.25) ammette minimo finito. In altre parole $(\mathscr{P})$ ha una soluzione non banale $\bar{x}$. Sempre per la stabilità, a causa della Proposizione (4.2.11) si ha che $(\mathscr{P}^*)$ ha una soluzione non banale $\bar{y}_2$.

La caratterizzazione delle soluzioni mediante la condizione di estremalità segue dalla Proposizione (4.2.3). □

4.2.14 Esempio. Supponiamo che valgano le seguenti condizioni.

(F.1) $\mathbb{X}$ sia uno spazio di Banach riflessivo, $\mathbb{Y}$ uno spazio normato, $\Lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un operatore lineare e continuo, $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ e $g : \mathbb{Y} \to]-\infty, \infty]$ due funzioni convesse, sci e proprie.

(F.2) Si abbia:

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{X}} \to \infty} (f(x) + g(\Lambda x)) = +\infty.$$

(F.3) Esista $x_0 \in \mathbb{X}$ tale che $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, $\Lambda x_0 \in \mathcal{D}(g)$ e g è continua in Λx_0.

Considereremo le dualità "canoniche" tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}^*$ e tra $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Y}^*$ (in questo modo $\mathbb{Y}$ viene dotato della topologia debole e $\mathbb{Y}^*$ della debole star – cfr. l'Osservazione (4.1.5)).

Definiamo $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to]-\infty, \infty]$ ponendo:

$$F(x, y) := f(x) + g(\Lambda x - y) \qquad \forall x \in \mathbb{X},\ \forall y \in \mathbb{Y}.$$

Indichiamo con Λ^* l'aggiunto di Λ. Notiamo che nella definizione di Λ^* è lo stesso considerare su $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ le topologie forti o le deboli, visto che i duali sono gli stessi. Allora:

$$\begin{aligned}
F^*(0, y^*) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{Y}} \Big(\langle x, 0 \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} + \langle y, y^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - f(x) - g(\Lambda x - y) \Big) = \\
\sup_{x \in \mathbb{X}} \sup_{z \in \mathbb{Y}} \Big(\langle \Lambda x - z, y^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - f(x) - g(z) \Big) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \Big(\langle \Lambda x, y^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - f(x) \Big) + \\
\sup_{z \in \mathbb{Y}} \Big(\langle -z, y^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - g(z) \Big) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \Big(\langle x, \Lambda^* y^* \rangle_{\mathbb{Y},\mathbb{Y}^*} - f(x) \Big) + g^*(-y^*) = \\
= f^*(\Lambda^* y^*) + g^*(-y^*) \qquad \forall y^* \in Y^*.
\end{aligned}$$

La (F.3) implica la (4.10), mentre la (F.2) equivale alla (3.10). Dunque per il Teorema (4.2.13) esistono $\bar{x} \in X$ soluzione non banale del problema primale e $\bar{y}^* \in Y^*$ soluzione non banale del problema duale, sulle quali si realizza la condizione di estremalità $F(\bar{x}, 0) + F^*(0, \bar{y}^*) = 0$. In virtù del calcolo fatto sopra, questa condizione diventa:

$$\begin{aligned}
0 = f(\bar{x}) + g(\Lambda \bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) + g^*(-\bar{y}^*) = \\
f(\bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) - \langle \bar{x}, \Lambda^* \bar{y}^* \rangle_{X,X^*} + g(\Lambda \bar{x}) + g^*(-\bar{y}^*) - \langle \Lambda \bar{x}, -\bar{y}^* \rangle_{Y,Y^*}
\end{aligned}$$

(dato che $\langle \bar{x}, \Lambda^* \bar{y}^* \rangle_{X,X^*} = \langle \Lambda \bar{x}, \bar{y}^* \rangle_{Y,Y^*}$). Per la diseguaglianza di Young questo equivale a

$$f(\bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) = \langle \bar{x}, \Lambda^* \bar{y}^* \rangle_{X,X^*}, \quad \langle \Lambda \bar{x}, \bar{y}^* \rangle_{Y,Y^*} = -g(\Lambda \bar{x}) - g^*(-\bar{y}^*). \tag{4.11}$$

che, in termini di sottodifferenziali, si può scrivere:

$$\Lambda^*\bar{y}^* \in \partial f(\bar{x}), \quad -\bar{y}^* \in \partial g(\Lambda\bar{x}), \qquad \bar{x} \in \partial f^*(\Lambda^*\bar{y}^*), \quad \Lambda\bar{x} \in \partial g^*(-\bar{y}^*). \tag{4.12}$$

Si noti che dalla (4.12) segue $0 \in \partial f(\bar{x}) + \partial(g \circ \Lambda)((\bar{x})$ e analogamente $0 \in \partial(f^* \circ \Lambda^*)(\bar{y}^*) + \partial(g^* \circ (-Id))(\bar{y}^*)$ (cfr. l'Osservazione (3.3.17)).

Dal Teorema (4.2.13) si vede dunque che le (4.11) o le (4.12) sono condizioni necessarie e sufficienti affinché:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + g(\Lambda\bar{x}) &= \min_{x \in X} (f(x) + g(\Lambda x)) = \\ &= \max_{y^* \in Y^*} (-f^*(\Lambda^* y^*) - g^*(-y^*)) = -f^*(\Lambda^*\bar{y}^*) - g^*(-\bar{y}^*). \end{aligned}$$

4.2.15 Osservazione. Nell'esempio precedente, se si assume solo (F.3), oltre naturalmente al fatto che f e g sono convesse, s.c.i. e proprie, si ha comunque:

$$\inf_{x \in X} (f(x) + g(\Lambda x) = \sup_{y^* \in X^*} (f^*(\Lambda^* y^*) + g^*(-y^*) = \max_{y^* \in X^*} (f^*(\Lambda^* y^*) + g^*(-y^*),$$

come si vede facilmente dalle dimostrazioni.

4.2.16 Esempio. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto. Consideriamo $\mathbb{X} := \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\mathbb{Y} := \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^N) = (\mathrm{L}^2(\Omega))^N$. Sia $\mathbb{X}$ che $\mathbb{Y}$ sono spazi di Hilbert. $\mathbb{X}$ è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{X}} = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx$ (a causa della diseguaglianza di Poincaré non occorre il termine $\int_\Omega uv \, dx$). Analogamente $\mathbb{Y}$ è di Hilbert col prodotto scalare $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle_{\mathbb{Y}} = \int_\Omega \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \, dx$. Identifichiamo $\mathbb{X}^*$ con $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}^*$ con $\mathbb{Y}$: questo equivale a dire che consideriamo $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 := \mathbb{X}$ in dualità mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{X}}$ e $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{Y}_2 := \mathbb{Y}$ in dualità mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{Y}}$.

Sia inoltre $h \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ ($=\mathbb{Y}^*$, ma qui non lo identifichiamo con $\mathbb{X}$) e definiamo $f : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{R}$, $\Lambda : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{Y}_1$ ponendo:

$$f(u) := -\langle u, h \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} \ , \ \Lambda(u) := \nabla u \quad \forall u \in \mathbb{X} \quad , \quad g(\mathbf{p}) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathbf{p}|^2 \, dx \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{Y}.$$

Allora, per la (a) di (4.1.12), se $u^* \in \mathbb{X}$, si ha:

$$f^*(u^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle v, u^* \rangle_{\mathbb{X}} = -\langle v, h \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}_*} \quad \forall v \in \mathbb{X}, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

In altri termini f^* è l'indicatrice $\chi_{\{-\tilde{h}\}}$, dove $\left\langle v, \tilde{h} \right\rangle_{\mathbb{X}} = \langle v, h \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}_*}$ per ogni $v \in \mathbb{X}$. Inoltre per le (b) e (d) di (4.1.12):

$$g^*(\mathbf{p}^*) = g(\mathbf{p}^*) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathbf{p}^*|^2 \, dx \quad \forall p \in \mathbb{Y}.$$

Vediamo come si caratterizza l'aggiunto di Λ. Sia $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Y}$ e sia $u^* := \Lambda^* \mathbf{p}*$ in X. Usando le identificazioni tra spazi e duali indicate sopra si ha:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u^* \, dx = \langle v, \Lambda^* \mathbf{p}^* \rangle_{\mathbb{X}} = \langle \Lambda v, \mathbf{p}^* \rangle_{\mathbb{Y}} = \int_\Omega \nabla v \cdot \mathbf{p}^* \, dx \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{4.13}$$

Questo si esprime dicendo che, in forma debole, $u^* = -\mathrm{div}(\mathbf{p}^*)$. In effetti se $\mathbf{p}^*$ è $\mathcal{C}^1$ allora l'eguaglianza $u^* = -\mathrm{div}(\mathbf{p}^*)$ è vera in senso classico, altrimenti la relazione (4.13) è tutto ciò che sappiamo. Dunque $\Lambda^* \mathbf{p}^* = -\mathrm{div}(\mathbf{p}^*)$.

Dato che entrambi f e g sono convesse e continue valgono (F.1) e (F.3). È immediato che:

$$I(u) := f(u) - g(\Lambda(u)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \langle u, h\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$$

verifica la (F.2). Notiamo che I è addirittura differeziabile e che, come è sempice verificare, $I'(u)(v) = \langle u, v\rangle_X - \langle v, h\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$. Dunque se $\bar{u}$ è punto di minimo per I si ha:

$$\int \nabla\bar{u}\cdot\nabla v = \langle v, h\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$$

che è una formulazione debole del problema:

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u} = h & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\mathscr{P}$}$$

Dai risultati visti sopra si ricava che ($\mathscr{P}^*$) corrisponde a minimizzare

$$f^*(\Lambda^*\mathbf{p}^*) + g^*(-\mathbf{p}^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{p}^*|^2\,dx + \chi_{\{\tilde{h}\}}(\Lambda^*\mathbf{p}).$$

Dunque esiste $\overline{\mathbf{p}}^*$ tale che:

$$\operatorname{div}(\overline{\mathbf{p}}^*) = h, \qquad \int_\Omega |\overline{\mathbf{p}}^*|^2\,dx \le \int_\Omega |\mathbf{p}^*|^2\,dx \quad \forall \mathbf{p}^* \in \mathbb{Y} \text{ con } \operatorname{div}(\mathbf{p}^*) = h. \tag{$\mathscr{P}^*$}$$

Per la seconda delle (4.11) abbiamo infine:

$$\langle \nabla\bar{u}, \cdot\overline{\mathbf{p}}^*\rangle_{\mathbb{Y}} = -\frac{1}{2}\|\nabla\bar{u}\|^2_Y - \frac{1}{2}\|\overline{\mathbf{p}}^*\|^2_Y \Leftrightarrow \overline{\mathbf{p}}^* = -\nabla\bar{u}.$$

4.3 Lagrangiana e punti di sella

4.3.1 Definizione (Lagrangiana)**.** Data $F : X_1 \times Y_1 \to [-\infty, +\infty]$, chiamiamo *Lagrangiana* associata a F la funzione $L_F : X_1 \times Y_2 \to [-\infty, +\infty]$ definita da

$$L_F(x_1, y_2) := \inf_{y_1\in Y_1}\Big(F(x_1, y_1) - \langle y_1, y_2\rangle_{Y_1,Y_2}\Big) \qquad \forall x_1 \in X_1,\ \forall y_2 \in Y_2.$$

Detto in altro modo $-L_F(x_1, y_2) = F^*_{x_1}(y_2)$, dove $F_{x_1}(y_1) = F(x_1, y_1)$.

4.3.2 Proposizione. *Sia $F : X_1 \times Y_1 \to [-\infty, +\infty]$.*

(a) *Per ogni $x_1 \in X_1$ la funzione $L_F(x_1, \cdot)$ è concava ed è semicontinua superiormente.*

(b) *Se F è convessa, allora per ogni $y_2 \in Y_2$ la funzione $L_F(\cdot, y_2)$ è convessa.*

4.3.3 Osservazione. Non possiamo dire che $L_F(\cdot, y_2)$ è semicontinua inferiormente, nemmeno supponendo F semicontinua inferiormente.

4.3.4 Definizione. Un punto $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ di $X_1 \times Y_2$ si dice *punto di sella* per L_F se

$$L_F(\bar{x}_1, y_2) \le L_F(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \le L_F(x_1, \bar{y}_2) \qquad \forall x_1 \in X_1,\ \forall y_2 \in Y_2. \tag{4.14}$$

In questo caso chiamiamo *valore di sella* il numero $L_F(x_1, \bar{y}_2)$.

4.3.5 Osservazione. In generale si ha

$$\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,\tilde{y}_2) \le L_F(\tilde{x}_1,\tilde{y}_2) \le \sup_{y_2\in Y_2} L_F(\tilde{x}_1,y_2) \qquad \forall \tilde{x}_1\in X_1,\ \forall \tilde{y}_2 \in Y_2,$$

da cui, per ogni $\tilde{x}_1\in X_1$ e $\tilde{y}_2\in Y_2$, valgono le diseguaglianze:

$$\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,\tilde{y}_2) \le \sup_{y_2\in Y_2}\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,y_2) \le \inf_{x_1\in X_1}\sup_{y_2\in Y_2} L_F(x_1,y_2) \le \sup_{y_2\in Y_2} L_F(\tilde{x}_1,y_2). \tag{4.15}$$

È chiaro che un punto $(\bar{x}_1,\bar{y}_2)$ è di sella per L_F se e solo se

$$L_F(\bar{x}_1,\bar{y}_2) = \inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,\bar{y}_2) = \sup_{y_2\in Y_2} L_F(\bar{x}_1,y_2), \tag{4.16}$$

e quindi, prendendo $\tilde{x}_1=\bar{x}_1$ e $\tilde{y}_2=\bar{x}_2$ in (4.15), si vede che $(\bar{x}_1,\bar{y}_2)$ è di sella se e solo se

$$L_F(\bar{x}_1,\bar{y}_2) = \sup_{y_2\in Y_2}\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,y_2) = \inf_{x_1\in X_1}\sup_{y_2\in Y_2} L_F(x_1,y_2) \tag{4.17}$$

4.3.6 Lemma. *Senza nessuna ipotesi su F si ha:*

$$\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,y_2) = -F^*(0,y_2) \qquad \forall y_2\in Y_2. \tag{4.18}$$

Se vale (F)*, allora si ha anche:*

$$\sup_{y_2\in Y_2} L_F(x_1,y_2) = F(x_1,0) \qquad \forall x_1\in X_1. \tag{4.19}$$

Dimostrazione. La (4.18) segue da:

$$F^*(x_2,y_2) = \sup_{x_1\in X_1}\sup_{y_1\in Y_1}\Big(\langle x_1,x_2\rangle_{X_1,X_2} + \langle y_1,y_2\rangle_{Y_1,Y_2} - F(x_1,y_1)\Big) = \\ \sup_{x_1\in X_1}\Big(\langle x_1,x_2\rangle_{X_1,X_2} - L_F(x_1,y_2)\Big).$$

Per la (4.19) si ragiona in maniera simile:

$$F^{**}_{x_1}(y_1) = \sup_{y_2\in Y_2}\Big(\langle y_1,y_2\rangle_{Y_1,Y_2} - F^*_{x_1}(y_2)\Big) = \sup_{y_2\in Y_2}\Big(\langle y_1,y_2\rangle_{Y_1,Y_2} + L_F(x_1,y_2)\Big).$$

usando il fatto che $F^{**}_{x_1}(y_1) = F(x_1,y_1)$ dato che F_{x_1} è convessa e s.c.i. (per la (F)). □

4.3.7 Teorema. *Supponiamo che valga la* (F)*. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.*

(a) $(\bar{x}_1,\bar{y}_2)$ *in* $X_1\times Y_2$ *è punto di sella per* L_F.

(b) $\bar{x}_1$ *è soluzione di* $(\mathscr{P})$, $\bar{y}_2$ *è soluzione di* $(\mathscr{P}^*)$ *e* $\inf(\mathscr{P}) = \sup(\mathscr{P}^*)\in\mathbb{R}$.

Inoltre, se valgono (a) *e* (b)*, il valore comune* $\inf(\mathscr{P}) = \sup(\mathscr{P}^*)$ *coincide con il valore di sella* $L_F(\bar{x}_1,\bar{y}_2)$ *per ogni punto di sella* $(\bar{x}_1,\bar{y}_2)$.

Dimostrazione. Dalle (4.19), (4.18) e da (4.5) segue (in generale):

$$\sup_{y_2\in Y_2}\inf_{x_1\in X_1} L_F(x_1,y_2) = \sup_{y_2\in Y_2}(-F^*(0,y_2)) = \sup(\mathscr{P}^*) \le \\ \le \inf(\mathscr{P}) = \inf_{x_1\in X_1} F(x_1,0) = \inf_{x_1\in X_1}\sup_{y_2\in Y_2} L_F(x_1,y_2). \tag{4.20}$$

Supponiamo che valga (a) e sia $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ punto di sella. Allora per la (4.17) gli estremi della (4.20) sono eguali a $L_F(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$; ne segue:

$$\sup(\mathscr{P}^*) = -F^*(0, \bar{y}_2) = L_F(\bar{x}_1, \bar{y}_2) = F(\bar{x}_1, 0) = \inf(\mathscr{P}) \tag{4.21}$$

da cui segue la (b), a causa della Proposizione (4.2.3). Viceversa se vale (b) abbiamo

$$\sup(\mathscr{P}^*) = -F^*(0, \bar{y}_2) = F(\bar{x}_1, 0) = \inf(\mathscr{P})$$

e quindi gli estremi della (4.20) sono eguali. Dunque vale (4.17), da cui $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ è di sella. □

4.3.8 Proposizione. *Supponiamo che valga* (F) *e che* $(\mathscr{P})$ *sia stabile. Allora* $\bar{x}_1 \in X_1$ *è soluzione di* $(\mathscr{P})$ *se e solo se esiste* $\bar{y}_2 \in Y_2$ *tale che* $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ *è punto di sella per* L_F. *Dato che* $(\mathscr{P})$ *è stabile tutte le soluzioni sono non banali (e il valore di sella è finito).*

Dimostrazione. Sia $\bar{x}_1 \in X_1$. Se $\bar{x}_1$ è soluzione di $(\mathscr{P})$; dato che $(\mathscr{P})$ è stabile, per la Proposizione (4.2.11), $(\mathscr{P}^*)$ ha una soluzione $\bar{y}_2$. Per il Teorema (4.3.7) $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ è punto di sella per L_F. Viceversa, se esiste $\bar{y}_2 \in Y_2$ tale che $(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ è punto di sella, sempre dal Teorema (4.3.7) segue che $\bar{x}_1 \in X_1$ è soluzione di $(\mathscr{P})$ (e $\bar{y}_2$ è soluzione di $(\mathscr{P}^*)$). □

4.3.9 Osservazione. Nell'Esempio (4.2.14) la Lagrangiana è data da:

$$\begin{aligned} &L(x, y^*) = \inf_{y \in Y} \Big(f(x) + g(\Lambda x - y) - \langle y, y^* \rangle_{Y,Y^*} \Big) = \\ &\inf_{z \in Y} \Big(f(x) + g(z) - \langle \Lambda x - z, y^* \rangle_{Y,Y^*} \Big) = f(x) - \langle \Lambda x, y^* \rangle + \inf_{z \in Y} \Big(g(z) - \langle -z, y^* \rangle_{Y,Y^*} \Big) = \\ &\qquad = f(x) - \langle \Lambda x, y^* \rangle_{Y,Y^*} - g^*(-y^*). \end{aligned}$$

4.4 Un teorema di mini–massimo

ATTENZIONE ALLE SOVRAPPOZIZIONI CON MATERIALE PRECEDENTE

In questo paragrafo consideriamo $\mathbb{X}$ spazio di Banach riflessivo e $\mathbb{Y}$ uno spazio vettoriale. Consideriamo inoltre una funzione $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to [-\infty, +\infty]$ tale che:

(a) per ogni $y \in \mathbb{Y}$ la funzione $f(\cdot, y)$ è convessa, s.c.i. ed è coerciva, cioè:

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x, y) = +\infty;$$

(b) per ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $f(x, \cdot)$ è concava su $\mathbb{Y}$.

4.4.1 Osservazione. Se f verifica (a) e (b), allora per la semicontinuità di $f(\cdot, y)$:

$$f(x, y) = -\infty \Leftrightarrow f(x', y) = -\infty \quad \forall x' \in X$$

e quindi, posto $K := \{y \in \mathbb{Y} : \ f(x, y) > -\infty \ \forall x \in \mathbb{X}\}$, si ha

$$\{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : f(x, y) > -\infty\} = \mathbb{X} \times K.$$

Inoltre K è convesso perché, se $y_1, y_2 \in K$, $t \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{X}$, usando (b):

$$f(x, ty_1 + (1-t)y_2) \geq tf(x, y_1) + (1-t)f(x, y_2) > -\infty.$$

Dimostreremo il seguente teorema di mini–massimo

4.4.2 Teorema. *Se f verifica* (a) *e* ((b)) *si ha:*

$$\sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y) = \inf_{x\in\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y).$$

Il nucleo della dimostrazione è contenuto nel seguente lemma.

4.4.3 Lemma. *Sia $n\in\mathbb{N}$. Allora*

$$\left.\begin{array}{c} \textit{se } f \textit{ verifica } \text{(a)} \textit{ e } \text{(b)},\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{Y},\ \textit{e } \alpha' > \sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y),\ i=1,\dots,n \\ \textit{allora } f(\cdot,y_1)^{\alpha'}\cap\cdots f(\cdot,y_n)^{\alpha'}\neq\emptyset \end{array}\right\}\qquad (\mathrm{P}.n)$$

(ricordiamo che se f è una funzione e $c\in\mathbb{R}$, allora $f^c := \{f\le c\}$ è il sottolivello).

Dimostrazione. Dimostriamo la (P.n) per induzione cominciando dal caso $n=2$. Siano dunque f verificante(a) e (b) e $\alpha' > \alpha := \sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$. Siano $y_1, y_2\in\mathbb{Y}$ e mostriamo che $C_1\cap C_2\neq\emptyset$, dove $C_i := f(\cdot,y_i)^{\alpha'}$, per $i=1,2$. Supponiamo per assurdo che $C_1\cap C_2=\emptyset$. Dico che in questo caso esiste $\lambda\in[0,1]$ tale che:

$$\lambda f(x,y_1) + (1-\lambda)f(x,y_2) \ge \alpha' \qquad \forall x\in\mathbb{X}. \tag{4.22}$$

In effetti se $x\notin C_1\cup C_2$ la (4.22) è vera per qualunque $\lambda\in[0,1]$, dato che allora $f(\cdot,y_1)>\alpha'$ e $f(\cdot,y_2)>\alpha'$. Se invece $x\in C_1\cup C_2$ deve essere $x\in C_1\setminus C_2$) oppure $x\in C_2\setminus C_1$) (dato che $C_1\cap C_2=\emptyset$). Nel primo caso $f(x,y_1)\le\alpha'$ e $f(x,y_2)>\alpha'$ e la (4.22) è verificata se e solo se:

$$\lambda \le \frac{f(x,y_2)-\alpha'}{f(x,y_2)-f(x,y_1)},$$

mentre nel secondo $f(x,y_1)>\alpha'$ e $f(x,y_2)\le\alpha'$ e la (4.22) vale se e solo se:

$$\lambda \ge \frac{\alpha'-f(x,y_2)}{f(x,y_1)-f(x,y_2)}.$$

Dunque per trovare un $\lambda\in[0,1]$ per cui valga la (4.22) è necessario e sufficiente che:

$$\frac{\alpha'-f(x_2,y_2)}{f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)} \le \frac{f(x_1,y_2)-\alpha'}{f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)} \quad \forall x_1\in C_1, \forall x_2\in C_2 \tag{4.23}$$

(si noti che le quantità scritte a sinistra sono in $[0,1]$, cosicchè λ, se esiste, sarà in $[0,1]$). Con semplici calcoli si vede che la disuguaglianza in (4.23) è equivalente a:

$$(\alpha'-f(x_1,y_1))(\alpha'-f(x_2,y_2)) \le (f(x_1,y_2)-\alpha')(f(x_2,y_1)-\alpha')\ \forall x_1\in C_1,\forall x_2\in C_2. \tag{4.24}$$

Notiamo che tutti i fattori coinvolti nella (4.24) sono non negativi – quelli a destra sono positivi. La (4.24) è ovvia se il prodotto a sinistra è nullo. Supponiamo allora che $f(x_1,y_1)<\alpha'$ e $f(x_2,y_2)<\alpha'$ mentre $f(x_1,y_2)>\alpha'$ e $f(x_2,y_1)>\alpha'$. Possiamo allora prendere $\theta\in]0,1[$ in modo che:

$$\theta f(x_1,y_1) + (1-\theta)f(x_2,y_1) = \alpha' \tag{4.25}$$

e definire $x_\theta := \theta x_1 + (1-\theta)x_2$. Per la convessità di $f(\cdot,y_1)$ si ha $f(x_\theta,y_1)\le\alpha'$, dunque $x_\theta\in C_1$. Ma allora $f(x_\theta,y_2)>\alpha'$ e per la convessità di $f(\cdot,y_2)$:

$$\alpha' < \theta f(x_1,y_2) + (1-\theta)f(x_2,y_2). \tag{4.26}$$

Da (4.25) e (4.26) segue:

$$\theta(f(x_1,y_1)-\alpha')+(1-\theta)(f(x_2,y_1)-\alpha')=0<\theta(f(x_1,y_2)-\alpha')+(1-\theta)(f(x_2,y_2)-\alpha')$$

da cui

$$\frac{\alpha'-f(x_1,y_1)}{f(x_2,y_1)-\alpha'}=\frac{1-\theta}{\theta}<\frac{f(x_1,y_2)-\alpha'}{\alpha'-f(x_2,y_2)}$$

che dimostra la (4.24) e quindi l'esistenza di λ per cui vale (4.22).

A questo punto, posto $y_\lambda := \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, usando la concavità di $f(x,\cdot)$ si trova:

$$f(x,y_\lambda)\geq\alpha' \qquad \forall x\in\mathbb{X}$$

da cui seguirebbe $\alpha=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)\geq\alpha'>\alpha$, che è assurdo. Dunque $C_1\cap C_2\neq\emptyset$.

Per concludere verifichiamo che (P.n). è induttiva per $n\geq 2$. Per questo prendiamo f verificante(a) e (b) e $\alpha'>\alpha:=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$, prendiamo $y_0,\dots,y_n$ in $\mathbb{Y}$ e indichiamo $C_i := f(\cdot,y_i)^{\alpha'}$ per $i=0,\dots,n$. Definiamo $\bar f:\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to 1[-\infty,+\infty]$ ponendo

$$\bar f(x,y):=\begin{cases} f(x,y) & \text{se } x\in C_0,\\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

È semplice vedere che $\bar f$ verifica (a) e (b) e che $\bar f(\cdot,y_i)^{\alpha'}=C_0\cap C_i$, per $i=1,\dots,n$. Sia $\alpha''\in\mathbb{R}$ con $\alpha<\alpha''<\alpha'$. Da (P.2) ricaviamo che

$$\forall y\in\mathbb{Y}\quad f(\cdot,y)^{\alpha''}\cap f(\cdot,y_0)^{\alpha''}\neq\emptyset\Rightarrow\forall y\in\mathbb{Y}\quad \inf_{x\in C_0} f(x,y)\leq\inf_{f(\cdot,y_0)^{\alpha''}} f(x,y)\leq\alpha''$$

cioè $\inf_{x\in\mathbb{X}}\bar f(x,y)\leq\alpha''$ per ogni $y\in\mathbb{Y}$ da cui

$$\bar\alpha:=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}}\bar f(x,y)\leq\alpha''<\alpha.$$

Dunque possiamo applicare l'ipotesi induttiva ottenendo

$$\emptyset\neq\bigcap_{i=1}^n\bar f(\cdot,y_i)^{\alpha'}=\bigcap_{i=1}^n(C_0\cap C_i)=\bigcap_{i=0}^n C_i=\bigcap_{i=0}^n f(\cdot,y_i)^{\alpha'}.$$

□

Dimostrazione di (4.4.2). Poniamo $\alpha:=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x,y)$ e $\beta=\inf_{x\in\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y)$. Si ha:

$$f(x,y)\leq\sup_{\mathbb{Y}} f(x,\cdot)\ \forall(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\Rightarrow\inf_{\mathbb{X}} f(\cdot,y)\leq\beta\ \forall y\in\mathbb{Y}\Rightarrow\alpha\leq\beta.$$

Se $\alpha=+\infty$ ne segue subito $\alpha=\beta$. Supponiamo allora $\alpha<+\infty$ e fissiamo $\alpha'\in\mathbb{R}$ con $\alpha'>\alpha$. Poniamo $C(\alpha',y):=f(\cdot,y)^{\alpha'}=\{f(\cdot,y)\leq\alpha'\}$. Se $y\in\mathbb{Y}$ l'insieme $C(\alpha',y)$ è convesso chiuso e limitato a causa di (a); dunque è debolmente compatto in $\mathbb{X}$ (riflessivo). Per il lemma (4.4.3) ogni intersezione finita $\bigcap_{i=1}^n C(\alpha',y_i)$, con $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{Y}$ è diversa dal vuoto. Per la compattezza:

$$\bigcap_{y\in\mathbb{Y}}^n f(\cdot,y)^{\alpha'}\neq\emptyset\quad\Leftrightarrow\quad\exists x\in\mathbb{X}\colon f(x,y)\leq\alpha'\ \forall y\in\mathbb{Y}\quad\Rightarrow\quad\inf_{x\in\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y)\leq\alpha'.$$

Per l'arbitrarietà di $\alpha'>\alpha$ se ne deduce $\beta\leq\alpha$. □

4.4.4 Proposizione. *Supponiamo che $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ siano entrambi dei Banach riflessivi, che f verifichi* (a) *e* (b) *e che in aggiunta si abbia:*

(c) *per ogni $x \in \mathbb{X}$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è semicontinua superiormente su $\mathbb{Y}_2$ e*

$$\lim_{\|y\| \to \infty} f(x,y) = -\infty$$

Supponiamo inoltre che $\gamma := \sup_{y \in \mathbb{Y}} \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x,y) = \inf_{x \in \mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{Y}} f(x,y) \in \mathbb{R}$.

Allora esistono $x_0 \in \mathbb{Y}_1$ e $y_0 \in \mathbb{Y}_2$ tali che $f(x_0, y_0) = \gamma$ e dunque:

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall y \in \mathbb{Y}.$$

Il punto (x_0, y_0) si dice punto di sella *e $\gamma = f(x_0, y_0)$* valore di sella *per $f(x,y)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $M : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ definita da $M(x) := \sup_{y \in \mathbb{Y}} f(x,y)$ Per le proposizioni (3.1.10) e (3.2.5) M è convessa e s.c.i. . È anche ovvio che M è coerciva, mentre da $\inf_{x \in \mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{Y}} f(x,y) < +\infty$ si ricava che M è propria. Ne segue che esiste $x_0 \in \mathcal{D}(M)$ di minimo per M. Ragionando nello stesso modo su $m : \mathbb{Y} \to [-\infty, +\infty]$ definita da $m(y) := \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x,y)$ si trova $y_0 \in \mathcal{D}(m)$ di massimo per m.

È chiaro allora che (x_0, y_0) è un punto di sella. □

4.4.5 Osservazione. Se valgono (a), (b) e (c), allora esistono $K_1 \subset \mathbb{X}$ e $K_2 \subset \mathbb{Y}$ convessi tali che:

$$\{(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : f(x,y) \in \mathbb{R}\} = K_1 \times K_2.$$

per vederlo basta ragionare come nell'osservazione (4.4.1).

Dunque si potrebbe scrivere il teorema di mini–massimo per funzioni a valori reali, aventi come dominio il prodotto di due convessi.

Capitolo 5

Operatori Massimali monotoni

5.1 Operatori multivoci

5.1.1 Definizione. Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ degli insiemi. Chiamiamo *operatore multivoco* una funzione $f : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{Y}}$. Scriveremo anche $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ per indicare che $f(x)$ ha valori nelle parti di $\mathbb{Y}$. Se $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si può sempre vedere f come operatore multivoco $\hat{f}$ dove $\hat{f}(x) = \{f(x)\}$. Di solito si confondono $\hat{f}$ e f (cosa che può portare ad ambiguità problematiche).

Se $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ chiamiamo *dominio di* f l'insieme $\mathcal{D}(f) := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq \emptyset\}$. Chiamiamo *immagine di* f l'insieme $f(\mathbb{X}) := \{y \in \mathbb{Y} : \exists x \in \mathbb{X} \text{ con } y \in f(x)\}$. Chiamiamo *grafico di* f l'insieme $Graph(f) :=:= \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : y \in f(x)\}$.

Se $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ è comunque ben definita $f^{-1} : \mathbb{Y} \rightrightarrows \mathbb{X}$, dalla relazione

$$x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in f(x).$$

Chiaramente:

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = f(\mathbb{X}), \quad f^{-1}(\mathbb{Y}) = \mathcal{D}(f), \quad (y, x) \in Graph(f^-1) \Leftrightarrow (x, y) \in Graph(f)$$

e

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{X} : (x, y) \in Graph(f)\}, \qquad f(\mathbb{X}) = \{y \in \mathbb{Y} : (x, y) \in Graph(f)\}.$$

Notiamo anche che un qualunque $G \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ è grafico di una f multivoca. Basta infatti definire $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ ponendo

$$y \in f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G.$$

Dunque una funzione multivoca altro non è se non un sottoinsieme di $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

5.2 Operatori massimali monotoni

D'ora in poi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ saranno SVTLC.

5.2.1 Definizione. Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$. Diremo che f è monotona se:

$$\langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \quad \forall x_1^*, x_2^* \in \mathbb{X}^*.$$

Diremo che f *è massimale monotona* se per ogni $f_1 : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ monotona tale che $Graph(f) \subset Graph(f_1)$ si ha $Graph(f) = Graph(f_1)$. In altri termini se f non può essere esteso (nelle x o nelle y) a un operatore multivoco diverso da f.

5.2.2 Osservazione. Se $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ è massimale monotona, allora $f(x)$ è convesso per ogni $x \in \mathbb{X}$. Infatti posto $f_1(x) := \mathrm{co}(f(x))$ si vede facilmente che f_1 è un'estensione monotona di f; per la massimalità $f = f_1$ da cui la tesi.

5.2.3 Lemma. *Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ monotono. Allora f è massimale monotono se e solo se*

$$(x, x^*) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}^*), \ \forall (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(f) \ \langle x - \tilde{x}, x^* - \tilde{x}^* \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in Graph(f).$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$. Sia f massimale monotono e sia (x, x^+) com sopra. Se $(x, x^*) \notin Graph(f)$ allora posto $\bar{G} := Graph(f) \cup \{(x, x^*)\}$, l'insieme $\bar{G}$ è grafico di un operatore monotono $\bar{f}$ che estende strettamente f, da cui un assurdo.

$\Leftarrow$. Supponiamo per assurdo che f non sia massimale monotono. Allora f si può estendere propriamente e quindi esiste un'estensione stretta $\bar{f}$ di f con $\bar{f}$ monotono. Dunque esiste $(x, x^*) \in Graph(\bar{f}) \setminus Graph(f)$. Per la monotonia di $\bar{f}$ deve essere

$$\forall (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(\bar{f}) \ \langle x - \tilde{x}, x^* - \tilde{x}^* \rangle \geq 0$$

e questo in particolare deve valere se $(\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(f) \subset Graph(\bar{f})$. Ma allora $(x, x^*) \in Graph(f)$ che è assurdo. □

5.2.4 Lemma. *Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ massimale monotono e siano (x_n) e (x_n^*) due successioni rispettivamente in $\mathbb{X}$ e in $\mathbb{X}^*$ tali che $x_n^* \in f(x_n)$ per ogni n. Siano inoltre $x \in \mathbb{X}$ e $x^* \in \mathbb{X}^*$ tali che:*

$$x_n \xrightarrow{w} x, \quad x_n^* \xrightarrow{x^*} x^*, \quad \langle x_n, x_n^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} \to \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*}.$$

Allora $y \in f(x)$.

Dimostrazione. Utilizziamo il lemma (5.2.3) (freccia $\Rightarrow$). Prendiamo $(x, x^*) \in Graph(f)$. Per la monotonia:

$$0 \leq \langle x_n - \tilde{x}, x_n^* - \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} = \langle x_n, x_n^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} - \langle x_n, \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} - \langle \tilde{x}, x_n^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} + \langle \tilde{x}, \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*}.$$

Passando al limite (utilizzando tutte le ipotesi) si ottiene che, per ogni $(x, x^*) \in Graph(f)$:

$$0 \leq \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} - \langle x, \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} - \langle \tilde{x}, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} + \langle \tilde{x}, \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} = \langle x - \tilde{x}, x^* - \tilde{x}^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*}.$$

Per il lemma (5.2.3) questo implica $x^* \in f(x)$ □

5.2.5 Corollario (chiusura debole–forte)**.** *Supponiamo $\mathbb{X}$ normato. Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ massimale monotono. Allora il grafico $Graph(f)$ è sequenzialmente chiuso in $\mathbb{X} \times (\mathbb{X}^*, w^*)$ e in $(\mathbb{X}, w) \times \mathbb{X}^*)$. In particolare $Graph(f)$ è chiuso in $\mathbb{X} \times \mathbb{X}^*$.*

Dimostrazione. Supponiamo che (x_n) e x siano in $\mathbb{X}$, che (x_n^*), x^* siano in $\mathbb{X}^*$, che $(x_n, x_n^*) \in Graph(f)$ e che $x_n \to x$ e $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Allora $\langle x_n, x_n^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*} \to \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{X}, \mathbb{X}^*}$ e quindi possiamo applicare il lemma (5.2.4) e dedurre $(x, x^*) \in Graph(f)$. Lo stesso discorso di applica se $x_n \xrightarrow{w} x$ e $x_n^* \to x^*$. □

5.2.6 Osservazione. Da quanto sopra segue che, se $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ è massimale monotono, allora per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha $f(x)$ convesso e chiuso. Questo è un'immediata conseguenza della chiusura (forte) di $Graph(f)$ e di $f(x) = \{x^* : (x, x^*) \in Graph(f)\}$.

5.2.7 Proposizione. *Se $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}^*$ è massimale monotono e $\lambda > 0$ anche λf è massimale monotono.*

5.2.8 Proposizione. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Hilbert e sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$. Allora f è monotono se e solo se per ogni $\lambda > 0$ si ha:*

$$\|x_2 - x_2\| \leq \|(x_2 - x_1) + \lambda(x_2^* - x_1^*)\| \qquad \forall x_i \in \mathbb{X}, \ \forall x_i^* \in \mathbb{X}^* \text{ con } x_i^* \in f(x_i) \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Siano $\lambda > 0$, $x_i \in \mathbb{X}$ e $x_i^* \in f(x_i)$, $i = 1, 2$. Se vale la disuguaglianza allora

$$\|x_2 - x_1\|^2 \leq \|(x_2 - x_1) + \lambda(x_2^* - x_1^*)\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + 2\lambda \langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle + \lambda^2 \|x_2^* - x_1^*\|^2.$$

e dunque

$$\langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle \geq -\frac{\lambda}{2} \|x_2^* - x_1^*\|^2 \qquad \forall \lambda > 0$$

da cui $\langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle \geq 0$. Viceversa se f è monotono, dallo stesso calcolo sopra:

$$\|(x_2 - x_1) + \lambda(x_2^* - x_1^*)\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + 2\lambda \langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle + \lambda^2 \|x_2^* - x_1^*\|^2 \geq \|x_2 - x_1\|^2.$$

□

5.2.9 Lemma. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Hilbert e sia $K \subset \mathbb{X}$ un convesso chiuso. Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ monotono con $\mathcal{D}(f) \subset K$. Allora per ogni x^* in $\mathbb{X}$ esiste $x = x(x^*) \in K$ tale che*

$$\langle \tilde{x}^* + x, \tilde{x} - x \rangle \geq \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle \qquad \forall (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(f).$$

Dimostrazione. Basta dimostrarlo per $x^* = 0$ (per il caso generale si consideri l'operatore $f - \{x^*\}$). Se $(\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(f)$ poniamo

$$C(\tilde{x}, \tilde{x}^*) := \{x \in K : \langle \tilde{x}^* + x, \tilde{x} - x \rangle \geq 0\}.$$

Ogni $C(\tilde{x}, \tilde{x}^*)$ è convesso chiuso, dunque debolmente chiuso, in $\mathbb{X}$. È inoltre limitato, dunque debolmente compatto, perché

$$x \in C(\tilde{x}, \tilde{x}^*) \Rightarrow \|x\|^2 \leq \langle \tilde{x}, \tilde{x}^* \rangle + \langle \tilde{x} - \tilde{x}^*, x \rangle.$$

Se troviamo $x \in \bigcap_{(\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(f)} C(\tilde{x}, \tilde{x}^*)$ abbiamo dimostrato il lemma. In virtù della compattezza basta dimostrare che, se prendiamo un numero finito di punti $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^*), \ldots (\tilde{x}_n, \tilde{x}_n^*)$, allora si ha $\bigcap_{i=1}^{n} C(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i^*) \neq \emptyset$. Per dimostrare questo poniamo:

$$\hat{K} := \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

e definiamo $\xi : \hat{K} \to \mathbb{X}$ e $\varphi : \hat{K} \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$\xi(\boldsymbol{\mu}) := \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tilde{x}_j, \qquad \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{x}_i^* + \xi(\boldsymbol{\mu}), \tilde{x}_i - \xi(\boldsymbol{\mu}) \rangle.$$

Dato che $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n \in \mathcal{D}(f) \subset K$ si ha $\xi(\boldsymbol{\mu}) \in K$ se $\boldsymbol{\mu} \in \hat{K}$. Per la monotonia di f:

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \xi(\boldsymbol{\lambda}) \rangle + \left\langle \xi(\boldsymbol{\lambda}), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i - \xi(\boldsymbol{\lambda})) \right\rangle =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \lambda_j \tilde{x}_j \rangle + \left\langle \xi(\boldsymbol{\lambda}), \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}_i \right)}_{=\xi(\boldsymbol{\lambda})} - \xi(\boldsymbol{\lambda}) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \rangle =$$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} \lambda_i \lambda_j \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \rangle = \sum_{i,j<i} \lambda_i \lambda_j \langle \tilde{x}_i^*, \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \rangle +$$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} \lambda_j \lambda_i \left\langle \tilde{x}_j^*, \tilde{x}_j - \tilde{x}_i \right\rangle = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \lambda_i \lambda_j \left\langle \tilde{x}_i^* - \tilde{x}_j^*, \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \right\rangle \geq 0.$$

Dato che $\hat{K}$ è compatto, φ è lineare in $\boldsymbol{\lambda}$ e concava in $\boldsymbol{\mu}$, per il teorema di mini–massimo (4.4.2) esistono $\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\mu}_0 \in \hat{K}$ tali che

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\mu}) \leq \varphi(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \leq \varphi(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}_0) \qquad \forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \hat{K}. \tag{5.2}$$

Sia ora i tra 1 ed n e sia $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$ tale che $\hat{\lambda}_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ $\hat{\lambda}_{i,i} = 1$. Si ha:

$$\langle \tilde{x}_i^* + \xi(\boldsymbol{\mu}_0), \tilde{x}_i - \xi(\boldsymbol{\mu}_0) \rangle = \varphi(\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_0) \geq \varphi(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \geq \varphi(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) \geq 0.$$

e quindi $\xi(\boldsymbol{\mu}_0) \in \bigcap_{i=1}^{n} C(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i^*)$. Abbiamo provato la tesi. □

5.2.10 Corollario. *Sia $K \subset \mathbb{X}$ un convesso chiuso e sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ monotono tale che $\mathcal{D}(f) \subset K$. Allora esiste $\bar{f} : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ monotono tale che $Graph(f) \subset Graph(\bar{f})$, $\mathcal{D}(\bar{f}) \subset K$ e $(\bar{f} + I)(K) = \mathbb{X}$ (I è l'identità).*

Dimostrazione. Indichiamo

$$\mathscr{M}(f, K) := \left\{ \tilde{f} : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X} \text{ tale che } \tilde{f} \text{ monotono, } \mathcal{D}(f) \subset K,\ Graph(f) \subset Graph(\tilde{f}) \right\}.$$

È semplice verificare che gli elementi di $\mathscr{M}(f, K)$ sono ordinati dalla relazione "$\preceq$", dove $f_1 \preceq f_2$ se e solo se $Graph(f_1) \subset Graph(f_2)$ e che ogni catena ha un elemento massimale. Sia $\bar{f}$ un elemento massimale in $\mathscr{M}(f, K)$. Chiaramente $\bar{f}$ è monotono e $\mathcal{D}(\bar{f}) \subset K$. Vediamo che $(\bar{f} + I)(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$. Sia $x^* \in \mathbb{X}$ e sia $x \in K$ come dal lemma (5.2.9). Se aggiungiamo il punto $(x, x^* - x)$ a $Graph(f)$ otteniamo il grafico di un'estensione $\tilde{\bar{f}}$ di f avente ancora dominio contenuto in K. Tale estensione è monotona perchè:

$$\langle x - \tilde{x}, \tilde{x}^* - (x^* - x) \rangle = \langle \tilde{x}^* + x, \tilde{x} - x \rangle - \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle \geq 0 \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in Graph(\bar{f}).$$

Dunque $\tilde{f} \in \mathscr{M}$. Per la massimalità di $\bar{f}$ deve essere $\tilde{f} \preceq \bar{f}$ e quindi $(x, x^* - x) \in Graph(\bar{f} + I)$, cioè $x^* \in (\bar{f} + I)(x)$. □

5.2.11 Teorema. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Hilbert e sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$. Indichiamo con $I : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ l'identità. Allora sono equivalenti:*

(a) *f è massimale monotono;*

(b) *f è monotono e $(I + f)(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$;*

(c) *per ogni $\lambda > 0$ si ha $\mathcal{D}((I + \lambda f)^{-1}) = \mathbb{X}$, l'operatore $(I + \lambda f)^{-1}$ è univoco ed è 1-lipschitziano da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. (c)⇒(b). Per dimostrare la monotonia basta applicare la (5.2.8). Se $\lambda = 1$ si ha $(I + f)(\mathbb{X}) = \mathcal{D}((I + f)^{-1}) = \mathbb{X}$.

(b)⇒(a) Sia $(x, x^*) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ tale che $\langle \tilde{x} - x, \tilde{x}^* - x^* \rangle \geq 0$ per ogni $(\tilde{x}, \tilde{x}^*)$ in $Graph(f)$. Dato che $(f + I)(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ esiste $x_1 \in \mathbb{X}$ con $x^* + x \in x_1 + f(x_1)$. Allora

$$0 \leq \langle x_1 - x, x^* + x - x_1 - x^* \rangle) = \langle x_1 - x, x - x_1 \rangle = -\|x - x_1\|^2.$$

Ne segue $x = x_1$ e $x^* = x^* + x - x_1 \in f(x_1) = f(x)$.

(a)⇒(c) Sia $\lambda > 0$. Sappiamo che λf è massimale monotono. Per corollario (5.2.10) applicato a λf con $K = \mathbb{X}$ esiste un'estensione $\tilde{f}$ di λf tale che $(\tilde{f} + I)(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$. Dato che λf è massimale $\tilde{f} = \lambda f$ e quindi $(\lambda f + I)(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ o anche $\mathcal{D}((I + \lambda f)^{-1}) = \mathbb{X}$. La 1-lipschitzianità segue da (5.2.8). □

Ne segue facilmente il seguente rafforzamento del corollario (5.2.10).

5.2.12 Corollario. *Sia $f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ monotono. Allora esiste $\bar{f} : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ massimale monotono tale che $Graph(f) \subset Graph(\bar{f})$, $\mathcal{D}(\bar{f}) \subset \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{D}(f))$.*

5.2.13 Esempio. Se $f : \mathbb{X} \to]-\infty, \infty]$ è una funzione convessa s.c.i. , allora $\partial f : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ è un operatore massimale monotono. Questo segue dal teorema (3.3.26).

5.2.14 Proposizione. *Supponiamo che $A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{X}$ sia un operatore lineare definito su $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X}$. Notiamo che A è monotono se e solo se*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Allora A è massimale monotono se e solo se $\mathcal{D}(A)$ è denso in $\mathbb{X}$ e A è massimale tra gli operatori univoci.

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dimostro che $\mathcal{D}(A)$ è denso. Se $y \in \mathbb{X}$ è tale che $\langle y, x\rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$, allora:

$$\langle Ax - y, x - 0\rangle = \langle Ax - y, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Dalla massimalità di A segue ($0 \in \mathcal{D}(A)$ e) $y = A0 = 0$. La massimalità come operatore univoco è ovvia.

$\Leftarrow$ Siano $x, y \in \mathbb{X}$ e supponiamo

$$\langle Ax' - y, x' - x\rangle \geq 0 \qquad \forall x' \in \mathcal{D}(A). \tag{5.3}$$

Allora $x \in \mathcal{D}(A)$ altrimenti definendo $\tilde{A}(x' + tx) := Ax' + ty$ troverei un'estensione $\tilde{A}$ di A definita su $\mathcal{D}(A) + \mathrm{span}\,\{x\}$ che sarebbe ancora (univoca e) monotona per (5.3) contraddicendo la massimalità tra gli operatori univoci. Siano $x' \in \mathcal{D}(f)$ e $t > 0$; prendendo $x + tx'$ in (5.3) si ottiene:

$$\langle A(x + tx') - y, tx'\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Ax - y, x'\rangle \geq t\,\langle Ax', x'\rangle \qquad \forall t > 0,\ \forall x' \in \mathcal{D}(A).$$

da cui $Ax = y$. Questo prova che A è massimale tra gli operatori. □

5.2.15 Osservazione. Un operatore lineare massimale monotono è necessariamente chiuso, come si deduce dalla propossizione (5.2.5).

5.2.16 Esempio. Sia $\mathbb{X} := \mathrm{L}^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$ con il prodotto scalare $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle := \int_0^1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dx$, sia

$$\mathcal{D}(A) := \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{X} : \mathbf{u}' \in \mathrm{L}^2(0, 1; \mathbb{R}^M), \mathbf{u}(0) = 0\right\}, \qquad A\mathbf{u} := \mathbf{u}' \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A)$$

dove $\mathbf{u}'$ è inteso nel senso delle distribuzioni e, come ben noto, ha senso prendere $\mathbf{u}(0)$ dato che $\mathbf{u}' \in \mathrm{L}^2$ implica $\mathbf{u}$ (equivalente a una funzione) continua.

Allora A è monotono perché, se $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \int_0^1 \mathbf{u}'\mathbf{u}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathbf{u}^2)'\, dx = \mathbf{u}^2(1) - \mathbf{u}^2(0) = \mathbf{u}^2(1) \geq 0.$$

Inoltre A è massimale dato che, se $f \in \mathrm{L}^2(0, 1; \mathbb{R}^M)$, allora si può risolvere l'equazione

$$\begin{cases} u' + u = & f \quad \text{in }]0, 1[\\ u(0) = & 0 \end{cases}$$

dato che usando la formula risolutiva si trova:

$$y(x) = \int_0^x e^{t-x} f(x)\, dx$$

Per curiosità calcoliamo l'aggiunto A^*. Si ha:

$$\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A^*) \Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ tale che } \left| \int_0^1 \mathbf{v}'\mathbf{w}\, dx \right| \leq C\|\mathbf{v}\|_2 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A) \tag{5.4}$$

($\mathbf{v} \mapsto \langle A\mathbf{v}, w\rangle$ deve essere continua in L^2) e

$$\int_0^1 (A^*\mathbf{w})\mathbf{v}\, dx = \int_0^1 \mathbf{w}\mathbf{v}'\, dx \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A). \tag{5.5}$$

Dalla caratterizzazione di $\mathcal{D}(A)$, prendendo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_0^\infty$ si ha $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \mathbf{w}' \in \mathrm{L}^2$ e quindi (si dimostra che) vale la formula di integrazione per parti

$$\int_0^1 \mathbf{w}'\mathbf{v}\, dx = -\int_0^1 \mathbf{w}\mathbf{v}'\, dx + [\mathbf{w}\mathbf{v}]_0^1 \qquad \forall \mathbf{v} \text{ con } \mathbf{v}' \in \mathrm{L}^2.$$

Ne segue

$$\int_0^1 (A^*\mathbf{w})\mathbf{v} dx = -\int_0^1 \mathbf{w}\mathbf{v}'\, dx + \mathbf{w}(1)\mathbf{v}(1) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A),\ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(A^*)$$

Possiamo considerare $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ dove $(\mathbf{v}_n)$ è una successione in $\mathcal{D}(A)$ tale che $\mathbf{v}_n(1) = 1$ e $\mathbf{v}_n \to 0$ in $\mathbb{X}$. Da (5.4) e (5.5) otteniamo che il termine a sinistra dell'eguale tende a zero e così pure il primo termine a destra. Ne segue $\mathbf{w}(1) = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A^*)$. In definitiva:

$$\mathcal{D}(A^+) := \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{X} \colon \mathbf{w}' \in \mathrm{L}^2(0,1;\mathbb{R}^M), \mathbf{w}(1) = 0\right\}, \qquad A^*\mathbf{w} := -\mathbf{w}' \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{D}(A^*).$$

Dunque A non è autoaggiunto. Si può dimostrare che allora A non può essere un sottodifferenziale.

5.3 L'approssimante di Yoshida

In questo paragrafo $\mathbb{X}$ è sempre uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ è un operatore multivoco.

5.3.1 Definizione. Se $\lambda > 0$ definiamo $J_{\lambda,A} : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ e $A_\lambda : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ come:

$$J_{\lambda,A} := (I + \lambda A)^{-1}, \qquad A_\lambda := \frac{I - J_{\lambda,A}}{\lambda}. \tag{5.6}$$

Se non c'è ambiguità scriviamo solo J_λ al posto di $J_{\lambda,A}$.

5.3.2 Osservazione. È chiaro che $\mathcal{D}(J_{\lambda,A}) = (I + \lambda A)(\mathbb{X})$. Inoltre se $x, y \in \mathbb{X}$ si ha :

$$y \in J_{\lambda,A}x \Leftrightarrow x \in (I + \lambda A)y \Leftrightarrow \frac{x - y}{\lambda} \in Ay \tag{5.7}$$

$$y \in A_\lambda x \Leftrightarrow \lambda y \in x - J_{\lambda,A}x \Leftrightarrow x - \lambda y \in J_{\lambda,A}x \Leftrightarrow \quad (\text{ per } (5.7)\ )$$
$$\frac{x - (x - \lambda y)}{\lambda} \in A(x - \lambda y) \Leftrightarrow y \in A(x - \lambda y) \tag{5.8}$$

5.3.3 Proposizione. *Siano $\lambda, \mu > 0$. Valgono le seguenti proprietà.*

1. *$Graph(A_\lambda) \subset Graph(AJ_\lambda)$.*
2. *$J_{\mu,A_\lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} I + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} J_{\lambda+\mu,A}$.*
3. *$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$.*
4. *Se A è monotono, allora A_λ è monotono.*
5. *Se A è massimale monotono, allora A_λ è massimale monotono.*

   Inoltre $J_{\lambda,A}, A_\lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sono univoci, $J_{\lambda,A}$ è "non espasivo", cioè lipschitziano di coefficiente 1, mentre A_λ è lipschitziano si coefficiente $1/\lambda$.

Dimostrazione. 1. Siano $x \in \mathbb{X}$ e $y \in A_\lambda(x)$. Per (5.8) $y \in A(x - \lambda y)$ e $x - \lambda y \in J_\lambda x$. In particolare $y \in AJ_\lambda x$.

2. Siano $x, y \in \mathbb{X}$. Usando (5.7) e (5.8) si ha:

$$y \in J_{\mu,A_\lambda} x \Leftrightarrow \frac{x-y}{\mu} \in A_\lambda y \Leftrightarrow \frac{x-y}{\mu} \in A\left(y - \lambda \frac{x-y}{\mu}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{x-y}{\mu} \in A\left(\frac{(\lambda+\mu)y - \lambda x}{\mu}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\lambda+\mu}\left(x - \frac{(\lambda+\mu)y - \lambda x}{\mu}\right) \in A\left(\frac{(\lambda+\mu)y - \lambda x}{\mu}\right) \Leftrightarrow \frac{(\lambda+\mu)y - \lambda x}{\mu} \in J_{\lambda+\mu}(x) \Leftrightarrow$$
$$y - \frac{\lambda x}{\lambda+\mu} \in \frac{\mu}{\lambda+\mu} J_{\lambda+\mu}(x) \Leftrightarrow y \in \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} I + \frac{\mu}{\lambda+\mu} J_{\lambda+\mu}\right) x$$

3. Siano $x, y \in \mathbb{X}$. Allora:

$$y \in (A_\lambda)_\mu(x) \Leftrightarrow y \in A_\lambda(x - \mu y) \Leftrightarrow y \in A(x - \mu y - \lambda x)) \Leftrightarrow y \in A_{\lambda+\mu}(x).$$

4. Se $i = 1, 2$ siano $x_i \in \mathbb{X}$ e $y_i = A_\lambda x_i$. Allora

$$\langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle = \langle y_2 - y_1, (x_2 - \lambda y_2) - (x_1 - \lambda y_1) \rangle + \lambda \|y_2 - y_1\|^2 \geq 0$$

dato che $y_i \in A(x_i - \lambda y_i)$. Dunque A_λ è monotono.

5. La monotonia è stata appena dimostrata. Per avere la massimalità basta mostrare che $\mathcal{D}(J_{\mu,A_\lambda}) = \mathbb{X}$ (cfr. teorema (5.2.11) – basterebbe $\mu = 1$). Questo segue dalla (2) sopra, dato che $\mathcal{D}(J_{\lambda+\mu,A}) = \mathbb{X}$ (per la massimalità di A).

   Le altre proprietà seguono facilmente dal teorema (5.2.11) e dalla definizione di A_λ.

□

5.3.4 Lemma. *Sia A massimale monotono. Allora per ogni $x \in \mathbb{X}$:*

$$\|A_{\lambda_2} x\| \leq \|A_{\lambda_1} x\| \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \text{ con } \lambda_2 > \lambda_1 > 0.$$

Se esiste $y \in Ax$ si ha anche:

$$\|A_\lambda x\| \leq \|y\| \qquad \forall \lambda > 0.$$

Infine

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|A_\lambda x\| = \begin{cases} \min\limits_{y \in Ax} \|y\| & \text{se } Ax \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{se } Ax = \emptyset. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $\lambda > 0$; poniamo $x_\lambda := J_\lambda x$ e $y_\lambda := A_\lambda x$. Allora, per le (5.7) e (5.8) $x - \lambda y_\lambda = x_\lambda$ e $y_\lambda \in A(x - \lambda y_\lambda) = A(x_\lambda)$. Se $y \in Ax$ (ammesso che esista):

$$0 \leq \langle y_\lambda - y, x_\lambda - x \rangle = - \langle y_\lambda - y, \lambda y_\lambda \rangle .$$

Ne segue

$$\|y_\lambda\|^2 \leq \langle y_\lambda, y \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \|y_\lambda\| \leq \|y\| \tag{5.9}$$

(abbiamo dimostrato la seconda affermazione). Se ora $h > 0$, applichiamo il ragionamento precedente con A_λ al posto di A e h al posto di λ; ($A_\lambda x$, che esiste sempre, al posto di y):

$$\|(A_\lambda)_h x\|^2 \leq \langle (A_\lambda)_h x, A_\lambda x \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \|y_{\lambda+h}\|^2 \leq \langle y_{\lambda+h}, y_\lambda \rangle$$

perché $(A_\lambda)_h x = A_{\lambda+h} x = y_{\lambda+h}$. Ne segue la monotonia: $\|y_{\lambda+h}\| \leq \|y_\lambda\|$ e la proprieta:

$$\|y_{\lambda+h} - y_\lambda\|^2 = \|y_{\lambda+h}\|^2 + \|y_\lambda\|^2 - 2 \langle y_{\lambda+h}, y_\lambda \rangle \leq \|y_\lambda\|^2 - \|y_{\lambda+h}\|^2 \tag{5.10}$$

Sia $l := \lim_{\lambda \to 0^+} \|A_\lambda x\| = \sup_{\lambda > 0} \|A_\lambda x\|$ ($l \in [0, +\infty]$). Se $l < +\infty$, allora $\lambda \mapsto \|A_\lambda x\|$ è di Cauchy (in $\mathbb{R}$). Per la (5.10) si ha che $\lambda \mapsto A_\lambda x$ è di Cauchy in $\mathbb{X}$ e dunque esiste y_0 in $\mathbb{X}$ tale che $A_\lambda x \to y_0$ in $\mathbb{X}$ (per $\lambda \to 0^+$). In particolare $\|y_0\| = l$. Inoltre $x_\lambda = x - \lambda y_\lambda \to x$. Dato che $y_\lambda \in A(x_\lambda)$, usando il corollario (5.2.5) si ricava $y_0 \in Ax$. Per quanto dimostrato sopra deve essere $l \leq \|y\|$ per ogni $y \in Ax$ da cui segue che $\|y_0\| \leq \|y\|$ per ogni $y \in Ax$.

Abbiamo dunque dimostrato che se $l < +\infty$, allora $Ax \neq \emptyset$ e $l = \min_{y \in Ax} \|y\|$. Viceversa se $Ax \neq \emptyset$, per quanto visto sopra, $l < +\infty$, e quindi $l = +\infty \Leftrightarrow Ax = \emptyset$.

□

5.4 Equazione di evoluzione per un operatore massimale monotono

In questo paragrafo $\mathbb{X}$ è ancora uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ è un operatore massimale monotono.

5.4.1 Teorema. *Sia $T > 0$. Per ogni $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ esiste un'unica funzione $\mathscr{U} : [0, T[\to \mathbb{X}$ lipschitziana e tale che:*

$$\begin{cases} -\mathscr{U}'(t) \in A(\mathscr{U}(t)) & \textit{per q.o } t \in [0, T[, \\ \mathscr{U}(0) = x_0. \end{cases}$$

Notiamo che la lipschitzianità di $\mathscr{U}$ garantisce che $\mathscr{U}'(t)$ esiste in $\mathbb{X}$ per q. o. t (XXX).

Dimostrazione. Dimostriamo l'unicità. Se $\mathscr{U}_1$ e $\mathscr{U}_2$ sono solo soluzioni, dalla monotonia di A si ha, per q.o. t:

$$0 \geq \langle \mathscr{U}_2'(t) - \mathscr{U}_1'(t), \mathscr{U}_2(t) - \mathscr{U}_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathscr{U}_2(t) - \mathscr{U}_1(t)\|^2.$$

Per le proprietà delle funzioni assolutamente continue (XXX) si ha che la funzione $h : [0, T] \to [0, +\infty[$ definita da $h(t) := \|\mathscr{U}_2(t) - \mathscr{U}_1(t)\|$ è assolutamente continua e

$$|h'(t)| \leq \|\mathscr{U}_2'(t) - \mathscr{U}_1'(t)\| \qquad \text{per q.o. } t \in [0, T].$$

Dunque $h' = 0$ q.o. Inoltre $h(0) = 0$ da cui, per l'assoluta continuità, $h(t) =$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostriamo l'esistenza. Sia $\lambda > 0$. Allora $A_\lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ è un operatore (monotono) lipschitziano di costante $1/\lambda$. Per il teorema di Cauchy (???) esiste una curva $\mathscr{U}_\lambda : [0, T] \to \mathbb{X}$ di classe $\mathcal{C}^{1,1}(0, T; \mathbb{X})$ tale che:

$$\begin{cases} -\mathscr{U}_\lambda'(t) \in A_\lambda(\mathscr{U}_\lambda(t)) & \text{per q.o } t \in [0, T[, \\ \mathscr{U}_\lambda(0) = x_0. \end{cases}$$

□

Capitolo 6

Funzionali del tipo del Calcolo delle Variazioni

6.1 Integrandi normali

In questo paragrago Ω indica un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ è tale che:

$$\text{per ogni } \mathbf{s} \text{ in } \mathbb{R}^M \text{ la funzione } G(\cdot, \mathbf{s}) \text{ è misurabile.} \tag{6.1}$$

Si usa dire che una tale G è un *integrando*, dato che G verrà usata per costruire il funzionale $\mathcal{G}(\mathbf{u}) := \int_\Omega G(x, \mathbf{u}(x))\, dx$, dove $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ è una funzione (con proprietà da specificare). Per dare senso a $\mathcal{G}(\mathbf{u})$ sarà necessario aggiungere delle ipotesi su G (come minimo dovremo assicuraci che $G(\cdot, \mathbf{u})$ sia misurabile per le $\mathbf{u}$ su cui intendiamo calcolare $\mathcal{G}$).

Diremo che G è un integrando convesso/semicontinuo/continuo/eccetera…, se per quasi ogni x in Ω la funzione $G(x, \cdot)$ è convessa/semicontinua/continua/eccetera….

6.1.1 Definizione. Diremo che G è un *integrando normale* se:

(a) Per quasi ogni x in Ω la funzione $G(x, \cdot)$ è s.c.i. .

(b) Esiste una funzione boreliana $\tilde{G} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ tale che $G(x, \cdot) = \tilde{G}(x, \cdot)$ per quasi ogni x in Ω (cioè per q.o $x \in \Omega$, $\forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M$ si ha $G(x, \mathbf{s}) = \tilde{G}(x, \mathbf{s})$).

6.1.2 Proposizione. *Se G è un integrando normale allora per ogni funzione misurabile $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ la funzione $G(\cdot, \mathbf{u})$ è misurabile.*

In particolare, dato che le costanti sono misurabili, ogni integrando normale è un integrando, anzi è un integrando semicontinuo inferiormente.

Dimostrazione. È chiaro che la funzione $x \mapsto (x, \mathbf{u}(x))$, da Ω in $\Omega \times \mathbb{R}^M$ è misurabile e quindi la funzione $\tilde{G}(\cdot, \mathbf{u})$ è misurabile in quanto composizione di una misurabile con una boreliana (non sarebbe vero se $\tilde{G}$ fosse solo misurabile !). D'altra parte, per la seconda parte di (*b*), $G(\cdot, \mathbf{u}) = \tilde{G}(\cdot, \mathbf{u})$ quasi ovunque, da cui la tesi. □

6.1.3 Proposizione (somme, prodotti e sup di integrandi normali)**.** *Valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se $G_1 : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ e $G_2 : \Omega \times \mathbb{R}^M \to]-\infty, \infty]$ sono integrandi normali, allora $G := G_1 + G_2$ è un integrando normale (nelle ipotesi fatte non si presenta mai $+\infty - \infty$).*

2. *Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ un integrando normale; se $a : \Omega \to [0, +\infty]$ è misurabile allora $a\,G$ è un integrando normale; se $H : \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ è continua allora $H\,G$ è un integrando normale (usando la convenzione $0\,\infty = 0$).*

3. *Se per ogni* $n \in \mathbb{N}$ $G_n : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ *è un integrando normale, allora* $G := \sup_n G_n$ *è un integrando normale.*

6.1.4 Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè G sia un integrando normale è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un chiuso $C_\varepsilon \subset \Omega$ tale che* $\mathrm{mis}(\Omega \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$ *e la restrizione di G a $C_\varepsilon \times \mathbb{R}^M$ sia s.c.i. .*

6.1.5 Definizione. Diciamo che G è *di Caratheodory* se $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ è un integrando continuo, cioè se vale (6.1) e se $G(x, \cdot)$ è reale e continuo per quasi ogni $x \in \Omega$.

6.1.6 Teorema. *Se G è di Caratheodory, allora è un integrando normale.*

Dimostrazione. Se rimpiazziamo G con $\exp(G)$ possiamo supporre $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$. Possiamo anche supporre che $G(x, \cdot)$ sia continua per ogni x in Ω: basta ridefinire $G(x, \mathbf{s}) = 0$ (per esempio) se $x \in \{x \in \Omega : \ G(x, \cdot) \text{ non è continua}\}$. Indichiamo con $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ e come al solito $B(\mathbf{z}, r) := \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M : \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| < r\right\}$. Si ha:

$$
\begin{aligned}
G(x, \mathbf{s}) = \liminf_{\mathbf{z} \to \mathbf{s}}{}^* G(x, \mathbf{z}) &= \sup_{r > 0} \inf_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{s}, r)} G(x, \mathbf{z}) = \\
&\sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup \{c \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{s}, r) \quad G(x, \mathbf{z}) \geq c\} \underbrace{=}_{(*)} \\
&\sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup \left\{c \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M \cap B(\mathbf{s}, r) \quad G(x, \mathbf{z}) \geq c\right\} = \\
&\sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup \left\{c \in \mathbb{Q} : \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M \ (\mathbf{z} \in B(\mathbf{s}, r) \Rightarrow G(x, \mathbf{z}) \geq c)\right\} = \\
\sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} c \mathbb{1}_{A_{r,c}}(x, \mathbf{s}) &= \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} c \mathbb{1}_{\bigcap_{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M} A_{r,c,\mathbf{z}}}(x, \mathbf{s}) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M} c \mathbb{1}_{A_{r,c,\mathbf{z}}}(x, \mathbf{s})
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
A_{r,c} &= \left\{(x', \mathbf{s}') \in \Omega \times \mathbb{R}^M : \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M \ (\mathbf{z} \in B(\mathbf{s}', r) \Rightarrow G(x', \mathbf{z}) \geq c)\right\} \\
A_{r,c,\mathbf{z}} &= \left\{(x', \mathbf{s}') \in \Omega \times \mathbb{R}^M : (|\mathbf{z} - \mathbf{s}'| \geq r) \vee (G(x', \mathbf{z}) \geq c)\right\}.
\end{aligned}
$$

Nel passaggio $(*)$ si è usata la continuità. Notiamo che:

$$
\mathcal{C} A_{r,c,\mathbf{z}} = \left\{(x', \mathbf{s}') \in \Omega \times \mathbb{R}^M : |\mathbf{z} - \mathbf{s}'| < r \, , \, G(x', \mathbf{z}) < c\right\} = E_{c,\mathbf{z}} \times B(\mathbf{z}, r)
$$

dove

$$
E_{\mathbf{z},c} := \{x' \in \Omega : G(x', \mathbf{z}) < c\}
$$

e quindi:

$$
G(x, \mathbf{s}) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M} c \left(1 - \mathbb{1}_{E_{\mathbf{z},c}}(x) \mathbb{1}_{B(\mathbf{z},r)}(\mathbf{s})\right). \tag{6.2}
$$

Dato che G è un integrando si ha che gli $E_{\mathbf{z},c}$ sono misurabili. Per ogni $(\mathbf{z}, c)$ possiamo allora trovare un boreliano $\tilde{E}_{\mathbf{z},c} \subset \Omega$ tale che $\mathrm{mis}\left(E_{\mathbf{z},c} \, \Delta \, \tilde{E}_{\mathbf{z},c}\right) = 0$. Ma allora $\tilde{E}_{\mathbf{z},c} \times B(\mathbf{z}, r)$ è boreliano in $\Omega \times \mathbb{R}^M$, e quindi la funzione definita da:

$$
\tilde{G}(x, \mathbf{s}) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M} c \left(1 - \mathbb{1}_{\tilde{E}_{\mathbf{z},c}}(x) \mathbb{1}_{B(\mathbf{z},r)}(\mathbf{s})\right).
$$

è boreliana in $\Omega \times \mathbb{R}^M$. Se $F := \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^M, c \in \mathbb{Q}^+} (E_{\mathbf{z},c} \, \Delta \, \tilde{E}_{\mathbf{z},c})$, abbiamo $|F| = 0$ e per la (6.2) si ha $G(x, \mathbf{s}) = \tilde{G}(x, \mathbf{s})$ per ogni $x \in \Omega \setminus F$ e ogni $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$. Abbiamo dimostrato la tesi. □

6.1.7 Esempio. Supponiamo che $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^M$ abbia le seguenti proprietà:

(a) per quasi ogni $x \in \Omega$ la "sezione" $C(x) := \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : (x, \mathbf{s}) \in C\}$ è chiusa;

(b) esiste $\tilde{C}$ boreliano di $\Omega \times \mathbb{R}^M$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha $\tilde{C}(x) = C(x)$.

Allora la funzione $\hat{G} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ definita da

$$\hat{G}(x, \mathbf{s}) := \chi_C(x, \mathbf{s}) = \chi_{C(x)}(\mathbf{s})$$

è un integrando normale (è facile verificarlo).

Si noti che $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^M$ ha le proprietà dette sopra se e solo se esiste un integrando normale $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ tale che $C = \{(x, s) : G(x, \mathbf{s}) \leq 0\}$. Infatti se C verifica le proprietà allora si può prendere come G la $\hat{G}$ scritta sopra. Viceversa se G è un integrando normale e $C = \{(x, s) : G(x, \mathbf{s}) \leq 0\}$, allora di può prendere $\tilde{C} = \{(x, s) : \tilde{G}(x, \mathbf{s}) \leq 0\}$ dove $\tilde{G}$ è boreliana e $\tilde{G}(x, \cdot) = G(x, \cdot)$ per q.o. $x \in \Omega$.

6.1.8 Esempio. Supponiamo che $a : \Omega \to [0, +\infty]$ sia misurabile e $G_0 : \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ sia semicontinua inferiormente. Allora $G(x, \mathbf{s}) := a(x)G_0(\mathbf{s})$ definisce un integrando normale. Possiamo infatti trovare $\tilde{a}$ boreliana tale che $a = \tilde{a}$ q.o. in Ω e verificare che vale la (b) della Definizione (6.1.1) con $\tilde{G} := \tilde{a}G_0$.

6.1.9 Proposizione. *Se $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to]-\infty, +\infty]$ è un integrando convesso semicontinuo inferiormente e se:*

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(G(x, \cdot))}} \neq \emptyset \qquad \textit{per quasi ogni } x \in \Omega \tag{6.3}$$

allora G è un integrando normale.

Dimostrazione. Facciamo la stessa costruzione della dimostrazione del Teorema (6.1.6). Notiamo che la continuità è stata utilizzata solo nella $(*)$ di (6.2) attraverso la proprietà:

$$G(x, \mathbf{z}) \geq c \ \forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{s}, r) \quad \Leftrightarrow \quad G(x, \mathbf{z}) \geq c \ \forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{s}, r) \cap \mathbb{Q}^M. \tag{6.4}$$

(fissati $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M$, $r > 0$, $c > 0$). Ma se $G(x, \cdot)$ è convessa s.c.i. e se $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{D}(G(x, \cdot))}} \neq \emptyset$, allora la (6.4) vale a causa dell'osservazione (3.2.24) (considerando la restrizione di $G(x, \cdot)$ su $B(\mathbf{s}, r)$. Ripetendo la dimostrazione di (6.1.6) otteniamo la tesi. $\square$

6.1.10 Controesempio. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non misurabile. Definiamo $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to]-\infty, \infty]$ ponendo

$$G(x, s) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = s \in E, \\ 1 & \text{se } x = s \notin E, \\ +\infty & \text{se } x \neq s. \end{cases}$$

Allora è facile vedere che G è un integrando convesso s.c.i. . Però G non è normale dato che prendendo $u(x) = x$ si trova $G(\cdot, u) = \mathbb{1}_E$ che non è misurabile.

6.2 Esistenza di selezioni misurabili

Ricordiamo il seguente risultato (vedi ?????). Indichiamo con $\pi_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ la proiezione $\pi_1(x, y) = x$.

6.2.1 Teorema (Measurable Projection Theorem)**.** *Sia B un boreliano di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Allora $\pi_1(B) := \{x \in \mathbb{R}^N : \quad \exists \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : (x, \mathbf{s}) \in B\}$ è (Lebesgue) misurabile in $\mathbb{R}^N$.*

Questo teorema non è per nulla ovvio. A questo proposito è noto che Lebesgue credeva di avere dimostrato che $\pi_1(B)$ è boreliano, ma la sua dimostrazione conteneva un errore (legato sembra alla non commutatività tra proiezione e intersezioni numerabili). È viceversa ben noto che la proiezione di un misurabile non è misurabile (si consideri per esempio $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \in E\}$, dove $E \in \mathbb{R}$ non è misurabile; allora B è trascurabile, dunque misurabile, ma $\pi_1(B) = E$).

6.2.2 Proposizione. *Sia* $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *e indichiamo* $\mathbf{G_u} := \big\{(x,\mathbf{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M : \mathbf{s} = \mathbf{u}(x)\big\}$ *(il grafico di* $\mathbf{u}$*). Allora* $\mathbf{u}$ *è misurabile se e solo se esiste un boreliano* $B \in \Omega \times \mathbb{R}^M$ *tale che, per quasi ogni* $x \in \Omega$ *le "sezioni"* $B(x) := \big\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : (x,\mathbf{s}) \in B\big\}$ *di* B *coincidono con le corrispondenti sezioni* $\mathbf{G_u}(x)$*.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{u}$ è misurabile è noto che esiste $\tilde{\mathbf{u}}$ boreliana con $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ q.o. : Dico che $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{u}}}$ è un boreliano. Infatti la funzione $(x,\mathbf{s}) \mapsto H(x,\mathbf{s}) := \tilde{\mathbf{u}}(x) - \mathbf{s}$ è boreliana, come si verifica facilmente e $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{u}}} = H^{-1}(\mathbf{0})$. Dunque possiamo prendere $B = \mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{u}}}$.

Viceversa (che poi è ciò che useremo) supponiamo che esista B con le proprietà dette sopra. Se $W \subset \mathbb{R}^M$ è un boreliano allora $B \cap (W \times \Omega)$ è boreliano. Per il teorema (6.2.1) $\pi_1(B \cap (W \times \Omega))$ è misurabile in Ω. Ma $\pi_1(B \cap (W \times \Omega)) = \{x \in \Omega : \mathbf{u}(x) \in W\} = u^{-1}(W)$. Ne segue che $\mathbf{u}$ è misurabile. □

6.2.3 Proposizione. *Sia* $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ *un integrando normale. Allora è misurabile la funzione* $m : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *definita da:*

$$m(x) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} G(x,\mathbf{s}).$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{G}$ boreliana tale che $\tilde{G}(x,\cdot) = G(x,\cdot)$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Sia $c \in \mathbb{R}$. Allora l'insieme $\tilde{B}^c := \Big\{(x,\mathbf{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M : \tilde{G}(x,\mathbf{s}) < c\Big\}$ è boreliano. Per (6.2.1) la sua proiezione $\pi_1\left(\tilde{B}^c\right) := \Big\{x \in \Omega : \exists \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : (x,\mathbf{s}) \in \tilde{B}^c\Big\}$ è misurabile. Ma si ha:

$$\pi_1\left(\tilde{B}^c\right) = \left\{x \in \Omega : \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} \tilde{G}(x,\mathbf{s}) < c\right\},$$

e quindi $\tilde{m}(x) := \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} \tilde{G}(x,\mathbf{s})$ è misurabile. Dato che $m = \tilde{m}$ q.o., la m è misurabile. □

6.2.4 Proposizione. *Sia* $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ *un integrando normale. Se* $x \in \Omega$ *consideriamo la coniugata* $G^*(x,\cdot)$ *di* $G(x,\cdot)$*. Allora* $G^* : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ *un integrando normale.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $G_n(x,\mathbf{s}) := G(x,\mathbf{s}) + \chi_{\bar{B}_n}(\mathbf{s})$, dove B_n è la palla di raggio n, cioè $\big\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : \|\mathbf{s}\| < n\big\}$. Chiaramente, se $x \in \Omega$, si ha $G(x,\cdot) = \inf_{n \in \mathbb{N}} G_n(x,\cdot)$ da cui $G^*(x,\cdot) = \sup G_n^*(x,\cdot)$. Per la (3) della proposizione (6.1.3) basta dimostrare che G_n^* è un integrando normale. Ma per la proposizione (4.1.14), per ogni x in Ω, la $G_n^*(x,\cdot)$ è continua (dato che $G(x,\cdot)$ verifica ovviamente (4.4) e siamo in $\mathbb{R}^M$). Inoltre, fissato $\mathbf{s}^* \in \mathbb{R}^M$, si ha che $-G^*(\cdot,\mathbf{s}^*) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} G(\cdot,\mathbf{s}) - \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^*$ è misurabile per la proposizione (6.2.3). Dunque G_n^* è di Caratheodory e possiamo concludere la dimostrazione. □

6.2.5 Corollario. *Sia* $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ *un integrando normale. Allora la funzione* $\hat{G} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ *definita da:*

$$\hat{G}(x,\mathbf{s}) = \begin{cases} 0 & \textit{se } G(x,\mathbf{s}) = \inf_{\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^M} G(x,\mathbf{s}'), \\ +\infty & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

è un integrando normale. La $\hat{G}(x,\cdot)$ *è l'indicatrice dell'insieme* $C(x) \in K$ *dei punti di minimo di* $\mathbf{s} \mapsto G(x,\cdot)$ *(che può essere vuoto ed è chiuso perché* $G(x,\cdot)$ *è s.c.i.).*

Dimostrazione. Sia $m(x) := \inf_{\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^M} G(x, \mathbf{s}')$. Allora m è misurabile per (6.2.3). Ne segue che $G_1 := G - m$ è un integrando normale. Da quanto detto alla fine di (6.1.7) si ha che $C := (x, \mathbf{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M : G_1(x, \mathbf{s}) \leq 0$ verifica (a) e (b) di (6.1.7). È facile vedere che $\hat{G} = \chi_C$, e quindi, sempre per (6.1.7), $\hat{G}$ è un integrando normale. □

6.2.6 Definizione. Sia $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^M$ fissato. Per ogni insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^M$ definiamo

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C) := \left\{ \mathbf{s} \in C : \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| = \inf_{\mathbf{s}' \in C} \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0\| \right\} \qquad (\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(\emptyset) = \emptyset).$$

$\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C)$ è l'insieme dei punti di C di minima distanza da $\mathbf{s}_0$, che è non vuoto se $C \neq \emptyset$.

6.2.7 Proposizione. *Sia $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^M$ verificante* (a) *e* (b) *di* (6.1.7). *Allora la funzione $\hat{G} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ definita da $\hat{G}(x, \mathbf{s}) := \chi_{\left\{\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C(x))\right\}}(\mathbf{s})$ è un integrando normale (conveniamo di definire, ad esempio, $G(x, \cdot) = +\infty$ per le x in cui $C(x)$ non è chiuso). Si ha $\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0} : \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{\mathrm{M}}) \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{\mathrm{M}})$, dove $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ sono i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^M$.*

Dimostrazione. Consideriamo $G(x, \mathbf{s}) := \chi_C(x, \mathbf{s}) + \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|$. Allora G è un integrando normale. Per il corollario (6.2.5) l'indicatrice dei punti di minimo di $G(x, \cdot)$ è un integrando normale. Ma tale indicatrice è proprio la $\hat{G}$.

□

6.2.8 Lemma. *Siano $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_M \in \mathbb{R}^M$ affinemente indipendenti (cioè $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0$ sono linearmente indipendenti). Siano $r_0, r_1, \ldots, r_M \in [0, +\infty[$ e indichiamo con S_i la sfera $\left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_i\| = r_i\right\}$. Se $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq N$ l'intersezione $\bigcap_{i=0}^{k} S_i$ è contenuta in un sottospazio affine di $\mathbb{R}^M$ di dimensione $M - k$. In particolare l'intersezione di tutte le S_i è, al più, un punto.*

Dimostrazione. Si fa per induzione. □

6.2.9 Osservazione. Se $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_M \in \mathbb{R}^M$ sono affinemente indipendenti allora per qualunque insieme chiuso $C \neq \emptyset$ si ha che $\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_M} \circ \cdots \circ \mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C)$ consiste di un solo punto. Basta applicare il lemma (6.2.8).

6.2.10 Teorema (selezione misurabile di minimi)**.** *Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ un integrando normale e supponiamo che per quasi ogni x di Ω si abbia:*

$$C(x) := \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M : G(x, \mathbf{s}) = \inf_{\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^M} G(x, \mathbf{s}') \right\} \neq \emptyset$$

Allora esiste una funzione misurabile $\bar{\mathbf{u}} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tale che, per quasi ogni x si ha $G(x, \bar{\mathbf{u}}(x)) = \inf_{\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^M} G(x, \mathbf{s}')$.

Dimostrazione. Sia $\bar{G}(x, \mathbf{s}) = \chi_{C(x)}(\mathbf{s})$. Dalla proposizione (6.2.5) risulta che $\bar{G}$ è un integrando normale. Per ipotesi $C(x) \neq \emptyset$ per q.o. x. Fissiamo $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_M \in \mathbb{R}^M$ affinemente indipendenti. Iterando la proposizione (6.2.7) otteniamo che la funzione $\hat{G} : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ definita da

$$\hat{G}(x, \mathbf{s}) := \chi_{\mathrm{proj}_{\mathbf{s}_M} \circ \cdots \circ \mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C(x))}(s)$$

è un integrando normale, dunque esiste $\tilde{C}_1$ boreliano con $\tilde{C}_1(x) = \mathrm{proj}_{\mathbf{s}_M} \circ \cdots \circ \mathrm{proj}_{\mathbf{s}_0}(C(x))$ per q.o. $x \in \Omega$. Per l'osservazione precedente si ha che, per q.o. x il chiuso $\tilde{C}_1(x)$ contiene solo punto. Si deduce allora dalla proposizione (6.2.2) che $\tilde{C}_1$ è grafico di una funzione misurabile $\bar{\mathbf{u}}$ ed è evidente che $\bar{u}$ ha la proprietà cercata. □

6.2.11 Corollario. *Sia $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^M$, $C \neq \emptyset$ e verificante* (a) *e* (b) *di* (6.1.7). *Allora esiste una funzione misurabile $\bar{\mathbf{u}} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ tale che $\bar{\mathbf{u}}(x) \in C(x)$ (cioè $(x, \bar{\mathbf{u}}(x)) \in C$) per q.o. x.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente a $\hat{G} = \chi_C$. □

6.2.12 Proposizione. *Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ un integrando normale convesso e sia $m : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che*

$$m(x) > \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} G(x, \mathbf{s}) \qquad \textit{per q.o.} \ \in \Omega.$$

Allora esiste una funzione misurabile $\bar{\mathbf{u}} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$G(x, \bar{\mathbf{u}}(x)) \leq m(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Dato che m è misurabile e G è un integrando normale l'insieme

$$C := \left\{(x, \mathbf{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M : G(x, \mathbf{s}) \leq m(x)\right\}$$

verifica (a) e (b) di (6.1.7). Inoltre per la proprietà di m le sezioni $C(x)$ sono non vuote per q.o. $x \in \Omega$. Applicando il corollario (6.2.11) si ha la tesi. □

6.3 Funzionali definiti mediante integrali

In questo paragrafo Ω è un aperto LIMITATO di $\mathbb{R}^N$ (rinunciamo a prendere Ω più generale, come peraltro sarebbe possibile, almeno fino a quando non entrano in gioco le derivate).

6.3.1 Osservazione. Diremo che una funzione $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ è *inferiormente (superiormente) integrabile* se f è misurabile ed esiste $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ tale che $f \geq g$ ($f \leq g$). In modo equivalente f è inferiormente (superiormente) integrabile se $f^- \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ ($f^+ \in \mathrm{L}^1(\Omega)$).

Se f è inferiormente (superiormente) integrabile è ben definito l'integrale $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ eventualmente eguale a $+\infty$ ($-\infty$). Se questo integrale è finito, allora $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

6.3.2 Definizione. Sia $\mathbb{L}$ uno S.V.T.L.C. tale che gli elementi di $\mathbb{L}$ sono funzioni misurabili (definite quasi ovuque) da Ω a valori in $\mathbb{R}^M$ (e $(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2)(x) = c_1\mathbf{u}_1(x) + c_2\mathbf{u}_2(x)$ per q.o. $x \in \Omega$, se $c_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{L}$, $i = 1, 2$).

Indichiamo al solito con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{L}^*$. Sia G un integrando normale convesso. Poniamo:

$$\tilde{\mathcal{D}}_G := \left\{u \in \mathbb{L} : G(\cdot, u) \wedge 0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\} = \left\{u \in \mathbb{L} : \exists w \in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ con } G(\cdot, u) \leq w\right\}.$$

Consideriamo quindi $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G : \mathbb{L} \to [-\infty, +\infty]$ definito da:

$$\mathcal{G}_G(u) := \begin{cases} \int_\Omega G(x, \mathbf{u}(x))\,dx & \text{se } u \in \tilde{\mathcal{D}}_G, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.5}$$

È chiaro che se $u \in \tilde{\mathcal{D}}_G$ la $\mathcal{G}(u)$ può assumere valore $-\infty$. Inoltre:

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \left\{\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L} : G(\cdot, \mathbf{u}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\} = \left\{\mathbf{u}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_G : \mathcal{G}(u) > -\infty\right\}.$$

Inoltre $\tilde{\mathcal{D}}_G = \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{G})$ come definito nella (b) di (3.1.4) e si vede facilmente che $\tilde{\mathcal{D}}_G$ è convesso e che vale la (3.1) per ogni $u_1, u_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_G$ e $\lambda \in]0, 1[$ (con u_i al posto di x_i). Dunque $\mathcal{G}$ è convesso per la (b) di (3.1.4).

Notiamo che se $G(\cdot,\mathbf{u}) \vee 0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ ($G(\cdot,\mathbf{u})$ integrabile superiormente) o $G(\cdot,\mathbf{u}) \wedge 0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ ($G(\cdot,\mathbf{u})$ integrabile inferiormente), allora si può scrivere $\mathcal{G}_G(\mathbf{u}_2) = \int_\Omega G(x,\mathbf{u}(x))\,dx$.

Ricordiamo che $G'(\mathbf{s})(\mathbf{h})$ denota la derivata di Gateaux (destra) lungo $\mathbf{h}$ (vedi la definizione (3.3.19)).

6.3.3 Osservazione. Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty,+\infty]$ un integrando normale convesso. Sia $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^M$ misurabile e tale che $G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Allora:

$$G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \text{ è superiormente integrabile per ogni } v : \Omega \to \mathbb{R}^M \text{ con } G(\cdot,\mathbf{v}) \in \mathrm{L}^1(\Omega). \tag{6.6}$$

In effetti basta osservare che, per la convessità:

$$G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \le G(\cdot,\mathbf{v}) - G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega).$$

6.3.4 Lemma. *e $\mathbb{L}$ e $\mathcal{G}$ sono definiti come sopra e se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, allora:*

$$\mathcal{G}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \int_\Omega G'(x,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \qquad (\in [-\infty,+\infty[) \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}_t := \mathbf{u}+t(\mathbf{v}-\mathbf{u})$. Per la convessità di $G(x,\mathbf{v}_t(x))$, se $0 < t_1 \le t_2 \le 1$:

$$\begin{aligned} G(x,\mathbf{v}(x)) - G(x,\mathbf{u}(x)) \ge \frac{G(x,\mathbf{v}_{t_2}(x)) - G(x,\mathbf{u}(x))}{t_2} \ge \\ \frac{G(x,\mathbf{v}_{t_1}(x)) - G(x,\mathbf{u}(x))}{t_1} \ge \inf_{t>0} \frac{G(x,\mathbf{v}_t(x)) - G(x,\mathbf{u}(x))}{t} = \\ G'(x,\mathbf{u}(x))(\mathbf{v}(x)-\mathbf{u}(x)). \end{aligned}$$

Dato che $G(\cdot,\mathbf{v}) - G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ possiamo usare Beppo-Levi e dedurre:

$$\mathcal{G}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \int_\Omega G'(x,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \in [-\infty,+\infty[.$$

□

6.3.5 Proposizione. *Siano $\mathbb{L}$ e $\mathcal{G}$ definiti come sopra. Siano $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ $\mathbf{u}^* \in \mathbb{L}^*$. Allora sono equivalenti:*

(a) $\mathbf{u}^* \in \partial\mathcal{G}(\mathbf{u})$;

(b) *per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ (cioè $\mathbf{v}$ misurabile e tale che $G(\cdot,\mathbf{v}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ si ha:*

$$\begin{aligned} & G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ & \int_\Omega G'(x,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \ge \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v}-\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L},\mathbb{L}^*} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue dalla proposizione (3.3.20) e dal lemma (6.3.4). La prima riga è conseguenza della seconda e della (6.6). □

Consideriamo ora due sottospazi vettoriali $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ di funzioni misurabili su Ω tali che:

($L.1$) $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^M) \subset \mathbb{L}_i \subset \mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$ per $i = 1,2$.

($L.2$) Se $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$, allora $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

($L.3$) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{L}_i$ e $E \subset \Omega$ è misurabile allora $\mathbb{1}_E\mathbf{u} \in \mathbb{L}_i$, $i = 1,2$.

La (L.2) permette di definire la forma bilineare su $\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2$:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mapsto \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle := \int_\Omega \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dx.$$

Se $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1$ è tale che

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \int_\Omega \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dx = 0 \qquad \forall \mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$$

allora, prendendo le $\mathbf{u}_2 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ si ricava $\mathbf{u}_1 = 0$. Analogamente si prova che se $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$ è tale che $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$, deve essere $\mathbf{u}_2 = 0$. Dunque $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ sono in dualità tramite $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideriamo in $\mathbb{L}_1$ la topologia $\sigma(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$. Come già visto $\mathbb{L}_1$ e uno S.V.T.L.C. e $\mathbb{L}_2$ è (isomorfo a) $\mathbb{L}_1^*$. Su $\mathbb{L}_2$ consideriamo $\sigma(\mathbb{L}_2, \mathbb{L}_1)$.

Se $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ è un integrando normale considereremo $\mathcal{G} : \mathbb{L}_1 \to [-\infty, +\infty]$ definito come dalla (6.3.2). In realtà G sarà sempre un integrando convesso.

6.3.6 Teorema. *Supponiamo che G sia un integrando normale convesso e che $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, cioè che esista $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{L}_1$, con $G(\cdot, \mathbf{u}_0) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Allora*

$$\mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ allora $G(x, \mathbf{u}_0(x)) \in \mathbb{R}$ per q.o. $x \in \Omega$ e quindi $G^*(x, \cdot) > -\infty$ per q. o. $x \in \Omega$ (cfr. la (b) di (4.1.8)). SERVE???

Fissiamo $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$. Per la definizione di $G^*(x, \cdot)$ si ha:

$$G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) \geq \mathbf{u}_1(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) - G(x, \mathbf{u}_1(x)) \qquad \text{per ogni funzione } \mathbf{u}_1 : \Omega \to \mathbb{R}^M.$$

Se prendiamo $\mathbf{u}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ possiamo integrare su Ω e ottenere:

$$\mathcal{G}_{G^*}(\mathbf{u}_2) = \int_\Omega G^*(x, \mathbf{u}_2) \, dx \geq \int_\Omega (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - G(x, \mathbf{u}_1)) \, dx \ (\in] - \infty, +\infty]) \qquad \forall \mathbf{u}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{G}),$$

(il primo "=" perché $G^*(\cdot, \mathbf{u}_2)$ è inferiormente integrabile) Ne segue:

$$\mathcal{G}_{G^*}(\mathbf{u}_2) = \int_\Omega G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) \, dx \geq \mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}_2) > -\infty.$$

Dimostriamo la disuguaglianza opposta. Fissiamo $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\int_\Omega G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) \, dx > -\gamma$ e sia m integrabile tale che:

$$-\infty < m(x) < G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \qquad \int_\Omega m(x) \, dx > -\gamma.$$

Essendo $-G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) = \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^M} G(x, \mathbf{s}) - \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}_2(x)$, per (6.2.12) esiste $\bar{\mathbf{u}}$ misurabile tale che

$$G(x, \bar{\mathbf{u}}(x)) - \bar{\mathbf{u}}(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) \leq -m(x)$$

Poniamo $E_n := \{x \in \Omega : \|\bar{\mathbf{u}}(x)\| \leq n\}$: gli E_n sono misurabili e $|\Omega \setminus E_N| \to 0$ per $n \to \infty$ (dato che $\bar{u}(x) \in \mathbb{R}^M$ per q.o. x). Poniamo $\mathbf{u}_{1,n} = \mathbb{1}_{E_n} \bar{\mathbf{u}} + \mathbb{1}_{\Omega \setminus E_n} \mathbf{u}_0$. Si ha: $\mathbf{u}_{1,n} \in \mathbb{L}_1$ per (L.3) (nota che $\chi_{E_n} \bar{\mathbf{u}} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M) \subset \mathbb{L}_1$). Allora:

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \mathbf{u}_{1,n}(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) \, dx - \int_\Omega G(x, \mathbf{u}_{1,n}) \, dx = \int_{E_n} (\bar{\mathbf{u}}(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) - G(x, \bar{\mathbf{u}})) \, dx + \\
\int_{\Omega \setminus E_n} \mathbf{u}_0(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) \, dx - \int_{\Omega \setminus E_n} G(x, \mathbf{u}_0) \, dx \geq \int_{E_n} m(x) \, dx + \\
\int_{\Omega \setminus E_n} \mathbf{u}_0(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) \, dx - \int_{\Omega \setminus E_n} G(x, \mathbf{u}_0) \, dx \to \int_\Omega m(x) \, dx > -\gamma \Rightarrow \mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}_2) \geq -\gamma.
\end{gathered}$$

Per l'arbitrarità di γ se ne deduce $\mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}_2) \geq \int_\Omega G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) \, dx$. $\square$

6.3.7 Corollario. *Sia G sia un integrando normale convesso. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(a) *Esistono $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1$ con $G(\cdot, \mathbf{u}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$ con $G^*(\cdot, \mathbf{u}_2) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.*

(b) *$\mathcal{G}_G$ è proprio e s.c.i. su $\mathbb{L}_1$.*

Dimostrazione. (a)$\Rightarrow$(b) Dato che $G(\cdot, \mathbf{u}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ si ha $\mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) < +\infty$. Dato che $G^*(\cdot, \mathbf{u}_2) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ si ha:

$$G(\cdot, \mathbf{u}_1) \geq \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - G^*(\cdot, \mathbf{u}_2) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \qquad \forall \mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1.$$

e dunque $\mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) > -\infty$ per ogni $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1$. Dunque $\mathcal{G}_G$ è propria. Per le stesse ipotesi, applicando due volte il teorema (6.3.6) si ricava che $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$. Dato che $\mathcal{G}^{**}$ è sempre s.c.i. se ne deduce (b).

(b)$\Rightarrow$(a) Se $\mathcal{G}_G$ è propria esiste $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{L}_1$ con $G(\cdot, \mathbf{u}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Se $\mathcal{G}_G$ è anche s.c.i. allora dato $c \in \mathbb{R}$ con $-c < \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1)$ esiste $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$ con

$$\mathcal{G}_G(\mathbf{u}) \geq -c + \langle \mathbf{u}' - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \qquad \forall \mathbf{u}' \in \mathbb{L}_1$$

(vedi la (3.2.10)). Allora

$$c + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \geq \mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}_2) \geq \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle - \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) > -\infty$$

e quindi $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_G^*)$. Per (6.3.6) $\mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$ e dunque $G^*(\cdot, \mathbf{u}_2) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. □

6.3.8 Proposizione. *Sia G un integrando normale convesso. Se $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_G)$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}_2$ si ha:*

$$\mathbf{u}_2 \in \partial \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) \Leftrightarrow \mathbf{u}_2(x) \in \partial G_G(x, \mathbf{u}_1(x)) \quad \textit{per quasi ogni } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Dimostro $\Leftarrow$. Se $\mathbf{u}_2(x) \in \partial G(x, \mathbf{u}_1(x))$ si ha

$$G(x, \mathbf{s}) \geq G(x, \mathbf{u}_1(x)) + \mathbf{u}_2(x) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{u}_1(x)) \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M.$$

Ne segue

$$G(\cdot, \mathbf{u}) \geq G(\cdot, \mathbf{u}_1) + \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \quad \text{q.o.} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}_1$$

e integrando

$$\mathcal{G}_G(\mathbf{u}) \geq \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}_1 \Leftrightarrow \mathbf{u}_2 \in \partial \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1).$$

Dimostro $\Rightarrow$. Se $\mathbf{u}_2 \in \partial \mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1)$ deve essere

$$\mathcal{G}_G(\mathbf{u}_1) + \mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}_2) = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle .$$

Usando l'espressione di $\mathcal{G}_G^*$ che abbiamo dimostrato, questo equivale a:

$$\int_\Omega (G(x, \mathbf{u}_1) + G^*(x, \mathbf{u}_2) - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \, dx = 0.$$

Ma l'integrando è positivo dunque ne deduco:

$$G(x, \mathbf{u}_1(x)) + G^*(x, \mathbf{u}_2(x)) - \mathbf{u}_1(x) \cdot \mathbf{u}_2(x) = 0 \ \text{ per quasi ogni } x$$

e questo significa $\mathbf{u}_2 \in \partial G(\cdot, \mathbf{u}_1)$ quasi ovunque. □

Concludiamo il paragrafo esaminando alcune condizioni su G utili per considerare $\mathcal{G}$ su $\mathbb{L}_1 = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $\mathbb{L}_2 = \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$; ricordiamo che, se $p \geq 1$ allora $p' := (1-1/p)^{-1}$ indica il coniugato di p.

6.3.9 Osservazione. Se $p \in]1,+\infty[$, $\mathbb{L}_1 = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e $\mathbb{L}_2 = \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ Il corollario (6.3.7) vale ancora considerando sugli $\mathbb{L}_i$ la topologia forte. Infatti, essendo $\mathcal{G}_G$ convessa, semicontinuità forte e debole coincidono.

6.3.10 Ipotesi. *Siano $q \in [1,+\infty[$, $s \in [1,+\infty]$. Consideriamo le seguenti ipotesi su G.*

$$G(x,\mathbf{s}) \geq -a_0(x) - a_1(x)|\mathbf{s}|^q \qquad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M,\ \textit{per q.o. } x \in \Omega \qquad (G^-.q.s)$$
$$\textit{per opportune } a_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega),\ a_1 \in \mathrm{L}^s(\Omega).$$
$$G(x,\mathbf{s}) \leq b_0 + b_1(x)|\mathbf{s}|^q \qquad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M,\ \textit{per q.o. } x \in \Omega \qquad (G^+.q,s)$$
$$\textit{per opportune } b_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega),\ b_1 \in \mathrm{L}^s(\Omega);$$
$$|G(x,\mathbf{s}_1) - G(x,\mathbf{s}_2)| \leq a(x)(|\mathbf{s}_1|^{p-1} + |\mathbf{s}_2|^{q-1})|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2| \quad \forall \mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\ \textit{q.o. } x \qquad (\Delta G.q.s)$$
$$\textit{per un'opportuna } a \in \mathrm{L}^s(\Omega).$$

6.3.11 Proposizione. *Se vale $(G^-.q.s)$ allora $\mathcal{G}_G$ è s.c.i. in $\mathbb{L}_1 = \mathrm{L}^{qs'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ il $\mathrm{L}^{qs'}(\Omega)$. Allora esiste un'estratta $(\mathbf{u}_{n_k})$ tale che $\mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u}$ quasi ovunque. Inoltre

$$G(x,\mathbf{u}_{n_k}(x)) \geq -a_0(x) - a_1(x)|\mathbf{u}_{n_k}(x)|^q =: g_k(x)$$

Notiamo che, essendo $\frac{1}{s} + \frac{1}{qs'} + \frac{1}{q's'} = 1$ e $q-1 = \frac{q}{q'}$, si ha:

$$\begin{aligned}\|a_1|\mathbf{u}_{n_k}|^q - a_1|\mathbf{u}|^q\|_1 &\leq q\|a_1\,|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}|\,(|\mathbf{u}_{n_k}|^{q-1} + |\mathbf{u}|^{q-1})\|_1 \leq \\ &q\|a_1\|_s\|\|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}\|_{qs'}\||\mathbf{u}_{n_k}|^{q/q'} + |\mathbf{u}|^{q/q'}\|_{q's'} \leq \\ &q\|a_1\|_s\|\|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}\|_{qs'}(\|\mathbf{u}_{n_k}\|_{qs'}^{q/q'} + \|\mathbf{u}\|_{qs'}^{q/q'}) \to 0.\end{aligned}$$

dunque $g_k \to g$ in $\mathrm{L}^1(\Omega)$, dove $g(x) = -a_0(x) - a_1(x)|\mathbf{u}(x)|^q$. Possiamo allora applicare il Lemma di Fatou:

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega G(x,\mathbf{u}_{n_k})\,dx \geq \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} G(x,\mathbf{u}_{n_k})\,dx \geq \int_\Omega G(x,\mathbf{u})\,dx.$$

$\square$

Dimostrazione alternativa. Con calcoli analoghi a quelli fatti sopra si trova:

$$\mathcal{G}_G(\mathbf{u}) \geq -\|a_0\|_1 - |\Omega|^{q\left(1-\frac{qs'}{p}\right)}\|a_1\|_s\|\mathbf{u}\|_p^q =: g(\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

in particolare $\mathcal{G}(\mathbf{u}) > -\infty$ per ogni $\mathbf{u}$. Se $\mathcal{G} \equiv +\infty$, la tesi vale, supponiamo dunque che esista $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^{qs'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Ragionando come nella dimostrazione di (4.1.13) (si separa il sopragrafico di $\mathcal{G}$ e il sottografico di g con un piano) si ha che esiste $\mathbf{u}^* \in \mathrm{L}^{(qs')'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $\mathcal{G}_G^*(\mathbf{u}^*) \in \mathbb{R}$, quindi $G^*(\cdot,\mathbf{u}^*) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Per la (6.3.7), si ha che $\mathcal{G}_G$ è s.c.i. in $\mathrm{L}^{qs'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$. $\square$

6.3.12 Osservazione. Essendo Ω limitato si deduce dalla precedente che, se vale $(G^-.q.s)$ e se $p \geq qs'$, allora $\mathcal{G}_G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to]-\infty,\infty]$ ed è s.c.i. in $\mathbb{L}_1 = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

6.3.13 Proposizione. *Supponiamo che $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to]-\infty,\infty]$ (mai $-\infty$) sia un integrando convesso verificante $(G^+.q.s)$. Allora G è di Caratheodory, $\mathcal{G}(\mathbf{u}) < +\infty$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^{qs'}(\Omega)$ e $\mathcal{G}$ è s.c.s. in $\mathrm{L}^{qs'}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi si ottiene che per q.o. x in Ω si ha $\mathcal{D}(G(x,\cdot)) = \mathbb{R}$ e quindi (per la convessità) $G(x,\cdot)$ è continua. Dato che G è un integrando la misurabilità in x è verificata. Ragionando come nella dimostrazione della semicontinuità inferiore (usando il Lemma di Fatou nell'altro verso) si dimostra facilmente la seconda parte della tesi. □

6.3.14 Osservazione. Se valgono $(G^-.q_1.s_1)$ e $(G^+.q_2.s_2)$ e se $p \geq \max(q_1 s_1', q_2 s_2')$, allora $\mathcal{G}$ è continua su $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Per vederlo basta mettere insieme le due proposizioni precedenti.

6.3.15 Osservazione. Se vale $(\Delta G.p.s)$ ed esiste $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^{ps'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $G(\cdot,\mathbf{u}_0) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ allora vale $(G^+.p.s)$ sia per G che per $-G$. Infatti da $(\mathrm{g}.{+\infty}.p.s)$ segue:

$$\begin{aligned}
\pm\, G(x,\mathbf{s}) \leq |G(x,\mathbf{u}_0(x))| + a(x)(|\mathbf{s}|^{p-1} + |\mathbf{u}_0(x)|^{p-1})(|\mathbf{s}| + \|\mathbf{u}_0(x)\|) = \\
|G(x,\mathbf{u}_0(x))| + a(x)(|\mathbf{s}|^p + |\mathbf{s}||\mathbf{u}_0|^{p-1} + |\mathbf{s}|^{p-1}|\mathbf{u}_0| + |\mathbf{u}_0(x)|^p) \leq \\
|G(x,\mathbf{u}_0(x))| + 2a(x)(|\mathbf{s}|^p + |\mathbf{u}_0(x)|^p) = b_0(x) + b_1(x)|\mathbf{s}|^p
\end{aligned}$$

dove $b_0 = |G(\cdot,\mathbf{u}_0)| + 2a|\mathbf{u}_0|^p$ e $b_1 = 2a$ (nota che $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^{ps'}(\Omega;\mathbb{R}^M) \;\Rightarrow\; a|\mathbf{u}_0|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega)$).

Inoltre, se vale $(\Delta G.p.s)$, allora

$$|G'(x,\mathbf{s})(\mathbf{v})| \leq a(x)|\mathbf{s}|^{p-1}|\mathbf{v}| \quad \forall \mathbf{s},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M \qquad (a \in \mathrm{L}^s(\Omega)). \qquad (g,p.s)$$

6.3.16 Proposizione. *Supponiamo che valga $(\Delta G.p.s)$ e sia $q \geq ps'$. Supponiamo inoltre che esista $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $G(\cdot,\mathbf{u}_0) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Allora $\mathcal{G}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ per ogni $\mathbf{u}$ in $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$ ed esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$|\mathcal{G}_G(\mathbf{v}) - \mathcal{G}_G(\mathbf{u})| \leq M\|a\|_s(\|\mathbf{v}\|_q^{p-1} + \|\mathbf{u}\|_q^{p-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_q \qquad \forall \mathbf{v},\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

Inoltre:

$$\|G'(\cdot,\mathbf{u})\mathbf{v}\|_1 \leq 2M\|a\|_s\|\mathbf{u}\|_q^{p-1}\|\mathbf{v}\|_q \qquad \forall \mathbf{v},\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

Dimostrazione. Il fatto che $\mathcal{G}_G$ sia finito su $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{R}^M)$ segue dalle due osservazioni precedenti. Usando Hölder:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}_G(\mathbf{v}) - \mathcal{G}_G(\mathbf{u})| \leq (\|\,|a|\,|\mathbf{v}|^{p-1}\,\|_{q'} + \|\,|a|\,|\mathbf{u}|^{p-1}\,\|_{q'})\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_q = \\
(\|\,|a|^{q'}\,|\mathbf{v}|^{q'(p-1)}\|_1^{\frac{1}{q'}} + \|\,|a|^{q'}\,|\mathbf{u}|^{q'(p-1)}\|_1^{\frac{1}{q'}})\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_q \leq \\
(\||a|^{q'}\|_{s/q'}^{\frac{1}{q'}}\|\,|\mathbf{v}|^{q'(p-1)}\|_{(s/q')'}^{\frac{1}{q'}} + \||a|^{q'}\|_{s/q'}^{\frac{1}{q'}}\|\,|\mathbf{u}|^{q'(p-1)}\|_{(s/q')'}^{\frac{1}{q'}})\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_q = \\
(\|a\|_s\|\mathbf{v}\|^{p-1}_{\frac{s'q(p-1)}{q-s'}} + \|a\|_s\|\mathbf{u}\|^{p-1}_{\frac{s'q(p-1)}{q-s'}})\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|_q \leq \|a\|_s|\Omega|^{\frac{q-ps'}{q-s'}}(\|\mathbf{v}\|_q^{p-1} + \|\mathbf{u}\|_q^{p-1})\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_q.
\end{aligned}$$

□

6.4 Problemi semilineari liberi

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ un integrando normale convesso e sia $p \in]1, 2^*]$. Indichiamo con $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G : \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M) \to [-\infty,+\infty]$ il funzionale costruito come nel precedente paragrafo con $\mathbb{L}_1 = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e $\mathbb{L}_2 = \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

In quanto segue supponiamo $N \geq 3$. In questo modo l'esponente di Sobolev $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ $\left(\text{cioè } \dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N}\right)$ è finito: si possono in realtà considerare anche i casi $N = 1$ e $N = 2$ con opportune modifiche di cui evitiamo di parlare. Ricordiamo che il coniugato di 2^* è $2^{*\prime} = \dfrac{2N}{N+2}$ $\left(\text{cioè } \dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{N}\right)$. Ricordiamo che in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ possiamo considerare il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^1_0} := \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum_{i=1}^M \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx.$$

Possiamo anche identificare $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$ con il suo duale usando il prodotto scalare scritto sopra come dualità.

Come noto $\|\mathbf{v}\|_p \le S_p \|\mathbf{v}\|_{H^1_0}$ $\forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$ se $p \le 2^*$, per una opportuna $S_p > 0$.

6.4.1 Definizione. Definiamo (l'energia) $\mathcal{E} : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to]-\infty, \infty]$ ponendo:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx & \text{se } \mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M), \\ +\infty & \text{se } \mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \setminus \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M). \end{cases}$$

Definiamo inoltre $I = I_G : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to [-\infty, +\infty]$ ponendo:

$$I_G(\mathbf{u}) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + \int_\Omega G(x, \mathbf{u}) \, dx & \text{se } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M) \text{ e } G(\cdot, \mathbf{u})^+ \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che su G metteremo sempre delle ipotesi del tipo della $(G^-(q.s))$ si avrà $I_G = \mathcal{E} + \mathcal{G}_G : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to]-\infty, \infty]$.

6.4.2 Osservazione. I è convesso e $\mathcal{D}(I) = \{u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M) : G(\cdot, \mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\}$.

6.4.3 Osservazione. $\mathcal{E} : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M) \to]-\infty, \infty]$ è s.c.i. .

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{E}$ ha sottolivelli chiusi. Se $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ e se $\mathcal{E}(\mathbf{u}_n) \le c$, allora $(\mathbf{u}_n)$ è limitata in $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$. A meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \bar{\mathbf{u}}$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Dato che $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$ si immerge con continuità in $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ se ne deduce $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \bar{\mathbf{u}}$ in $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ e quindi $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, cioè $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Ma allora

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}_n) = \mathcal{E}(\mathbf{u}) + \langle \mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{H^1_0} + \mathcal{E}(\mathbf{u}_n) \ge \mathcal{E}(\mathbf{u}) + \langle \mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{H^1_0} \to \mathcal{E}(\mathbf{u}).$$

□

6.4.4 Osservazione. Se vale $(G^-.q.s)$ con $qs' \le p$, allora I è s.c.i. . Infatti $\mathcal{E}$ è s.c.i. per l'osservazione (6.4.3) e $\mathcal{G}$ è s.c.i. a causa della proposizione (6.3.11).

6.4.5 Proposizione. *Siano* $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$ *e* $\mathbf{u}^* \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^M)$. *Allora*

$$\mathbf{u}^* \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^*. \tag{6.8}$$

Nella (6.8) $-\Delta \mathbf{u}$ *va inteso nel senso delle distribuzioni e quindi l'eguaglianza* $-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ *comporta una "maggiore regolarità" di* $\mathbf{u}$ *(rispetto a* $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$*).*

Dimostrazione. È facile verificare che $\mathcal{E}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Usando la proposizione (3.3.20), si trova che $\mathbf{u}^* \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{u})$ se e solo se:

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx \ge \int_\Omega \mathbf{u}^* (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx \ge \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Per linearità questo equivale a:

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \mathbf{u}^* \mathbf{v} \, dx \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

che è esattamente il significato di $-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$. □

6.4.6 Proposizione. *Sia $u \in \mathcal{D}(I)$. Dato $\mathbf{u}^* \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R}^M)$ si ha $\mathbf{u}^* \in \partial I(\mathbf{u})$ se e solo se:*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(I) \quad \begin{cases} G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx + \int_\Omega G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \geq \int_\Omega \mathbf{u}^*(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \end{cases}. \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Per quanto visto nel lemma (6.3.4) e nella dimostrazione di (6.4.5) si ha che il termine a sinistra nella (6.9) è $I'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})$. La (6.9) segue dunque dalla proprietà generale stabilita nella proposizione (3.3.20). □

6.4.7 Osservazione. La (6.9) è equivalente alla seguente proprietà.

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx + \int_\Omega G(x,\mathbf{v})\,dx - \int_\Omega G(x,\mathbf{u})\,dx \geq \int_\Omega \mathbf{u}^*(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \quad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{D}(I) \tag{6.10}$$

Dimostrazione. Dato che $G(\cdot,\mathbf{v}) - G(\cdot,\mathbf{u}) \geq G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ è chiaro che (6.9) $\Rightarrow$ (6.10). Viceversa, dato che $\mathcal{E}(\mathbf{v}) - \mathcal{E}(\mathbf{u}) \geq \mathcal{E}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx$, è chiaro che da (6.10) si deduce $\mathbf{u}^* \in \partial I(\mathbf{u})$ e quindi la (6.9), per la proposizione (6.4.6). □

6.4.8 Proposizione. *Supponiamo che valgano le condizioni di crescita (G^-, q_1, s_1) e (G^+, q_2, s_2) con $\max(p_1 s_1', p_2 s_2') \leq p$. Allora se $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\mathbf{u}^* \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ si ha:*

$$\mathbf{u}^* \in \partial I(\mathbf{u}) \Leftrightarrow -\Delta\mathbf{u} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M),\ \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u} \in \partial G(\cdot,\mathbf{u}) \ \textit{q.o. in } \Omega. \tag{6.11}$$

Dimostrazione. Abbiamo visto (vedi l'osservazione (6.3.14)) che in queste ipotesi $\mathcal{G}$ è continua. Allora per il Teorema (3.3.10) si ha $\partial I(\mathbf{u}) = \partial\mathcal{E}(\mathbf{u}) + \partial\mathcal{G}(\mathbf{u})$, cioè $\mathbf{u}^* \in \partial I(\mathbf{u})$ se e solo se $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^* + \mathbf{w}^*$ per opportuni $\mathbf{v}^* \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{w} \in \partial\mathcal{G}(\mathbf{u})$. Usando le caratterizzazioni trovate nella proposizione (6.4.5) e (6.3.8) si trova $\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{u}$ e $\mathbf{w} \in \partial G(\cdot,\mathbf{u})$ q.o. in Ω, che corrisponde all'affermazione da dimostrare. □

6.4.9 Teorema. *Supponiamo che valga la $(G^-.q.s)$ con $qs' \leq p$ e che esista $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $G(\cdot,\mathbf{u}_0) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.*

Allora esiste unica una $\bar{\mathbf{u}} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tale che $G(\cdot,\bar{\mathbf{u}}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} &\forall\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \ \textit{con } G(\cdot,\mathbf{v}) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ \textit{si ha } G'(\cdot,\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{u}}) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ \textit{e} \\ &\int_\Omega \nabla\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{u}})\,dx + \int_\Omega G'(x,\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{u}})\,dx \geq 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Se in aggiunta vale $(G^+.q_1, s_1)$ con $q_q s_1' \leq p$, allora

$$-\Delta\bar{\mathbf{u}} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M) \quad , \quad \Delta\bar{\mathbf{u}} \in \partial G(\cdot,\bar{\mathbf{u}}) \quad \textit{q.o. in } \Omega. \tag{6.13}$$

Se infine si ha anche $G(x,\cdot)$ differenziabile per quasi ogni $x \in \Omega$, allora la (6.13) diventa:

$$-\Delta\bar{\mathbf{u}} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M) \quad , \quad \Delta\bar{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{s}} G(\cdot,\bar{\mathbf{u}}) \quad \textit{q.o. in } \Omega. \tag{6.14}$$

che equivale a $\nabla_{\mathbf{s}} G(\cdot,\bar{\mathbf{u}}) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e

$$\int_\Omega \nabla\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{v}\,dx + \int_\Omega \nabla_{\mathbf{s}} G(x,\bar{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v}\,dx = 0 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M). \tag{6.15}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi $(G^-.q.s)$ con $qs' \leq p$ si ha che $\mathcal{G}$ è s.c.i. in $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Dato che $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ esiste $\mathbf{u}_0^*$ tale che

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}) \geq \mathcal{G}(\mathbf{u}_0) - 1 + \langle \mathbf{u}-\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^* \rangle \geq -C(1 + \|\mathbf{u}\|_p)$$

per un'opportuna costante C (vedi la proposizione (3.2.10)). Ne segue che

$$I(\mathbf{u}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{H^1_0} - C - C\|\mathbf{u}\|_p \geq \frac{1}{2S_p}\|\mathbf{u}\|^2_p - C - C\|\mathbf{u}\|_p \geq \frac{1}{4S_p}\|\mathbf{u}\|^2_p - C_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$$

per un'opportuna costante C_1. In definitiva I è convessa, s.c.i. (vedi l'osservazione (6.4.3)) e coerciva. Dunque esiste un punto di minimo $\bar{\mathbf{u}}$ per I o equivalentemente un punto $\bar{\mathbf{u}}$ tale che $0 \in \partial I(\bar{\mathbf{u}})$. Per la caratterizzazione di ∂I $\mathbf{u}$ trovata nella proposizione (6.4.6) la $\bar{\mathbf{u}}$ verifica (6.12).

Dimostriamo l'unicità. Supponiamo che $\bar{\mathbf{u}}_1$ sia un'altra soluzione. Scriviamo la (6.10) con $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_1$ e scriviamo l'equivalente disequazione per $\bar{\mathbf{u}}_1$ mettendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}$; Sommando le due si ottiene:

$$-\int_\Omega \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}})\|^2\, dx \geq 0 \quad \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}.$$

La seconda parte della tesi segue dalla proposizione (6.4.8). La terza segue dal fatto che $\partial G(x,\cdot) = \{\nabla_{\mathbf{s}} G(x,\cdot)\}$ per q.o. $x \in \Omega$. □

È istruttivo vedere gli stessi risultati facendo un altro percorso.

Ricordiamo che se $i : \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^M)$ è l'immersione, allora possiamo considerare l'aggiunta $i^* : \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)^* =: \mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathbb{R}^M)$, che per definizione ha la proprietà:

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \underbrace{\mathbf{v}}_{=i(\mathbf{v})}\, dx = \langle i^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle_{H^{-1},H^1_0} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{L}^{2^{*\prime}}(\Omega;\mathbb{R}^M), \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

Rappresentando la dualità (H^{-1}, H^1_0) mediante il prodotto scalare di $\mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$:

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega \nabla(i^*\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}\, dx \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{L}^{2^{*\prime}}(\Omega;\mathbb{R}^M), \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

che è il modo debole di dire $-\Delta(i^*(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$. Scriveremo allora $(-\Delta)^{-1}$ al posto di i^*.

6.4.10 Definizione. Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M$ un integando normale convesso e consideriamo $\tilde{\mathcal{G}} : \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \to [-\infty,+\infty]$ esattamente come in (6.5) (considerando $\mathbb{L} = \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$).

Notiamo che $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \circ i$ e che $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathcal{D}(\mathcal{G}) \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

Per il resto del paragrafo $\tilde{\mathcal{G}} : \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \to [-\infty,+\infty]$ è definito come sopra.

6.4.11 Osservazione. Se $\mathcal{G}$ è s.c.i. /continua, allora $\tilde{\mathcal{G}}$ è s.c.i. /continua. Questo è immediato dato che i è continua.

6.4.12 Proposizione. *Se $\mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$, $G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, sono equivalenti:*

(a) $\mathbf{u}^* \in \partial\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{u})$;

(b) *per ogni $\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ con $G(\cdot,\mathbf{v}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ si ha $G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega G'(x,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\, dx \geq \int_\Omega \nabla \mathbf{u}^* \cdot \nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\, dx. \tag{6.16}$$

Se inoltre $\mathcal{G}$ è continua (per es. valgano $(G^-.q_1.s_1)$ e $(G^+.q_2.s_2)$ con $\max(q_1 s_1', q_2 s_2') \leq p$), allora si ha:

$$\partial\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = \left\{-\Delta^{-1}\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M), \mathbf{v} \in \partial G(\cdot,\mathbf{u}) \text{ } q.o. \text{ } in \text{ } \Omega\right\} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M). \tag{6.17}$$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (a) e (b) segue dalla proposizione (6.3.5).

Se $\mathcal{G}$ è continua, allora per la proposizione (3.3.16):

$$\partial\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = \{i^*\mathbf{v}^* : \mathbf{v}^* \in \partial\mathcal{G}(\mathbf{u})\}\,.$$

Dalla (6.3.8) e da $i^* = (-\Delta\mathbf{u})^{-1}$ ne segue la (6.17). □

6.4.13 Definizione. Consideriamo $\tilde{I} : \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \to [-\infty,+\infty]$ definito da

$$\tilde{I}(\mathbf{u}) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx + \int_\Omega G(x,u)\,dx & \text{se } \mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M), G(\cdot\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altri termini $\tilde{I} := I \circ i = \mathcal{E} \circ i + \tilde{\mathcal{G}}$. Conveniamo allora che $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \circ i$.

6.4.14 Osservazione. $\tilde{\mathcal{E}}$ è differenziabile in $\mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ e $\operatorname{grad}\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

6.4.15 Osservazione. Sia ha $\mathcal{D}(\tilde{I}) = \mathcal{D}(I) = \big\{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M) : G(\cdot,\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\big\}$. Inoltre, per la continuità di $\mathcal{E}$ e il Teorema (3.3.10) si ha:

$$\partial\tilde{I}(\mathbf{u}) = \partial\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) + \partial\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \partial\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{u}). \tag{6.18}$$

6.4.16 Proposizione. *Sia* $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\tilde{I})$. *Allora* $\mathbf{u}^* \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^M)$ *è in* $\partial\tilde{I}(\mathbf{u})$ *se e solo se:*

$$\forall\mathbf{v} \in \mathcal{D}(I) \quad \begin{cases} G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx + \int_\Omega G'(\cdot,\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx \geq \langle\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{u}^*\rangle_{H^1_0,H^{-1}}\,. \end{cases} \tag{6.19}$$

o, equivalentemente, se e solo se:

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dx + \int_\Omega G(x,\mathbf{v})\,dx - \int_\Omega G(x,\mathbf{u})\,dx \geq \langle\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{u}^*\rangle_{H^1_0,H^{-1}} \quad \forall\mathbf{v} \in \mathcal{D}(I), \tag{6.20}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si fa come la corrispondente dimostrazione della proposizione (6.4.6) e della successiva osservazione, notando che

$$\tilde{I}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = I'(\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\tilde{I}) = \mathcal{D}(I)$$

(nelle derivate direzionali contano solo le restrizioni sulle rette). □

6.4.17 Osservazione. Sia $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}(I) = \mathcal{D}(\tilde{I})$. Allora $\bar{\mathbf{u}}$ minimizza I se e solo se $\bar{\mathbf{u}}$ minimizza $\tilde{I}$. Infatti le condizioni (6.9) e (6.19) coincidono se il sottodifferenziale è nullo ($\mathbf{u}^* = 0$).

6.4.18 Proposizione. *Supponiamo* $\mathcal{G}$ *continua (per es. valgano* $(G^-.q_1.s_1)$ *e* $(G^+.q_2.s_2)$ *con* $\max(q_1s_1', q_2s_2') \leq p$*). Allora per ogni* $\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$*:*

$$\partial\tilde{I}(\mathbf{u}) = \Big\{\mathbf{u} + (-\Delta)^{-1}\mathbf{w}^* : \mathbf{w}^* \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^M),\ \mathbf{w}^* \in \partial G(\cdot,\mathbf{u})\ \textit{q.o. in}\ \Omega\Big\}.$$

In altri termini

$$\partial\tilde{I}(\mathbf{u}) = \big\{(-\Delta)^{-1}\mathbf{u}^* : \mathbf{u}^* \in \partial I(\mathbf{u})\big\} = (-\Delta)^{-1}\partial I(\mathbf{u}).$$

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{G}$ è continua e $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \circ I$, usando la proposizione (3.3.16) si ha $\partial\tilde{\mathcal{G}} = i^*\partial\mathcal{G}$. Allora, per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega;\mathbb{R}^M) = \mathcal{D}(\tilde{I}) = \mathcal{D}(I)$, si ha:

$$\partial\tilde{I}(\mathbf{u}) = \partial\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) + \partial\mathcal{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + i^*\partial\mathcal{G}(\mathbf{u})$$

(la prima eguaglianza vale sempre per la continuità di $\tilde{\mathcal{E}}$). La tesi segue da $i^* = (-\Delta)^{-1}$ e dalla carattterizzazione di $\partial\mathcal{G}$. □

Possiamo allora ritrovare le soluzione $\bar{\mathbf{u}}$ del teorema (6.4.9) passando attraverso $\tilde{I}$. Il seguente teorema si dimostra in effetti imitando la dimostrazione del teorema (6.4.9).

6.4.19 Teorema. *Supponiamo che valga* $(G^-.q,s)$ *con* $qs' \leq p$ *(*$1 < p \leq 2^*$*). Allora il funzionale* $\tilde{I}$ *è s.c.i. e coercivo in* $\mathrm{H}_0^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$*. Dunque esiste* $\bar{\mathbf{u}} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega;\mathbb{R}^M)$ *di minimo per* $\tilde{I}$*. Tale minimo è unico e verifica* (6.12).

Se inoltre vale $(G^+.q_1,s_1)$ *con* $q_1s_1' \leq p$*, allora* $\bar{\mathbf{u}}$ *verifica* (6.13).

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Vediamo ora come si può costruire un problema duale a quello sopra. Ci mettiamo nel quadro descritto nell'esempio (4.2.14) considerando

$$\mathbb{X} := \mathrm{H}_0^1(\Omega;\mathbb{R}^M), \qquad \mathbb{Y} := L^2(\Omega;\mathbb{R}^{NM}),$$
$$f : \mathbb{X} \to]-\infty,\infty],\ g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R},\ \Lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \text{ definite da}$$
$$f(\mathbf{u}) := \int_\Omega G(x,\mathbf{u})\,dx, \qquad g(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \|\mathbf{v}\|^2\,dx, \qquad \Lambda(\mathbf{u}) := \nabla\mathbf{u}$$

Supponiamo che valga (G.XXXX). È facile vedere che g e Λ sono continue e che $I := g \circ \Lambda + f$ è corcivo. Si ha:

- $g^*(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \|\mathbf{u}^*\|^2\,dx$: basta applicare la (b) dell'esempio (4.1.12) con $\psi(s) = \frac{1}{2}s^2$;

6.5 Problemi semilineari con ostacolo

In questo paragrafo consideriamo sempre $p \in]1,2^*]$ (per semplicità $N \geq 3$) e $M = 1$ (consideriamo il problema scalare). Supporremo inoltre:

- un integrando normale convesso $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante (G^-,q,s) con $qs' \leq p$;
- una funzione misurabile $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ (l'ostacolo).

La prima ipotesi implica $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G : \mathrm{L}^p(\Omega) \to]-\infty,\infty]$ e $I : \mathrm{L}^p(\Omega) \to]-\infty,\infty]$ s.c.i. .

6.5.1 Definizione. Definiamo i convessi $\mathbb{K}_\varphi, \mathbb{K}_{G,\varphi} \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ e il funzionale vincolato $\bar{I} = \bar{I}_{G,\varphi} : \mathrm{L}^p(\Omega) \to]-\infty,\infty]$ definiti da:

$$\mathbb{K}_\varphi := \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) : u \geq \varphi \text{ q.o. in } \Omega\}, \quad \mathbb{K}_{G,\varphi} := \left\{u \in \mathbb{K}_\varphi : G(\cdot,u) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\},$$
$$\bar{I}_{G,\varphi}(u) := \begin{cases} I_G(u) & \text{se } u \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\bar{I}_{G,\varphi} = I_G + \chi_{\mathbb{K}_\varphi}$ e che $\mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi}) = \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

6.5.2 Proposizione. *$\mathbb{K}_\varphi$ è chiuso e quindi $\bar{I}_{G,\varphi}$ è s.c.i. .*

Dimostrazione. $u_n \to u$ in $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Passando a una sottosuccessione possiamo supporre che $u_n \to u$ q.o. in Ω. Dato che $u_n \geq \varphi$ q.o. se ne ricava $u \geq \varphi$ q.o., cioè $u \in \mathbb{K}_\varphi$. □

6.5.3 Osservazione. Se definiamo

$$G_\varphi(x,s) := \begin{cases} G(x,s) & \text{se } s \geq \varphi(x), \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

allora è chiaro che $\bar{I}_{G\varphi} = \mathcal{E} + \mathcal{G}_{G_\varphi}$. Notiamo che $G_\varphi = G + \chi_C$ dove $C = \{(x,s) : s \geq \varphi(x)\}$ e non è difficile verificare che C verifica le condizioni indicate in (6.1.7), per cui χ_C, e di conseguenza G_φ, è un integrando normale. Dunque funzionale $\bar{I}_{G,\varphi}$ ricade nei casi trattati nel paragrafo precedente. Chiaramente G_φ verifica ancora (G^-, q_1, s_1) (potremmo allora ricavare da qui la semicontinuità inferiore di $\bar{I}_{G,\varphi}$).

6.5.4 Teorema. *Supponiamo che $\mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) \neq \emptyset$. Allora esiste un'unica $\bar{u}$ tale che:*

$$\begin{cases} \bar{u} \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) \qquad \textit{e per ogni } v \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) \textit{ si ha:} \\ G'(\cdot, \bar{u})(v - \bar{u}) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ \textit{e} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\, dx + \int_\Omega G'(x,u)(v-u)\, dx \geq 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

La (6.21) *si dice* disequazione variazionale *(relativa a $-\Delta + G'$ e all'ostacolo φ).*

Dimostrazione. Il funzionale $\bar{I}_{G,\varphi}$ è convesso, s.c.i. (come appena detto) ed è coercivo dato che $\bar{I}_{G,\varphi} \geq I_G$. Inoltre per ipotesi $\mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi}) \neq \emptyset$.

Usando l'osservazione (6.5.3) possiamo usare il teorema (6.4.9) con G_φ al posto di G. Se ne ricava l'esistenza e l'unicità di un minimo $\bar{u}$ per $\bar{I}_{G,\varphi}$. Inoltre $\bar{u}$ verifica la (6.12) con G_φ in luogo di G. Dato che $\mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi}) = \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ questo equivale alla (6.21) □

Vorremmo ora trovare una forma "forte" della disequazione variazionale (6.21). Chiaramente non possiamo imporre che G_φ sia continua. Dobbiamo invece giocare sulla regolarità dell'ostacolo φ.

6.5.5 Definizione. Supponiamo che $\varphi^+ \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Definiamo la "proiezione" $\pi_\varphi : \mathrm{L}^p(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\Omega)$ ponendo:

$$\pi_\varphi(v) := v \vee \varphi = v + (\varphi - v)^+.$$

6.5.6 Lemma. *Sia $\varphi^+ \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. La π_φ ha le seguenti proprietà.*

(a) *Se $u \in \mathbb{K}_\varphi$, allora:*

$$\|v - \pi_\varphi(v)\|_p \leq \|v - u\|_p \qquad \forall v \in \mathrm{L}^p(\Omega).$$

(b) *Supponiamo $\varphi \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e $\varphi^+ \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Allora per ogni $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ si ha $\pi_\varphi(v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\nabla \pi_\varphi(v) = (\nabla v)\mathbb{1}_{\{v \geq \varphi\}} + (\nabla \varphi)\mathbb{1}_{\{\varphi > v\}}$.*

Dimostrazione. (a) Dato che $u \geq \varphi$ si ha (puntualmente):

$$|v - \pi_\varphi(v)| = (v - \varphi)^+ \leq (v - u)^+ \leq |v - u|.$$

(b) Basta dimostrare che $w := (\varphi - v)^+$ è in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e che $\nabla w = \nabla(\varphi - v)\mathbb{1}_{\{\varphi > v\}}$.

Dalla proposizione (A.2.3) con $H(s) := s^+$ si ricava che $w \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e vale la formula (perché $H' = \mathbb{1}_{\{s>0\}}$; nota che $E_H = \{0\}$). Se consideriamo $w_1 := (\varphi^+ - v)^+$, allora $w_1 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ perché $\varphi^+ - v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $H(0) = 0$ (vedi ancora la (A.2.3)). Dato che

$$0 \leq w = (\varphi - v)^+ \leq (\varphi^+ - v)^+ 0 = w_1$$

si ha, per la (A.2.10), che $w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. □

6.5.7 Corollario. *Se $u \in \mathbb{K}_{G,\varphi}$ e $G(\cdot,\varphi) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, allora esiste una successione (u_n) in $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{K}_{G,\varphi}$ tale che $u_n \to u$ in $\mathrm{L}^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. È ben noto che esiste una successione (u_n) in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tale che $v_n \to u$ in $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Se poniamo $u_n := \pi_\varphi(v_n)$ allora $u_n \in \mathbb{K}_{G,\varphi}$ e $\|u_n - u\|_p \leq \|u_n - v_n\|_p + \|v_n - u\|_p = \|\pi_\varphi(v_n) - v_n\|_p + \|v_n - u\|_p \leq 2\|v_n - u\|_p \to 0$. □

6.5.8 Proposizione. *Supponiamo che valga la seguente condizione su φ:*

$$\varphi \in \mathrm{H}^{2,p'}(\Omega), \quad \varphi^+ \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \qquad G'_-(\cdot,\varphi)^+ \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega) \tag{φ}$$

Ricordiamo che la pendenza è stata definita in (3.4.2). Allora per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi})$ si ha:

$$|\nabla I|(u) \leq \| - \Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi)^+\|_{p'} + 2|\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(u) \tag{6.22}$$

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi}) = \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ con $|\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(u) < +\infty$. Sia $v \in \mathcal{D}(I)$ cioè $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $G(\cdot,v) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Allora:

$$\underbrace{G(\cdot,v)}_{\in \mathrm{L}^1(\Omega)} \geq G(\cdot,\pi_\varphi(v)) + G'(\cdot,\pi_\varphi(v))(v - \pi_\varphi(v)) = G(\cdot,\pi_\varphi(v)) +$$

$$G'_-(\cdot,\pi_\varphi(v)) \cdot \underbrace{(-(\varphi - v)^+)}_{\leq 0} \geq G(\cdot,\pi_\varphi(v)) - \underbrace{G'_-(\cdot,\varphi)^+ \cdot (\varphi - v)^+}_{\in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ se vale } (\varphi)}.$$

Abbiamo usato che $v \leq \pi_\varphi(v)$ e che $\pi_\varphi(v)$ vale φ dove $v \neq \pi_\varphi(v)$. Dunque $G(\cdot,\pi_\varphi(v))^+ \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Dalla $(G^-.q.s)$ con $qs' \leq p$ si ottiene $G(\cdot,\pi_\varphi(v))^- \leq a_0 + a_1|\pi_\varphi(v)|^q \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ (vedi i calcoli fatti nella dimostrazione della (6.3.11)) e quindi $G(\cdot,\pi_\varphi(v)) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Inoltre $\pi_\varphi(v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ per la (b) del lemma (6.5.6); in definitiva π_φ manda $\mathcal{D}(I)$ in $\mathcal{D}(\bar{I}_{G,\varphi}) = \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
I(v) - I(\pi_\varphi(v)) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 - |\nabla \pi_\varphi(v)|^2)\,dx + \int_\Omega (G(x,v) - G(x,\pi_\varphi(v))\,dx \geq \\
&\int_\Omega \nabla\pi_\varphi(v) \cdot \nabla(v - \pi_\varphi(v))\,dx + \int_\Omega G'_-(x,\pi_\varphi(v))(v - \pi_\varphi(v))\,dx = \\
&\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla(v - \pi_\varphi(v))\,dx + \int_\Omega G'_-(x,\varphi)(v - \pi_\varphi(v))\,dx = \\
&\int_\Omega \big(-\Delta\varphi + G'_-(x,\varphi)\big) \cdot (v - \pi_\varphi(v))\,dx \geq \int_\Omega \big(-\Delta\varphi + G'_-(x,\varphi)^+\big) \cdot (v - \pi_\varphi(v))\,dx \geq \\
&- \| - \Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi)^+\|_{p'}\|v - \pi_\varphi(v)\|_p \geq - \underbrace{\| - \Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi) \wedge 0\|_{p'}}_{=:C}\|v - u\|_p.
\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
I(v) - I(u) &= I(v) - I(\pi_\varphi(v)) + \bar{I}_{G,\varphi}(\pi_\varphi(v)) - \bar{I}_{G,\varphi}(u) \geq \\
&- C\|v - u\|_p - |\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(u)\|\pi_\varphi(v) - u\|_p \geq \\
-C\|v-u\|_p - |\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(u)(\|\pi_\varphi(v) - v\|_p + \|v-u\|_p) &\geq -(C + 2|\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(u))\|v-u\|_p \qquad \forall v \in \mathcal{D}(I)
\end{aligned}$$

e quindi vale (6.22). □

6.5.9 Teorema (regolarità). *Supponiamo che G verifichi sia $(G^-.q.s)$ che $(G^+.q_1.s_1)$ con $\max(qs', q_1 s_1') \leq p$, che $G(x,\cdot)$ sia derivabile e che valga (φ).*

Allora $\bar{u}$ risolve (6.21) se e solo se

$$\begin{aligned}
&\bar{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \quad \bar{u} \geq \varphi \quad - \Delta\bar{u} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega), \quad G'(\cdot,\bar{u}) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega), \\
&-\Delta\bar{u} + G'(\cdot,\bar{u}) \geq 0, \qquad -\Delta\bar{u} + G'(\cdot,\bar{u}) = 0 \text{ in } \{\bar{u} > \varphi\}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Dimostrazione. Sia $\bar{u}$ una soluzione di (6.21). Allora $\bar{u}$ è di minimo per $\bar{I}_{G,\varphi}$ e dunque $|\nabla \bar{I}_{G,\varphi}|(\bar{u}) = 0$. Per la proposizione (6.5.8) si ha $|\nabla I|(\bar{u}) \leq \| -\Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi)^+\|_{p'} < +\infty$. Per la proposizione (3.4.7) ne segue che esiste u^* in $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ con $u^* \in \partial I(\bar{u})$. Per il teorema (6.4.9), dato che vale $(G^+.q_1.s_1)$ con $\max(qs', q_1 s_1') \leq p$, si ha $-\Delta\bar{u} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ e $u^* + \Delta\bar{u} = G'(\cdot,\bar{u})$ q.o. in Ω, dunque $G'(\cdot,\bar{u}) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Allora la (6.21) diventa ($\bar{u} \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e):

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))(v - \bar{u})\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$$

e per densità (vedi il corollario (6.5.7)):

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))(v - \bar{u})\, dx \geq 0. \qquad \forall v \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \tag{6.24}$$

Dato che $\{\bar{u} + w : w \in \mathrm{L}^p(\Omega), w \geq 0\} \subset \mathbb{K}_{G,\varphi}$ si ha:

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))w\, dx \geq 0 \qquad \forall w \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ w \geq 0.$$

che implica $-\Delta\bar{u} + G'(\cdot,\bar{u}) \geq 0$ q.o. in Ω.

Sia ora $w \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ con $w = 0$ q.o. in $\{x \in \Omega : \bar{u}(x) = \varphi(x)\}$. Se $t > 0$ poniamo $v_t := \pi_\varphi(\bar{u} + tw) \in \mathbb{K}_{G,\varphi}$. Allora, dalla (6.24) (divido per t):

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))\frac{v_t - \bar{u}}{t}\, dx \geq 0 \qquad \forall t > 0.$$

Si ha $\dfrac{v_t - \bar{u}}{t} = w + \dfrac{(\varphi - \bar{u} - tw)^+}{t}$ e (dato che $\varphi \leq \bar{u}$):

$$0 \leq \frac{(\varphi - \bar{u} - tw)^+}{t} = \mathbb{1}_{\{u+tw<\varphi\}}\frac{\varphi - \bar{u} - tw}{t} \leq -\mathbb{1}_{\{u+tw<\varphi\}} w \leq |w|.$$

Dato che, a x fissato, $\mathbb{1}_{\{u+tw<\varphi\}}(x) \to \mathbb{1}_{\{u<\varphi\}}(x) = 0$ se ne deduce:

$$\left|\frac{(\varphi - \bar{u} - tw)^+}{t}\right| \leq |w| \in \mathrm{L}^p(\Omega), \qquad \frac{(\varphi - \bar{u} - tw)^+}{t} \to 0 \text{ puntualmente}$$

e dunque:

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))w\, dx \geq 0 \qquad \forall w \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ con } w = 0 \text{ su } \{\bar{u} = \varphi\}\,.$$

Prendendo $-w$ al posto di w si ottiene:

$$\int_\Omega (-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}))w\, dx = 0 \qquad \forall w \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ con } w = 0 \text{ su } \{\bar{u} = \varphi\}\,.$$

che implica $-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}) = 0$ su $\Omega \setminus \{\bar{u} = \varphi\}$.

Abbiamo dimostrato che (6.21) $\Rightarrow$ (6.23). L'implicazione inversa è semplice. □

6.5.10 Definizione. Diciamo che φ è una sottosoluzione per $-\Delta + G'$ se:

$$\begin{gathered}\varphi \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega), \quad \varphi^+ \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \qquad G(\cdot,\varphi) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ \int_\Omega \big(\nabla\varphi\nabla v + G'_-(x,\varphi)v\big)\, dx \leq 0 \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega),\ v \geq 0,\ \big[G'_-(\cdot,\varphi)\big]^- v \in \mathrm{L}^1(\Omega).\end{gathered} \tag{6.25}$$

6.5.11 Proposizione. *Se $\varphi \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\nabla\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\varphi \leq 0$ su $\partial\Omega$, $G(\cdot,\varphi) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ e*

$$-\Delta\varphi(x) + G'_-(x,\varphi(x)) \leq 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

allora φ è una sottosoluzione.

Dimostrazione. Dal fatto che $\varphi \in \mathcal{C}(\bar\Omega)$ si ricava che $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, Dato che $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e $\nabla\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ si ha $\varphi \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$. Dato che $H(s) := s^+$ è lipschitziana, usando (A.2.3), si deduce che $v^+ \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e, per le ulteriori ipotesi $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\varphi \leq 0$, dalla (A.2.9), si ricava infine che $\varphi^+ \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Per dimostrare la (6.25) prendiamo $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ con $v \geq 0$ e $\left[G'_-(\cdot,\varphi)\right]^- v \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Per la (A.2.8), troviamo una successione (v_n) (la (w_n) di (A.2.8)) in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ con $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq v$ e $v_n \to v$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Dato che:

$$0 \leq \left[G'_-(\cdot,\varphi)\right]^- \tilde v_n \leq \left[G'_-(\cdot,\varphi)\right]^- v \in \mathrm{L}^1(\Omega)$$

e che (per il fatto che $\tilde v_n$ è a supporto compatto):

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\tilde v_n\,dx = -\int_\Omega \Delta\varphi\tilde v_n\,dx$$

abbiamo che la (6.25) vale per ogni $\tilde v_n$. Dato che $\nabla\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\tilde v_n\,dx \to \int_\Omega \nabla\varphi\nabla v\,dx$$

e per la monotonia di $\tilde v_n$:

$$\int_\Omega G_-(x,\varphi)\tilde v_n\,dx = \int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^+\,\tilde v_n\,dx - \int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^-\,\tilde v_n\,dx \geq$$
$$\int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^+\,\tilde v_n\,dx - \int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^-\,v\,dx \to \int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^+\,v\,dx - \int_\Omega [G_-(x,\varphi)]^-\,v\,dx.$$

Dunque passando al limite si ottiene la (6.25) per v. □

6.5.12 Proposizione. *Supponiamo che φ sia una sottosoluzione e che $\bar u$ sia una soluzione della disequazione variazionale* (6.21). *Allora $\bar u$ risolve il "problema libero"* (6.12).

Dimostrazione. Sappiamo che $\bar u \in \mathbb{K}_{G,\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ è di minimo per $\bar I_{G,\varphi}$. Sia $v \in \mathcal{D}(I)$, cioè $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $G(\cdot,v) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$; allora $\pi_\varphi(v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (per la (b) del lemma (6.5.6)) e

$$G(\cdot,\pi_\varphi(v)) = G(\cdot,\varphi)\mathbb{1}_{\{v<\varphi\}} + G(\cdot,v)\mathbb{1}_{\{v\geq\varphi\}} \in \mathrm{L}^1(\Omega),$$

dunque $\pi(v) \in \mathcal{D}(\bar I_{G,\varphi})$. Inoltre, per l'espressione di π_φ (cfr. la dimostrazione di (6.5.8)):

$$\underbrace{G(\cdot,v) - G(\cdot,\pi_\varphi(v))}_{\in \mathrm{L}^1(\Omega)} \geq G'_-(\cdot,\pi_\varphi(v))(v - \pi_\varphi(v)) = -G'_-(\cdot,\varphi)(\varphi - v)^+$$

Dunque $\left[G'_-(\cdot,\varphi)\right]^- (\varphi - v)^+ \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ e allora $(\varphi - v)^+$ è ammissibile come test nella (seconda riga di) (6.25). Facendo gli stessi calcoli della dimostrazione della (6.5.8) :

$$I(v) - I(\pi_\varphi(v)) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 - |\nabla\pi_\varphi(v)|^2)\,dx + \int_\Omega (G(x,v) - G(x,\pi_\varphi(v))\,dx \geq$$
$$\int_\Omega \nabla\pi_\varphi(v)\cdot\nabla(v - \pi_\varphi(v))\,dx + \int_\Omega G'_-(x,\pi_\varphi(v))(v - \pi_\varphi(v))\,dx =$$
$$-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi - v)^+\,dx - \int_\Omega G'_-(x,\varphi)(\varphi - v)^+\,dx \geq 0.$$

Dunque per ogni $v \in \mathcal{D}(I)$ si ha $I(v) \geq I(\pi_\varphi(v)) = \bar I_{G,\varphi}(\pi_\varphi(v)) \geq \bar I_{G,\varphi}(u) = I(\bar u)$, cioè $\bar u$ è di minimo per I che equivale alla tesi. □

6.5.13 Proposizione (principio del massimo). *Supponiamo che $\bar{u}$ sia una soluzione di* (6.12) *e che φ sia una sottosoluzione per $-\Delta + G'$. Allora $\bar{u} \geq \varphi$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{u} \in \tilde{\mathbb{K}}_{G,\varphi}$ la soluzione di (6.21). Per la proposizione (6.5.12) $\tilde{u}$ risolve (6.12). Per l'unicità della soluzione si ha $\bar{u} = \tilde{u}$, dunque $\bar{u} \geq \varphi$. □

Nello stesso modo si ragiona per "ostacoli superiori".

6.5.14 Definizione. Sia $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Introduciamo i convessi $\tilde{\mathbb{K}}^{\psi} \subset \mathbb{K}^{\psi} \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ e il funzionale vincolato $\bar{I}^{\psi} : \mathrm{L}^p(\Omega) \to]-\infty, \infty]$ definiti da:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}^{\psi} &:= \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) : u(x) \leq \psi(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}, \\
\tilde{\mathbb{K}}^{\psi} &:= \left\{u \in \mathbb{K}^{\psi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) : G(\cdot, u) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\}, \\
\bar{I}^{\psi}(u) &:= \begin{cases} I(u) & \text{se } u \in \mathbb{K}^{\psi}, \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad = (I + \chi_{\mathbb{K}^{\psi}})(u).
\end{aligned}
$$

Allora $\mathcal{D}(\bar{I}^{\psi}) = \tilde{\mathbb{K}}^{\psi}$. Se $\varphi \leq \psi$ sono misurabili poniamo anche:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}^{\psi}_{\varphi} &:= \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) : \varphi(x) \leq u(x) \leq \psi(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}, \\
\bar{\mathbb{K}}^{\psi}_{\varphi} &:= \left\{u \in \mathbb{K}^{\psi}_{\varphi} \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega) : G(\cdot, u) \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\}, \\
\bar{I}^{\psi}_{\varphi} &:= \begin{cases} I(u) & \text{se } u \in \mathbb{K}^{\psi}_{\varphi}, \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases} \quad = (I + \chi_{\mathbb{K}^{\psi}_{\varphi}})(u).
\end{aligned}
$$

6.5.15 Definizione. Diciamo che ψ è una soprasoluzione per $-\Delta + G'$ se

$$
\begin{gathered}
\psi \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega), \quad \psi^- \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \qquad G(\cdot, \psi) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \\
\int_\Omega \nabla\psi \nabla v \, dx + G'_+(x, \psi) v \, dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \; v \geq 0, \; \left[G'_+(\cdot, \psi)\right]^+ v \in \mathrm{L}^1(\Omega).
\end{gathered} \tag{6.26}
$$

La seguente proposizione si dimostra come nel caso delle sottosoluzioni. In questa proposizione si enunciano sia l'equivalente della proposizione (6.5.12) sia l'equivalente del principio di massimo (o meglio di monotonia) contenuto nella (6.5.13).

6.5.16 Proposizione. *Supponiamo che ψ sia una soprasoluzione e che $\bar{u}$ sia una soluzione di* (6.21) *con $\mathbb{K}^{\psi}$ al posto di $\mathbb{K}_{\psi}$. Allora $\bar{u}$ risolve* (6.12).

Dunque se $\bar{u}$ è soluzione di (6.12) *e se ψ è una soprasoluzione, allora $\bar{u} \leq \psi$*

Se $\varphi \leq \psi_2$, φ è una sottosoluzione, ψ è una soprasoluzione e se $\bar{u}$ è soluzione di (6.21) *con $\mathbb{K}^{\varphi}_{\psi}$ al posto di $\mathbb{K}_{\varphi}$, allora $\bar{u}$ risolve* (6.12)

Dunque se $\bar{u}$ è soluzione di (6.12) *e se $\varphi \leq \psi$ sono rispettivamente una una sotto e una sopra soluzione, allora $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi$.*

6.6 Un problema singolare

Sia $\alpha > 0$. Vogliamo indagare l'esistenza di soluzioni per il "problema singolare":

$$
\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{1}{u^{\alpha}} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_{sing}}
$$

Prima di procedere ricordiamo alcune proprietà legate della prima autofunzione dell'operatore di Laplace.

6.6.1 Osservazione. Ricordiamo che il numero

$$\lambda_1 := \inf\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx : u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \int_\Omega u^2\,dx = 1\right\}$$

è in effetti un minimo e che

$$\left\{u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) : \int_\Omega u^2\,dx = 1, \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx = \lambda_1\right\} = \{\pm\mathbf{e}_1\}$$

dove $\mathbf{e}_1 \geq 0$ a.e. in Ω. Il numero positivo λ_1 è detto *il primo autovalore di* $-\Delta$ *in* $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, mentre la funzione $\mathbf{e}_1$ è la corrispondente *prima autofunzione* (l'autospazio relativo a λ_1 è unidimensionale e ne stiamo selezionando un elemento con la condizione sul segno detta sopra).

6.6.2 Osservazione. Ricordiamo anche che $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathbf{e}_1 > 0$ in Ω e che, se $\partial\Omega$ è "sufficientemente regolare" (XXX Hopf Lemma XXX), allora $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e si ha:

$$\nu_0 := \inf\{\nabla\mathbf{e}_1(x)\cdot\mathbf{n}(x) : x \in \partial\Omega\} = (\inf\{|\nabla\mathbf{e}_1(x)| : x \in \partial\Omega\}) > 0 \tag{6.27}$$

se $\mathbf{n}(x)$ indica la normale unitaria nel punto $x \in \partial\Omega$, entrante in Ω. Se questo è vero abbiamo anche che, per $\delta > 0$ piccolo:

$$x \in \Omega, \mathbf{e}_1(x) \leq \delta \Rightarrow |\nabla\mathbf{e}_1(x)| \geq \frac{\nu_0}{2}.$$

Usando opportunamente il Teorema del Dini, si vede che esiste una costante M tale che:

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(\{x \in \Omega : \mathbf{e}_1(x) = t\}\right) \leq M \quad \forall t \in [0,\delta] \tag{6.28}$$

Introduciamo la primitiva della funzione singolare in (P_{sing}).

6.6.3 Definizione. Se $\alpha > 0$ definiamo la funzione $G_\alpha : \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ ponendo:

$$G_\alpha(s) := \begin{cases} \dfrac{s^{1-\alpha}-1}{\alpha-1} & \text{se } s \geq 0 \\ +\infty & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (\text{per } \alpha \neq 1) \qquad G_1(s) := \begin{cases} -\ln(s) & \text{se } s > 0 \\ +\infty & \text{se } s \leq 0 \end{cases}$$

(il termine -1 al numeratore per $\alpha \neq 1$ non è strettamente necessario, ma fa sì che $G_\alpha(1) = 0$ per ogni α; notiamo che $G_\alpha(0) = +\infty$ se $\alpha \geq 1$).

È chiaro che G_α è un integrando normale convesso e che:

$$G'_\alpha(s) = -s^{-\alpha} \qquad \text{se } s > 0.$$

Il seguente lemma ci fornisce delle sopra/sotto soluzioni per (P_{sing}).

6.6.4 Lemma. *Supponiamo che $\partial\Omega$ sia regolare, in modo cha valga la* (6.27)*. Allora, se $0 < \alpha < 3$ esistono $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tali che $\varphi \leq \psi$ e:*

$$\nabla\varphi, \nabla\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ G_\alpha(\varphi), G_\alpha(\psi) \in \mathrm{L}^1(\Omega),\ \varphi,\psi > 0 \text{ in } \Omega, \varphi,\psi = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{6.29}$$

$$-\Delta\varphi - \varphi^{-\alpha} < 0 \text{ in } \Omega \qquad , \qquad -\Delta\psi - \psi^{-\alpha} > 0 \text{ in } \Omega \tag{6.30}$$

Dimostrazione. Cerchiamo φ e ψ della forma $\varepsilon\xi(\mathbf{e}_1(x))$ per un'opportuna $\xi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, con $\varepsilon > 0$ piccolo nel caso di φ e grande nel caso di ψ. La costruzione di ξ è diversa a seconda che $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ o $1 < \alpha < 3$. In realtà la costruzione fatta per $\alpha < 1$ funzionerebbe anche per $\alpha = 1$, ma quella (più complicata) che consideriamo ci darà maggiori informazioni.

<u>Caso $\alpha \in]0,1[$</u> Prendiamo $\xi(s) := s$, cioè $\xi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$. È chiaro che prendendo $\varphi = \varepsilon'\mathbf{e}_1$ e $\psi = \varepsilon''\mathbf{e}_1$ valgono le (6.29). Notiamo che per $\alpha < 1$ G_α è continua e dunque $G_\alpha(\varphi)$ e $G_\alpha(\psi)$ sono continue su $\bar{\Omega}$. Inoltre:

$$-\Delta(\varepsilon\mathbf{e}_1)-(\varepsilon\mathbf{e}_1)^{-\alpha} = \varepsilon\lambda_1\mathbf{e}_1-\varepsilon^{-\alpha}\mathbf{e}_1^{-\alpha} = -\varepsilon^{-\alpha}\mathbf{e}_1^{-\alpha}(1-\varepsilon^{1+\alpha}\lambda_1\mathbf{e}_1^{1+\alpha}) = \varepsilon\mathbf{e}_1(\lambda_1-\varepsilon^{-1-\alpha}\mathbf{e}_1^{-1-\alpha}).$$

Se $\varepsilon \to 0^+$ si ha $(1-\varepsilon^{1+\alpha}\lambda_1\mathbf{e}_1^{1+\alpha}) \to 1$, dunque per $\varepsilon > 0$ piccolo $-\Delta(\varepsilon\mathbf{e}_1) - (\varepsilon\mathbf{e}_1)^{-\alpha} < 0$ in Ω. Se $\varepsilon \to +\infty$ si ha $(\lambda_1 - \varepsilon^{-1-\alpha}\mathbf{e}_1^{-1-\alpha}) \to \lambda_1 > 0$, dunque per ε grande $-\Delta(\varepsilon\mathbf{e}_1) - (\varepsilon\mathbf{e}_1)^{-\alpha} > 0$ in Ω.

<u>Caso $\alpha = 1$</u> In questo caso prendiamo $\xi(s) := s|\ln(c\,s)|^{1/2}$ dove c è fissato con $0 < c \le e^{-1}\|\mathbf{e}_1\|_\infty^{-1}$, di modo che $\ln(c\,\mathbf{e}_1(x)) \le \ln(e^{-1}) \le -1$ per ogni $x \in \Omega$. Chiaramente ξ è continua su $[0, c^{-1}]$, $\xi(0) = 0 (= \xi\,(c^{-1}))$ e $\xi > 0$ in $]0, c^{-1}[$ da cui $\xi \circ \mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, $\xi \circ \mathbf{e}_1 = 0$ su $\partial\Omega$ e $\xi \circ \mathbf{e}_1 > 0$ su Ω. Inoltre ξ è infinitamente derivabile in $]0, c^{-1}[$ e

$$\xi'(x) = |\ln(c\,s)|^{1/2} - \frac{1}{2}|\ln(c\,s)|^{-1/2}\ ,\ \xi''(x) = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{2}|\ln(c\,s)|^{-1/2} - \frac{1}{4}|\ln(c\,s)|^{-3/2}\right)$$

per $0 < s < 1/c$. Ne segue che $\xi \circ \mathbf{e}_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e si ha:

$$\nabla\xi \circ \mathbf{e}_1 = (\xi' \circ \mathbf{e}_1)\nabla\mathbf{e}_1 = \left(\underbrace{|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{1/2}}_{h_1} - \underbrace{\frac{1}{2}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2}}_{h_2}\right)\nabla\mathbf{e}_1$$

(in Ω). È chiaro che $h_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Dico che $h_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Consideriamo $\delta > 0$ e $M > 0$ come nella (6.28) ($\Rightarrow \delta < \|\mathbf{e}_1\|_\infty$). Allora h_1 è continua su $\{x \in \Omega : \mathbf{e}_1(x) \ge \delta\}$ mentre:

$$\int\limits_{\{\mathbf{e}_1(x)\le\delta\}} h_1(x)^2\,dx = \int\limits_{\{\mathbf{e}_1(x)\le\delta\}} |\ln(c\,\mathbf{e}_1(x)|\,dx \le \frac{1}{\nu_0}\int\limits_{\{\mathbf{e}_1(x)\le\delta\}} |\ln(c\,\mathbf{e}_1(x)||\nabla\mathbf{e}_1|\,dx =$$
$$\frac{1}{\nu_0}\int_0^\delta |\ln(c\,y)|\,\mathcal{H}^{N-1}(\{x : \mathbf{e}_1(x) = y\})\,dy \le \frac{M}{\nu_0}\int_0^\delta |\ln(c\,y)|\,dy < +\infty.$$

(abbiamo usato la formula di coarea XXX). Ne segue che $\nabla\xi\circ\mathbf{e}_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Dato che $\alpha = 1$ abbiamo (usando di nuovo la formula di coarea come sopra):

$$\int\limits_{\{\mathbf{e}_1(x)\le\delta\}} |G_\alpha(\xi \circ \mathbf{e}_1)|\,dx = \int\limits_{\{\mathbf{e}_1(x)\le\delta\}} \left(\ln(\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}\ln\left(|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|\right)\right)dx \le$$
$$\frac{M}{\nu_0}\int_0^\delta \left(\ln(y) + \frac{1}{2}\ln\left(|\ln(c\,y)|\right)\right)dx < +\infty.$$

Dato che $G_{-1}(\varphi)$ è continua su $\{\mathbf{e}_1(x) \ge \delta\}$ ricaviamo che $G_{-1}(\xi \circ \mathbf{e}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Abbiamo dunque dimostrato le (6.29). Rimane da dimostare la (6.30). Si ha:

$$-\Delta(\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1)) - (\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1))^{-1} = -\varepsilon\xi''(\mathbf{e}_1)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 - \varepsilon\xi'(\mathbf{e}_1)\Delta\mathbf{e}_1 - \varepsilon^{-1}\xi(e_1)^{-1} =$$
$$\frac{\varepsilon}{\mathbf{e}_1}\left(\frac{1}{2}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2} + \frac{1}{4}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-3/2}\right)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 +$$
$$\varepsilon\lambda_1\left(|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{1/2} - \frac{1}{2}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2}\right)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\varepsilon\mathbf{e}_1}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2} =$$
$$-\frac{1}{\varepsilon\mathbf{e}_1}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2}\left\{1 - \varepsilon^2\underbrace{\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1}\right)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 - \lambda_1\left(|\ln(c\,\mathbf{e}_1)| - \frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_1^2\right]}_{h_3}\right\}$$

Dato che h_3 è continua su $\bar{\Omega}$ se ne ricava $-\Delta(\varepsilon\xi \circ \mathbf{e}_1) - (\varepsilon\xi \circ \mathbf{e}_1)^{-1} < 0$ in Ω per $\varepsilon > 0$ piccolo, cioè la (6.30) per φ. Raccogliendo in maniera diversa si ha:

$$\begin{aligned}
&-\Delta(\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1)) - (\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1))^{-1} = \\
&\frac{\varepsilon}{\mathbf{e}_1}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1}\right)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 + \lambda_1\left(|\ln(c\,\mathbf{e}_1)| - \frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_1^2 - \varepsilon^{-2}\right\} \geq \\
&\qquad\qquad \frac{\varepsilon}{\mathbf{e}_1}|\ln(c\,\mathbf{e}_1)|^{-1/2}\left(\frac{\nu_0^2}{2} - \varepsilon^{-2}\right) > 0 \quad (\text{se } \varepsilon > 0 \text{ è grande})
\end{aligned}$$

($|\ln(c\,\mathbf{e}_1)| \geq 1$ per la scelta di c). Dunque vale la (6.30) per ψ.

Caso $\alpha \in]1, 3[$ Notiamo che se $\alpha > 1$ non è più vero che $G_\alpha(\mathbf{e}_1) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, dunque è necessario cambiare la ξ (per $\alpha = 1$ avremmo pututo mantenere $\xi(s) = s$). Dato α in $]1, 3[$ poniamo $\beta := \dfrac{2}{1+\alpha}$ $\left(\dfrac{1}{2} < \beta < 1\right)$ e definiamo $\xi(s) := s^\beta$. È chiaro che ξ è continua su $[0, +\infty[$, $\xi(0) = 0$, ξ è infinitamente derivabile e $\xi > 0$ su $]0, +\infty[$. Ovviamente $\xi'(s) = \beta s^{\beta-1} = \beta s^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ e $\xi''(s) = \beta(\beta-1)s^{\beta-2} = \beta(\beta-1)s^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}}$ per ogni $s > 0$. Se ne deduce che $\xi \circ \mathbf{e}_1$ è $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, positiva in Ω e nulla su $\partial\Omega$. Vediamo che $\nabla\xi \circ \mathbf{e}_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\xi \circ \mathbf{e}_1|^2\,dx = \int_\Omega |\xi'(\mathbf{e}_1)|^2|\nabla\mathbf{e}_1|^2\,dx = \beta\int_\Omega \mathbf{e}_1^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}|\nabla\mathbf{e}_1|^2\,dx \leq \\
\beta\int_{\{\mathbf{e}_1(x)\geq\delta\}} \mathbf{e}_1^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}|\nabla\mathbf{e}_1|^2\,dx + \beta M\,\|\nabla\mathbf{e}_1\|_\infty \int_0^\delta s^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}
\end{aligned}$$

L'integrale su $\{\mathbf{e}_1 \geq \delta\}$ è chiaramente finito, il secondo lo è se e solo se:

$$2\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > -1 \Leftrightarrow 2 - 2\alpha > -1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha < 3$$

e dunque la tesi è vera. Vediamo che $G_\alpha(\xi \circ \mathbf{e}_1)$ è integrabile.

$$\int_\Omega G_\alpha(\xi \circ \mathbf{e}_1)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \mathbf{e}_1^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,dx \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\{\mathbf{e}_1(x)\geq\delta\}} \mathbf{e}_1^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,dx + \frac{M}{\nu_0}\int_0^\delta s^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,ds.\right)$$

La condizione di integrabilità è la stessa trovata sopra quindi anche questa tesi è dimostrata. Abbiamo provato le (6.29); vediamo le (6.30):

$$\begin{aligned}
&-\Delta(\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1)) - (\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1))^{-\alpha} = -\varepsilon\xi''(\mathbf{e}_1)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 - \varepsilon\xi'(\mathbf{e}_1)\Delta\mathbf{e}_1 - \varepsilon^{-\alpha}\xi(\mathbf{e}_1)^{-\alpha} = \\
&\qquad -\varepsilon\beta(\beta-1)\mathbf{e}_1^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}}|\nabla\mathbf{e}_1|^2 - \varepsilon\beta\mathbf{e}_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\mathbf{e}_1 - \varepsilon^{-\alpha}\mathbf{e}_1^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} = \\
&\qquad -\varepsilon^{-\alpha}\mathbf{e}_1^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}}\left\{1 - \varepsilon^{1+\alpha}\beta\left[\underbrace{(1-\beta)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 + e_1^2}_{h_4}\right]\right\} = \\
&\qquad\qquad \varepsilon\mathbf{e}_1^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}}\left\{\beta\left[\underbrace{(1-\beta)|\nabla\mathbf{e}_1|^2 + \mathbf{e}_2^2}_{h_4}\right] - \varepsilon^{-1-\alpha}\right\}
\end{aligned}$$

Si vede che la funzione h_4 è continua su $\bar{\Omega}$, da cui, per $\varepsilon > 0$ piccolo, si ha $1 - \varepsilon^{1+\alpha}\beta h_4 > 0$, da cui $-\Delta(\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1)) - (\varepsilon(\xi \circ \mathbf{e}_1))^{-\alpha} < 0$, cioe vale la (6.30) per φ. Inoltre

$$\inf_\Omega h_4 \geq \min\left\{\inf_{\{\mathbf{e}_1\leq\delta\}} h_4, \inf_{\{\mathbf{e}_1\geq\delta\}} h_4\right\} \geq \min\left\{(1-\beta)\nu_0^2, \delta^2\right\}. > 0$$

Ne segue che, per $\varepsilon > 0$ grande si ha $\beta h_4 - \varepsilon^{-1-\alpha} > 0$ e quindi vale la (6.30) per ψ. $\square$

Possiamo ora dimostare l'esistenza e l'unicità di una "soluzione classica" per (P_{sing}).

6.6.5 Teorema. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato con frontiera regolare. Sia* $0 < \alpha < 3$. *Allora esiste unica* $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *tale che:*

$$\begin{array}{lll} u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega),\ u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ u(x) = 0 \ \textit{se}\ x \in \partial\Omega & & \\ u(x) > 0 \qquad -\Delta u = u^{-\alpha} & & \textit{in}\ \Omega. \end{array}$$

Dimostrazione. Definiamo il funzionale $I_\alpha : \mathrm{L}^2(\Omega) \to]-\infty, \infty]$ ponendo:

$$I_\alpha(u) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + G_\alpha(u)\right) dx & \text{se } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ e } G_\alpha(u) \in \mathrm{L}^1(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che le funzioni φ e ψ trovate nel Lemma (6.6.4) sono nel dominio di I_α (dunque I_α è proprio) e sono rispettivamente una sotto e una sopra soluzione per $-\Delta - G'_\alpha$ (questo segue dalla Proposizione (6.5.11)).

Definiamo $I_{\alpha,\varphi,\psi} : \mathrm{L}^2(\Omega) \to]-\infty, \infty]$, ponendo:

$$I_{\alpha,\varphi,\psi}(u) := \begin{cases} I_\alpha(u) & \text{se } u \in \mathbb{K}^\psi_\varphi \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cioè $I_{\alpha,\varphi,\psi} := I_\alpha + \chi_{\mathbb{K}^\psi_\varphi}$, dove $\mathbb{K}^\psi_\varphi$ è stato definito in (6.5.14). Dato che $G_\alpha \geq 0$ vale la condizione $(G^-.p.\infty)$ per ogni $p \geq 1$, dunque per $p = 2$. Ne segue che I_α e (per motivi analoghi) $I_{\alpha,\varphi,\psi}$ sono semicontinui in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Per il Teorema (6.4.9) esiste unico $\bar{u}$ per I_α, e per la Proposizione (6.5.16) si ha che $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi$. Questa diseguaglianza implica che $\bar{u} > 0$ in Ω e $\|\bar{u}\|_\infty < +\infty$. Sempre per (6.4.9) abbiamo:

$$\begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ con } G_\alpha(\cdot, \mathbf{v}) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ si ha } u^{-\alpha}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) \in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ e} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})\, dx - \int_\Omega u^{-\alpha}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})\, dx \geq 0 \end{array}$$

Sia $w \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Se K è il supporto di w: $\delta := \inf_{x \in K} \varphi(x) > 0$, e se $0 < \varepsilon \|w\|_\infty < \delta/2$ si ha:

$$\inf_{x\in K} \bar{u}(x) + \varepsilon w(x) \geq \inf_{x \in K} \varphi(x) + \varepsilon w(x) \geq \delta/2 \Rightarrow \sup_{x\in K} G_\alpha(\bar{u} + \varepsilon w) < +\infty.$$

Dato che $G_\alpha(\bar{u} + \varepsilon w) = G_\alpha(\bar{u})$ fuori da K, possiamo concludere che, per $\varepsilon > 0$ piccolo, $v = \bar{u} \pm \varepsilon w$ sono test ammissibili nella disequazione sopra. Ne deriviamo:

$$\int_\Omega \nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla w\, dx - \int_\Omega u^{-\alpha} w\, dx = 0 \qquad \forall w \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Se Ω_1 è un aperto regolare con $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, usando i teoremi standard di regolarità (XXXXX) (possibile perché $\eta := \inf_{x\in\Omega_1} \bar{u}(x) > 0$ e $f(u) = u^{-\alpha}$ è $\mathcal{C}^\infty(]\eta/2 + \infty[)$), otteniamo che $\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$. Per l'arbitrarietà di Ω_1 si ha $\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Dato che $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi$ si ha anche $\bar{u} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. $\square$

Appendice A

Appendice

A.1 Alcune generalizzazioni del Teorema di Lagrange

A.1.1 Teorema (Lagrange generalizzato I)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e se per ogni $x \in]a, b[$ esistono $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è compreso tra $f'_-(\xi)$ e $f'_+(\xi)$.*

Dimostrazione. Poniamo $g(x) := f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ e $h(x) := f(x) - g(x)$. È chiaro che h è continua su $[a, b]$ e che $h(b) = h(a) = 0$. È altresì chiaro che $h'_-(x) = f'_-(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e $h'_+(x) = f'_+(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per ogni x in $]a, b[$. Dunque esistono $x', x'' \in [a, b]$ tali che $h(x') \leq h(x) \leq h(x'')$ per ogni $x \in [a, b]$. Se $x', x'' \in \{a, b)\}$ allora $h(x'') = h(x'') = 0$ e quindi $h \equiv 0$ da cui $h'(x) = 0$ per ogni x e la tesi vale per un qualunque ξ in $]a, b[$. Se $x' \in]a, b[$ si ha $h'_-(x') \leq 0 \leq h'_+(x')$: in questo caso scegliamo $\xi = x'$; se $x'' \in]a, b[$ si ha $h'_+(x'') \leq 0 \leq h'_-(x'')$: scegliamo allora $\xi = x''$. In ogni caso si verifica facilmente la tesi. □

A.1.2 Proposizione. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua che ammetta derivata destra $f'_+(x)$ (derivata sinistra $f'_-(x)$) in ogni x di $]a, b[$.*

(a) Se $f'_+ > 0$ ($f'_- > 0$) in $]a, b[$, allora f è strettamente crescente in $[a, b]$.

(b) f è debolmente crescente se e solo se $f'_+ \geq 0$ ($f'_- \geq 0$) in $]a, b[$.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che, a causa dell'ipotesi $f'_+ > 0$:

$$\forall x \in]a, b[\quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } x + \delta < b \text{ e } f(x') > f(x) \quad \forall x' \in]x, x + \delta[. \tag{A.1}$$

Dimostriamo (a) Sia $x_0 \in]a, b[$. Poniamo:

$$J_+(x_0) := \{x \in [x_0, b] : f(x') \geq f(x_0)\, \forall x' \in [x_0, x]\}\,.$$

L'insieme $J_+(x_0)$ non è vuoto dato che contiene x_0. Sia $\bar{x} := \sup J_+(x_0)$. Dico che $\bar{x} = b$. Se così non fosse avrei $a < x_0 \leq \bar{x} < b$ e per continuità $f(\bar{x}) \geq f(x_0)$ (cioè $\bar{x} \in J_+(x_0)$). Ma allora, applicando la (A.1) in $x = \bar{x}$ troverei un intorno destro di $\bar{x}$ tutto contenuto in $J_+(x_0)$, cosa che contrasta con la definizione di $\bar{x}$. Abbiamo dimostrato che per ogni x_0, x in $]a, b[$ con $x_0 \leq x$ si ha $f(x_0) \leq f(x)$. Per continuità lo stesso valse se $x_0, x \in [a, b]$. in altri termini f è debolmente crescente in $[a, b]$. Ma per la (A.1) la crescenza è stretta.

Dimostriamo (b) Se f è debolmente crescente è facile dimostrare che $f'_+(x) \geq 0$ in tutte le x di $]a, b[$. Viceversa supponiamo che $f'_+ \geq 0$ e consideriamo $g_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon x$, dove $\varepsilon > 0$ è fissato. È chiaro che $g'_+ > 0$ e dunque per il punto precedente g_ε è stettamente crescente. Facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ se ne deduce che f è debolmente crescente.

Il caso con la derivata sinistra è analogo (volendo si può applicare il caso visto sopra alla funzione $h(x) := -f(b+a-x)$). $\square$

A.1.3 Teorema (Lagrange generalizzato II)**.** *Supponiamo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che:*

- *per ogni $x \in]a,b[$ esiste la derivata destra $f'_+(x)$ (la derivata sinistra $f'_-(x)$);*
- *per ogni $x \in]a,b[$ esiste il limite sinistro di $f'_+(x)$ che indichiamo, mancando un po' di rigore, con $f'_+(x^-)$ (esiste il limite destro di $f'_-(x)$ che indichiamo con $f'_-(x^+)$.*

Allora esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ è compreso tra } f'_+(x^-) \text{ e } f'_+(x) \qquad \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ è compreso tra } f'_-(x) \text{ e } f'_-(x^+)\right)$$

Dimostrazione. Si considerano come al solito le funzioni $g(x) := f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ e $h(x) := f(x) - g(x)$ e si prendono i punti $x', x'' \in [a,b]$ tali che $h(x') \leq h(x) \leq h(x'')$ per ogni $x \in [a,b]$. Dato che $h(a) = h(b) = 0$ uno tra x' e x'' deve essere in $]a,b[$, a meno che h non sia costantemente nulla (nel qual caso la tesi è ovvia). Consideriamo il caso $x'' \in]a,b[$. Allora deve essere $h'_+(x'') \leq 0$ (per definizione di derivata destra) e dunque $f'_+(x'') \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se fosse $h'_+(x''^-) < 0$ esisterebbe $\delta > 0$ tale che $h'_+(x) < 0$ per tutte le $x \in [x''-\delta, x'']$. A causa della (A.1.2) h sarebbe strettamente decrescente su $[x''-\delta, x'']$ da cui $h(x''-\delta) > h(x'')$, contro il fatto che $h(x'')$ è il massimo di h. Dunque $h'_+(x''^-) \geq 0$ da cui $f'_+(x''^-) \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

A.2 Alcune proprietà delle funzioni di $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$

A.2.1 Lemma. *Se (u_n) è una successione in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tale che*

$$u_n \to u \text{ in } \mathrm{L}^2(\Omega) \quad , \quad \nabla u_n \to p \text{ in } \mathrm{L}^2(\Omega)^N$$

per $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ e $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$, allora $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $p = \nabla u$.

Questo è vero se, in particolare:

$$u_n \to u \text{ q.o} \quad , \quad \nabla u_n \to p \text{ q.o}$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad , \quad |\nabla u_n(x)| \leq g_1(x)$$

con g e g_1 in $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

A.2.2 Lemma. *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme trascurabile e sia $u \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$. Allora l'insieme:*

$$F(v,E) := \{x \in \Omega : v(x) \in E, \nabla u(x) \neq 0\}$$

è trascurabile (qualunque sia il rappresentante di u usato per definire $F(u,E)$).

A.2.3 Proposizione. *Sia* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione lipschitziana. Come ben noto l'insieme:*

$$E_H := \{s \in \mathbb{R} : H \text{ non è derivabile in } x\}$$

è trascurabile. Allora per ogni $u \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ *la funzione* $H \circ u$ *è in* $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ *e (usando la notazione del lemma* (A.2.2)*)*

$$\nabla(H \circ u)(x) = \begin{cases} H'(u(x))\nabla u(x) & \text{se } x \in F(u, E_H), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{A.2}$$

(dalla tesi del lemma il termine di destra non dipende dal rappresentante di u*).*

Se poi aggiungiamo che $H(0) = 0$ *allora* $H \circ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ *per ogni* u *in* $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$*.*

Dimostrazione di (A.2.2) *e di* (A.2.3)*.* Faremo la dimostrazione per passi successivi, ogni volta mediante opportune approssimazioni. In quanto segue fissiamo $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e il corrispondente $\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Consideriamo $u(x)$ e $\nabla u(x)$ definiti per ogni x in Ω (stiamo dunque prendendo dei rappresentanti per la funzione e per il suo gradiente). La dimostrazione è presa da Boccardo-Murat,

Passo uno Supponiamo H di classe $\mathcal{C}^1$ con derivata limitata. Sappiamo che esiste una successione (u_n) di funzioni $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tali che $u_n \to u$ in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ (e $\nabla u_n \to \nabla u$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$). (MS XXX) A meno di sottosucccessioni possiamo supporre che $u_n \to u$ e $\nabla u_n \to \nabla u$ quasi ovunque. Dato che:

$$|H \circ u_n| \le \sup_{s\in\mathbb{R}} |H'(s)|\, |u_n| \quad , \quad |(H' \circ u_n)\nabla u_n| \le \sup_{s\in\mathbb{R}} |H'(s)|\, |\nabla u_n|,$$

usando il Lemma (A.2.1) otteniamo $H \circ u_n \to H \circ u$ in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e $\nabla(H \circ u_n) \to (H' \circ u)\nabla u$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Se ne ricava $H \circ u \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e la formula (A.2) nel caso appunto di H di classe $\mathcal{C}^1$ con derivata limitata (in cui $F(u, E_H) = \emptyset$). Se $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, allora le u_n si trovano in $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$. Se anche $H(0) = 0$ si ha $H \circ u_n \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$ da cui $H \circ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

D'ora in avanti consideriamo $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (il caso $u \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ è praticamente identico)-

Passo due Siano $a, b, s_0 \in \mathbb{R}$ e consideriamo:

$$h := a\mathbb{1}_{]-\infty,s_0]} + b\mathbb{1}_{]s_0,+\infty[} \quad , \quad H(s) := \int_0^s h(\sigma)\, d\sigma.$$

Se $\varepsilon > 0$ possiamo "regolarizzare" h ed H ponendo:

$$h_\varepsilon(s) := \begin{cases} a & \text{se } s \le s_0, \\ a + \dfrac{s - s_0}{\varepsilon}(b - a) & \text{se } s_0 \le s \le s_0 + \varepsilon, \\ b & \text{se } s_0 + \varepsilon \le s \end{cases} \quad , \quad H_\varepsilon(s) := \int_0^s h_\varepsilon(\sigma)\, d\sigma.$$

Poniamo inoltre $v_\varepsilon := H_\varepsilon(u)$. Dato che H_ε è $\mathcal{C}^1$ con $|H'_\varepsilon| = |h_\varepsilon| \le M := \max |a|, |b|$, si ha che $v_\varepsilon \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\nabla v_\varepsilon = (h_\varepsilon \circ u)\nabla u$. Si vede facilmente che:

$$v_\varepsilon(x) \to H(u(x)) \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega \quad , \quad \nabla v_\varepsilon(x) \to h(u(x))\nabla u(x) \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega$$

e

$$\|v_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le M\, \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad , \quad \|\nabla v_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le M\, \|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} .$$

Per il Lemma (A.2.1) si ha $H \circ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\nabla(H \circ u) = (h \circ u)\nabla u$.

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento considerando:

$$\tilde{h} := a\mathbb{1}_{]-\infty,s_0[} + b\mathbb{1}_{[s_0,+\infty[}$$

notando che $\int\limits_0^s \tilde{h}(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_0^s h(\sigma)\,d\sigma = H(s)$ per ogni s. Analogamente definiamo:

$$\tilde{h}_\varepsilon(s) := \begin{cases} a & \text{se } s \le s_0 - \varepsilon, \\ b + \dfrac{s - s_0}{\varepsilon}(b-a) & \text{se } s_0 - \varepsilon \le s \le s_0, . \\ b & \text{se } s_0 \le s \end{cases} \quad , \quad \tilde{H}(s) := \int_0^s \tilde{h}_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma$$

e $\tilde{v}_\varepsilon := \tilde{H}_\varepsilon(u)$. Ragionando come sopra si vede che

$$\tilde{v}_\varepsilon \to H \circ u \text{ in } \mathrm{H}^1_0(\Omega) \quad , \quad \nabla\tilde{v}_\varepsilon \to (\tilde{h} \circ u)\nabla u \text{ in } \mathrm{L}^2(\Omega)$$

da cui $H \circ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (che sapevamo già) e $\nabla(H \circ u) = (\tilde{h} \circ u)\nabla u$. Questo ci dice che, fissati un qualunque rappresentante di u e un qualunque rappresentante di ∇u si ha:

$$h(u(x))\nabla u(x) = \tilde{h}(u(x)\nabla u(x) \text{ per quasi ogni } x \in \Omega.$$

Ne segue che:

$$\nabla u(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in \Omega \text{ tale che } u(x) = s_0.$$

Ragionando in modo analogo si dimostra che, se $I_1, \dots, I_k$ sono intervalli limitati disgiunti in $\mathbb{R}$ (non importa se aperti, chiusi o semiaperti) di estremi $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_k$, se $h := \sum\limits_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{I_i}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ in $\mathbb{R}$, posto $H(s) := \int\limits_0^s h(\sigma)\,d\sigma$, $H \circ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e

$$\nabla u = 0 \text{ q.o. su } \bigcup_{i=1}^k \{u(x) = a_i\} \cup \{u(x) = b_i\} \quad , \quad \nabla(H \circ u) = (h \circ u)\nabla u$$

dove la formula di destra si intende che $(h \circ u)\nabla u = 0$ dove $\nabla u = 0$ indipendentemente dal fatto che $h \circ u$ sia univocamente definita.

Consideriamo ora una successione $(]a_n, b_n[)$ di intervalli disgiunti e poniamo $A := \bigcup\limits_{n=1}^\infty]a_n, b_n[$. Se $k \in \mathbb{N}$ poniamo:

$$h := \mathbb{1}_A \quad , \quad h_k := \sum_{n=1}^k \mathbb{1}_{]a_n, b_n[} \quad , \quad H_k(s) := \int_0^s h_k(\sigma), d\sigma \quad , \quad H(s) := \int_0^s h(\sigma), d\sigma.$$

Poniamo inoltre $v_k := H_h \circ u$. Per quanto visto sopra $v_k \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\nabla v_k = (h_k \circ u)\nabla u$. Ragionando come sopra vediamo che: $v_k \to v =: H \circ u$, $\nabla v_k \to (h \circ u)\nabla u$ puntualmente e inoltre (essendo $0 \le h_k \le 1$):

$$|v_k| \le |u| \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad , \quad |(h_k \circ u)\nabla u| \le |\nabla u| \in \mathrm{L}^2(\Omega),$$

dunque $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ e $\nabla v = \mathbb{1}_A \nabla u$.

Passo tre Dimostriamo il Lemma (A.2.2). Sia $E \subset \mathbb{R}$ trascurabile. Dato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un aperto A_ε tale che

$$E \subset A_\varepsilon \quad , \quad \text{meas}(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ovviamente possiamo anche supporre che $A_\varepsilon \subset A\varepsilon'$ per $\varepsilon < \varepsilon'$. In questo modo è chiaro che, per $\varepsilon \to 0^+$:

$$\mathbb{1}_{A_\varepsilon}(x) \to 0 \quad \forall x \text{ con } x \notin E.$$

Dunque $\mathbb{1}_{A_\varepsilon} \to 0$ quasi ovunque. Se poniamo allora $H_\varepsilon(s) := \int_0^s \mathbb{1}_{A_\varepsilon}(\sigma)\, d\sigma$ e $v_\varepsilon := H_\varepsilon(u)$ allora per il punto precedente (dato che ogni A_ε si scrive come unione finita o numerabile di intervalli disgiunti) abbiamo $v_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $\nabla v_\varepsilon = \mathbb{1}_{a_\varepsilon} \nabla u$. Ma ripetendo i ragionamenti usati sopra otteniamo:

$$v_\varepsilon \to 0 \text{ in } \mathrm{H}_0^1(\Omega) \quad , \quad \nabla v_\varepsilon \to \mathbb{1}_E \nabla u.$$

Se ne deduce $\mathbb{1}_E \nabla u = 0$, cioè la tesi di (A.2.2).

Passo quattro Vediamo il caso generale. Sia $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana. Sappiamo che H è derivabile quasi ovunque dunque esistono $h \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ e un insieme trascurabile E_1 tali che:

$$H'(x) = h(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus E_1$$

(consideriamo comunque $h(x)$ definita per ogni x). Poniamo:

$$H_\varepsilon := \eta_\varepsilon * H \quad , \quad h_\varepsilon := \eta_\varepsilon * h$$

dove η_ε sono dei mollificatori. Allora $H_\varepsilon(x) \to H(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}$ e $h_\varepsilon(x) \to h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus E_2$, dove E_2 è un altro sottoinsieme trascurabile di $\mathbb{R}$. Poniamo $E := E_1 \cup E_2$. Per il punto precedente sappiamo che $\nabla u = 0$ quasi ovunque sull'insieme $\{x \in \Omega : u(x) \in E\}$. Dunque $H_\varepsilon \circ u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ e

$$\nabla(H_\varepsilon \circ u) = (h_\varepsilon \circ u)\nabla u \to (h \circ u)\nabla u \qquad \text{quasi ovunque in } \Omega$$

□

A.2.4 Osservazione. Da (A.2.3) si deduce che, se $u, v \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ ($\mathrm{H}_0^1(\Omega)$), allora u^+, u^-, $u \vee v = u + (v-u)^+$ e $u \wedge v = u - (u-v)^+$ sono in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ ($\mathrm{H}_0^1(\Omega)$). Inoltre:

$$\nabla u^+ = \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}} \nabla u \quad , \quad \nabla u^- = -\mathbb{1}_{\{u \leq 0\}} \nabla u$$
$$\nabla u \vee v = \mathbb{1}_{\{v \geq u\}} \nabla v + \mathbb{1}_{\{v < u\}} \nabla u \quad , \quad \nabla u \wedge v = \mathbb{1}_{\{v \geq u\}} \nabla u + \mathbb{1}_{\{v < u\}} \nabla v.$$

A.2.5 Osservazione. Se $u \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e u ha supporto compatto, allora $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Per vederlo basta notare che $\eta_\varepsilon * u$ è a supporto compatto per ε_0 piccolo (η_ε sono dei mollificatori) e tende a u in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ per $\varepsilon \to 0$.

A.2.6 Proposizione. *Sia $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ con $u|_{\partial\Omega} = 0$. Allora $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $u(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $u_n := (u - 1/n)^+$ è ancora in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ ed è a supporto compatto, dunque $u_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Inoltre $\nabla u_n = \mathbb{1}_{\{u \geq 1/n\}} \nabla u$. Se ne ricava facilmente che $u_n \to u$ in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e dunque $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Consideriamo ora il caso $u \geq 0$. Ricordiamo che la funzione $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $d(x) := \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ è 1-lipschitziana e dunque è in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$. Se $n \in \mathbb{N}$ definiamo $u_n(x) := u(x) + d(x)/n$. Le u_n sono in $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$ e sono positive in Ω. Per quanto visto sopra $u_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Dato che $u_n \to u$ si ha $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Il caso generale si ottiene scrivendo $u = u^+ - u^-$. □

A.2.7 Proposizione. *Sia $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ con $v \geq 0$. Allora esiste una successione (v_n) in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con $v_n \geq 0$ tale che $v_n \to v$ in $\mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per la definizione di $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ si sa che esiste una successione $\tilde{v}_n$ in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ che converge a v in $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Allora $\tilde{v}_n^+$ è in $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, ha supporto compatto e converge ancora a v. Usando un opportuno mollificatore otteniamo una v_n che è di nuovo $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, che converge a v e che in più è non negativa. □

A.2.8 Proposizione. *Sia $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ con $v \geq 0$. Allora esiste una successione (w_n) con $0 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq v$, w_n a supporto compatto in Ω e $w_n \to v$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. Partiamo dalla (v_n) della Proposizione (A.2.7). Allora $v_n \wedge v$ è in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, ha supporto compatto e si ha $v_n \wedge v \to v$. Costruiamo ricorsivamente la (w_n) in modo che

$$w_n \text{ ha supporto compatto} \qquad 0 \leq w_n \leq w_{n+1} \leq v \quad , \quad \|w_n - v\| < \frac{1}{n}$$

Come passo iniziale definiamo $w_1 := v_k \wedge v$ per k in $\mathbb{N}$ tale che $\|v - v_k \wedge v\| < 1$. Supponiamo poi di avere costruito $w_1, \ldots, w_n$. Sappiamo che $w_n \vee v_k \wedge v \to v$ per $k \to \infty$. Possiamo dunque trovare k per cui $\|w_n \vee v_k \wedge v - v\| < \frac{1}{n+1}$ e porre $w_{n+1} := w_n \vee v_k \wedge v$. □

A.2.9 Proposizione. *Sia $v \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ con $v(x) \leq 0$ ($v(x) \geq 0$) per ogni x in $\partial\Omega$. Allora $v^+ \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ ($v^- \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$).*

A.2.10 Proposizione. *Se $v \in \mathrm{H}^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \leq v \leq u_2$ con $u_1, u_1 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, allora $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.*

A.3 Funzioni assolutamente continue

Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico.

A.3.1 Definizione. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{X}$. Diciamo che f è *assolutamente continua in I* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di sottointervalli disgiunti

$$I_1, \cdots, I_k, \quad I_j = [a_j, b_j] \subset I, \qquad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{k} |I_j| < \delta$$

si ha:

$$\sum_{j=1}^{k} \|f(b_j) - f(a_j)\| < \varepsilon.$$

Bibliografia

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 2010.

[2] Ivar Ekeland and Roger Téman. *Convex Analysis and Variational Problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.

[3] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[4] Aquistapace Paolo. Appunti di analisi convessa, 2017.

[5] R. T. Rockafellar. Integrals which are convex functionals. *Pacific J. Math.*, 24(3):525–539, 1968.

[6] R. T. Rockafellar. Integrals which are convex functionals ii. *Pacific J. Math.*, 39(2):439 – 469, 1971.

[7] Guido Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre á coefficients discontinus". *Ann. Inst. Fourier*, 15(1):189–258, 1965.