

Appunti per il corso di Analisi Matematica 2 e Complementi

Claudio Saccon

1 luglio 2023

Indice

1	Limite e continuità in spazi vettoriali normati	7
1.1	Spazi vettoriali, applicazioni lineari e forme quadratiche	7
1.2	Spazi normati	18
1.3	Limite e continuità in spazi normati	22
1.4	Norme equivalenti	27
1.5	Funzioni continue	29
1.6	Continuità delle funzioni lineari	34
1.7	Completezza	36
2	Curve e integrali curvilinei	41
2.1	Curve	41
2.2	Integrali curvilinei di prima specie	44
2.3	Lunghezza geometrica di una curva	47
2.4	Integrali curvilinei di seconda specie	51
2.5	Un altro approccio: curve come sottoinsiemi	52
3	Calcolo differenziale	59
3.1	Derivate parziali e differenziale	59
3.2	Derivate seconde e successive	68
3.3	Formula di Taylor	74
3.4	Massimi e minimi liberi	76
3.5	Differenziabilità dell'inversa e funzioni implicite	78
3.6	Massimi e minimi vincolati	82
3.7	Domini regolari	88
4	Calcolo integrale	93
4.1	Misura degli insiemi e integrazione	93
4.2	Integrali iterati	104
4.3	Cambio di variabile negli integrali multipli	106
4.4	Passaggio al limite sotto il segno di integrale	109
5	Successioni e serie di funzioni	113
5.1	Convergenza puntuale e uniforme	113
5.2	Serie di funzioni	120
5.3	Serie di potenze	124
5.4	Serie trigonometriche e serie di Fourier	130
5.5	Alcuni esempi	136
5.6	Serie di Fourier per funzioni a energia finita	143
5.7	Serie di Fourier in soli seni	146
5.8	Equazione del calore su un interallo	149

6	Campi vettoriali	155
6.1	Campi conservativi	155
6.2	Campi irrotazionali	157
7	Superfici	163
7.1	Superfici parametriche	163
7.2	Superfici parametriche orientate	172
7.3	Integrali di superficie	176
7.4	Nozione generale di superficie	177
7.5	Il teorema della divergenza	182
8	Sistemi di equazioni differenziali ordinarie	185
8.1	Il teorema di esistenza e unicità di Cauchy	185
8.2	L'esponenziale di una matrice	187
8.3	La decomposizione di Jordan	189
8.4	Errata Corrige	193

Capitolo 1

Limite e continuità in spazi vettoriali normati

1.1 Spazi vettoriali, applicazioni lineari e forme quadratiche

1.1.1 Definizione (Spazi vettoriali). Dico che un insieme \mathcal{X} è uno spazio vettoriale (su \mathbb{R}) se sono definite un'operazione di *somma* $s: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e un'operazione di *prodotto per gli scalari* $p: \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, per cui useremo le notazioni:

$$x + y := s(x, y), \quad \lambda x := p(\lambda, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

che hanno le seguenti proprietà:

commutatività della somma $x + y = y + x$ per ogni x, y in \mathcal{X} ;

associatività della somma $(x + y) + z = x + (y + z)$ per ogni x, y, z in \mathcal{X} ;

esistenza dell'elemento neutro esiste $\mathbf{0} \in \mathcal{X}$ tale che $x + \mathbf{0} = x$ per ogni x in \mathcal{X} ;

esistenza dell'opposto per ogni x in \mathcal{X} esiste $-x$ in \mathcal{X} tale che $x + (-x) = \mathbf{0}$;

distributività della somma rispetto al prodotto

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \text{ per ogni } x, y \text{ in } \mathcal{X} \text{ e } \lambda \text{ in } \mathbb{R}.$$

In quest'ambito gli elementi x di \mathcal{X} si chiamano *vettori* e i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ si dicono *scalari*.

1.1.2 Definizione. Se \mathcal{X} è uno spazio vettoriale e $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ diremo che \mathcal{X}' è un sottospazio (vettoriale) di \mathcal{X} quando $x_1, x_2 \in \mathcal{X}'$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ implica $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{X}'$.

1.1.3 Esempio. Lo spazio \mathbb{R}^N è uno spazio vettoriale se

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N), \quad \lambda \mathbf{x} := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nel resto del paragrafo \mathcal{X} sarà uno spazio vettoriale.

1.1.4 Definizione (combinazioni lineari). Dati x_1, \dots, x_k in \mathcal{X} si chiama *combinazione lineare di x_1, \dots, x_k* un'espressione del tipo:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i.$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono in \mathbb{R} . Dico che un vettore x è combinazione lineare di x_1, \dots, x_k se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$.

Si dice che x_1, \dots, x_k sono linearmente indipendenti se l'**unica** combinazione lineare di x_1, \dots, x_k che produce lo zero è quella con tutti i λ_i nulli:

$$\mathbf{0} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

1.1.5 Definizione. Se \mathcal{X} è uno spazio vettoriale definiamo la *dimensione* di \mathcal{X} :

$$\dim(\mathcal{X}) := \sup \{k \in \mathbb{N} : \text{esistono } k \text{ elementi di } \mathcal{X} \text{ linearmente indipendenti}\}.$$

Dato che si prende un sup tra numeri interi è chiaro che o $\dim(\mathcal{X}) = \infty$ oppure $\dim(\mathcal{X}) \in \mathbb{N}$ e in questo caso è un massimo: se $N = \dim(\mathcal{X}) \in \mathbb{N}$ ci sono N vettori linearmente indipendenti e non ce ne sono $N + 1$. Notiamo che $\dim(\mathcal{X}) = 0$ se e solo se $\mathcal{X} = \{\mathbf{0}\}$.

Si può vedere che esistono spazi vettoriali \mathcal{X} di dimensione infinita. Se $\dim(\mathcal{X}) = N \in \mathbb{N}$ chiamiamo *base* per \mathcal{X} un qualunque insieme $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ con $e_i \in \mathcal{X}$ ed e_i linearmente indipendenti ($i = 1, \dots, N$).

1.1.6 Proposizione. Sia $N \in \mathbb{N}$ siano $e_1, \dots, e_N \in \mathcal{X}$. Allora $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ è una base se e solo se:

- e_1, \dots, e_N sono linearmente indipendenti;
- e_1, \dots, e_N “generano \mathcal{X} ”, cioè per ogni $x \in \mathcal{X}$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tali che $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N$ (x si può scrivere come combinazione lineare degli e_1, \dots, e_N).

Se questo avviene, allora $\dim(\mathcal{X}) = N$ – in particolare tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi, pari alla dimensione di \mathcal{X} .

1.1.7 Definizione (coordinate). Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ una base per \mathcal{X} . Per quanto sopra dato x in \mathcal{X} si ha $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N$ per opportuni coefficienti λ_i . È facile vedere che i λ_i sono **unici**: chiameremo $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ le *coordinate* di x rispetto alla base \mathcal{B} e le indicheremo con $[x]_{\mathcal{B}}$ (che dunque è un elemento di \mathbb{R}^N).

Notiamo che l'applicazione $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ è bigettiva da \mathcal{X} in \mathbb{R}^N (ed è lineare). Quindi ogni spazio di dimensione N si può “rappresentare” mediante \mathbb{R}^N .

1.1.8 Esempio. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ha dimensione N . Una base per \mathbb{R}^N è costituito dai vettori $\hat{e}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,N})$ con $e_{i,j} = 0$ per $i \neq j$ e $e_{i,i} = 1$. Per vedere che $\hat{\mathcal{B}} := \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N\}$ è una base (la *base canonica*) in \mathbb{R}^N basta notare che:

- gli \hat{e}_i sono linearmente indipendenti: se $\mathbf{0} = \lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N$ allora $\lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N$ ha tutte le componenti nulle; ma la componente j -esima di $\lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N$ è esattamente λ_j , dunque $\lambda_j = 0$ per ogni $j = 1, \dots, N$;
- gli \hat{e}_i generano \mathbb{R}^N : se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ allora $\mathbf{x} = x_1 \hat{e}_1 + \dots + x_N \hat{e}_N$.

Dunque, rispetto alla base canonica, le coordinate di x sono le componenti di x .

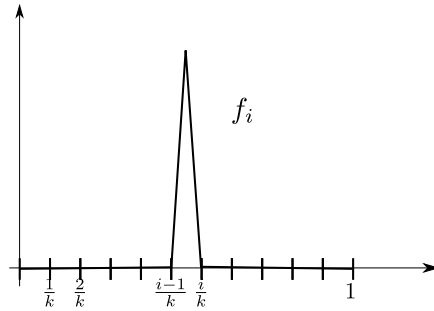
1.1.9 Esempio. Consideriamo

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}^0(0, 1) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ continua}\}$$

(le funzioni continue su $[0, 1]$). È immediato verificare che \mathcal{X} è uno spazio vettoriale (con $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$).

Questo spazio non ha dimensione finita. In effetti preso comunque un k intero esistono $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{X}$ tra loro linearmente indipendenti. Siano infatti f_i tali che:

$$f_i(x) = 0 \text{ fuori da } \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right], \quad f_i(x_i) = 1 \text{ se } x_i \text{ è il punto medio di } \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right].$$



Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e se $f(x) := \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x)$ è la funzione nulla, allora:

$$0 = f(x_i) = \lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_i f_i(x_i) + \dots + \lambda_k f_k(x_i) = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_i 1 + \dots + \lambda_k 0 = \lambda_i$$

e quindi $\lambda_i = 0 \forall i$. Abbiamo dimostrato che f_1, \dots, f_k sono linearmente indipendenti.

1.1.10 Definizione. Sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ un'applicazione tra due spazi vettoriali \mathcal{X} e \mathcal{X}' . Si dice che L è lineare se

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda Lx + \mu Ly \quad \forall x, y \in \mathcal{X}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Indicheremo con $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ l'insieme delle applicazioni lineari da \mathcal{X} in \mathcal{X}' . È immediato verificare che $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ è uno spazio vettoriale.

1.1.11 Notazione. D'ora in poi conviene pensare che i vettori di \mathbb{R}^N siano delle colonne:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{con } x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}.$$

1.1.12 Proposizione (rappresentazione delle applicazioni lineari). *Siano \mathcal{X} e \mathcal{X}' spazi vettoriali e sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ un'applicazione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ una base per \mathcal{X} e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_M\}$ una base per \mathcal{X}' . Consideriamo la matrice avente come colonne i vettori $[L\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}'}, \dots, [L\mathbf{e}_N]_{\mathcal{B}'}$:*

$$[A]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} := [[L\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}'}, \dots, [L\mathbf{e}_N]_{\mathcal{B}'}]$$

Allora

$$[Lx]_{\mathcal{B}'} = [A]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (1.1)$$

dove $[A]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ opera su $[x]_{\mathcal{B}}$ mediante il ben noto prodotto righe per colonne.

Dimostrazione. Notiamo che per definizione di $[A]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (a_{ij})$ si ha $L\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{e}'_1 + \dots + a_{Nj}\mathbf{e}'_M$. Sia ora $x \in \mathcal{X}$ e siano x_1, \dots, x_N le coordinate di x in \mathcal{B} , cioè sia $x = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_N\mathbf{e}_N$. Allora:

$$Lx = L \left(\sum_{j=1}^N x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^N x_j L\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^N x_j \sum_{i=1}^M a_{i,j} \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) \mathbf{e}'_i.$$

Questo significa che i numeri $\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j$ sono le coordinate di Lx nella base \mathcal{B}' . Ma questi numeri sono proprio le componenti del prodotto $[A]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}$. \square

1.1.13 Proposizione (linearità della rappresentazione). *Siano \mathcal{B} una base per \mathcal{X} e \mathcal{B}' una base per \mathcal{X}' . Se $L_1, L_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_2$ sono lineari e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora:*

$$[\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \lambda_1 [L_1]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} + \lambda_2 [L_2]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Il seguente enunciato ci dice che la rappresentazione della composizione di due applicazioni lineari corrisponde al prodotto tra le matrici rappresentanti.

1.1.14 Proposizione. *Supponiamo che $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ e \mathcal{X}'' siano tre spazi vettoriali e che $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ e \mathcal{B}'' sia delle basi per tali spazi. Siano $L_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ e $L_2 : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}''$ due applicazioni lineari. Allora:*

$$[L_2 \circ L_1]_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}} = [L_2]_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'} [L_1]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \quad (1.2)$$

1.1.15 Osservazione. Se consideriamo $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ e $L = Id$ (la funzione identica) allora la formula (1.1) esprime il cambio di coordinate dalla base \mathcal{B} base \mathcal{B}' . Dunque posto

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) := ([e_1]_{\mathcal{B}'}, \dots, [e_N]_{\mathcal{B}'})$$

si ha:

$$[x]_{\mathcal{B}'} = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) [x]_{\mathcal{B}} \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Dalla (1.2) è immediato dedurre che:

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B})^{-1} = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

1.1.16 Notazione. Indicheremo con $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ i vettori:

$$\hat{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{e}_N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremo che $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}}_N := \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ è la *base canonica* di \mathbb{R}^N .

1.1.17 Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base per \mathbb{R}^N . Da quanto detto segue che:

$$M(\hat{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} v_1, v_2, \dots, v_N \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{B}, \hat{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} v_1, v_2, \dots, v_N \end{pmatrix}^{-1}$$

1.1.18 Osservazione. Supponiamo che A sia una matrice $M \times N$. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ che ad ogni $x \in \mathbb{R}^N$ associa $Ax \in \mathbb{R}^M$. È evidente (per costruzione) che la rappresentazione di L_A coincide con A se si considerano le basi canoniche in partenza e in arrivo:

$$[L_A]_{\hat{\mathcal{B}}_M, \hat{\mathcal{B}}_N} = A.$$

Se consideriamo una base diversa $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ su \mathbb{R}^N e un'altra $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_M\}$ su \mathbb{R}^M , allora L_A si rappresenterà con un'altra matrice A_1 . È facile vedere che:

$$A_1 = M(\mathcal{B}', \hat{\mathcal{B}}_M) A M(\hat{\mathcal{B}}_N, \mathcal{B}) = M(\hat{\mathcal{B}}_M, \mathcal{B}')^{-1} A M(\hat{\mathcal{B}}_N, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} e'_1, e'_2, \dots, e'_M \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} e_1, e_2, \dots, e_N \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

1.1.19 Definizione. Dico che un'applicazione $b : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ è *bilineare* se b è lineare rispetto ad ognuno dei suoi due argomenti:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y), \quad b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2).$$

Un'applicazione bilineare b si dice *simmetrica* se $b(x, y) = b(y, x)$ per ogni x, y in \mathcal{X} .

Data un'applicazione $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dico che Φ è una forma quadratica se esiste un'applicazione b tale che $\Phi(x) = b(x, x)$. È ovvio che (ai fini di definire Φ) posso sempre supporre b simmetrica (se no rimpiazzo b con $\tilde{b}(x, y) := (b(x, y) + b(y, x))/2$ notando che in questo modo la forma quadratica associata rimane la stessa).

1.1.20 Definizione. Data un'applicazione bilineare b dico che b è *semidefinita positiva* su \mathbb{X} se $b(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{X}$; dico che è *definita positiva* se $b(x, x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ con $x \neq 0$. Analogamente definisco b *semidefinita negativa* e *definita negativa*. In realtà queste sono proprietà dalla forma quadratica associata a b e quindi useremo la stessa terminologia parlando di Φ .

1.1.21 Definizione (prodotto scalare). Chiameremo *prodotto scalare* su \mathbb{X} un'applicazione bilineare simmetrica b tale che $b(x, x) \geq 0$ e vale zero se e solo se $x = 0$. Quando esiste un prodotto scalare useremo la notazione $x \cdot y$ in luogo di $b(x, y)$ – riassumendo, il prodotto scalare (se esiste):

- è bilineare nei suoi argomenti:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \cdot y = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y), \quad x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(x, y_1) + \lambda_2(x, y_2);$$

- è simmetrico : $x \cdot y = y \cdot x$;
- è strettamente positivo: $x \cdot x \geq 0$ e $x \cdot x = 0$ solo se $x = 0$.

Dato un prodotto scalare chiameremo *norma* associata al prodotto scalare l'espressione $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$, definita per ogni x in \mathbb{X} .

Diremo che due vettori x e y sono *ortogonali* se $x \cdot y = 0$; diremo anche che un insieme di vettori \mathcal{V} è *ortonormale* se per ogni x in \mathcal{V} si ha $\|x\| = 1$ e per ogni coppia di vettori distinti $x, y \in \mathcal{V}$ si ha $x \cdot y = 0$.

1.1.22 Esempio. Nello spazio \mathbb{R}^N si può introdurre il prodotto scalare (canonico):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N.$$

Non è difficile verificare che tutte le proprietà richieste sono verificate e che in questo caso:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}.$$

1.1.23 Teorema (disuguaglianza di Schwartz). *Se $(x, y) \mapsto x \cdot y$ è un prodotto scalare, allora:*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Inoltre vale l'eguaglianza se e solo se x e y giacciono su una retta. In questo caso x e y sono concordi se $x \cdot y = \|x\| \|y\|$, mentre sono discordi se $x \cdot y = -\|x\| \|y\|$.

Dimostrazione. Fissiamo x e y in \mathbb{X} . Se $y = 0$ la tesi è ovvia, quindi supponiamo che $y \neq 0$. Consideriamo la funzione:

$$t \mapsto \varphi(t) := \|x - ty\|^2 = (x - ty) \cdot (x - ty)$$

definita al variare di t in \mathbb{R} . Per la seconda proprietà del prodotto scalare $\varphi(t) \geq 0$ per ogni t . D'altra parte, usando la bilinearità e la simmetria si trova:

$$\varphi(t) = t^2 \|y\|^2 - 2t(x \cdot y) + \|x\|^2$$

dunque $\varphi(t)$ è un polinomio di secondo grado in t che è sempre maggiore o eguale a zero. Questo equivale a dire che il discriminante deve essere minore o eguale a zero:

$$(x \cdot y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

che corrisponde alla tesi da dimostrare. Nel caso in cui valga l'eguaglianza $|x \cdot y| = \|x\| \|y\|$ il discriminante sopra fa zero e allora φ ha una radice ("due radici coincidenti") nel punto

$t_0 := \frac{x \cdot y}{y \cdot y} = \pm \frac{\|x\|}{\|y\|}$. Usando la definizione di φ si ha $\|x - t_0 y\|^2 = 0$ da cui, per la stretta positività del prodotto scalare, $x = t_0 y$, cioè x e y sono collineari. Per come è definito t_0 , i due vettori sono concordi quando $x \cdot y = \|x\| \|y\|$ e discordi se $x \cdot y = -\|x\| \|y\|$. \square

1.1.24 Proposizione (proprietà della norma). *Se in \mathbb{X} c'è un prodotto scalare $(x, y) \mapsto x \cdot y$ e se $\|\cdot\|$ indica la norma associata, allora:*

- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|tx\| = |t|\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Le prime due proprietà sono semplici conseguenze della definizione e delle proprietà del prodotto scalare. Per la terza notiamo che, trattandosi di quantità positive, essa equivale a:

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

Ma per la definizione della norma in termini del prodotto scalare abbiamo

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2.$$

Mettendo tutto insieme e semplificando la tesi segue dalla disuguaglianza di Schwartz. \square

1.1.25 Osservazione. La disuguaglianza di Schwartz permette di definire l'angolo θ tra due vettori. Dati infatti x e y non nulli in \mathbb{X} si ha

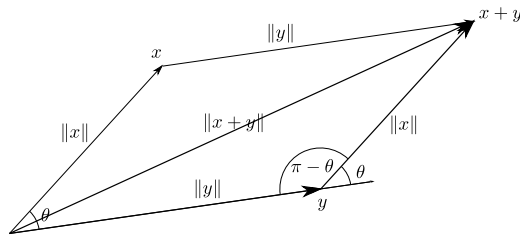
$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

e dunque esiste θ tra 0 e π tale che $\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$. Nel caso di \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 si può vedere facilmente che l'angolo θ così definito è lo stesso introdotto per via geometrica (avendo stabilito la tradizionale corrispondenza tra $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ e il piano/lo spazio geometrico).

1.1.26 Osservazione. Vediamo cosa ci dice la formula:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2$$

che abbiamo già incontrato come immediata conseguenza delle proprietà formali del prodotto scalare e della norma. Si tratta del *Teorema di Carnot* che nel caso di x e y tra loro ortogonali si riduce al *Teorema di Pitagora* (vedi figura).



Per il resto del paragrafo supponiamo che in \mathbb{X} ci sia un prodotto scalare $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

1.1.27 Osservazione. Se x_1, \dots, x_k sono mutuamente ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

1.1.28 Proposizione. *Supponiamo che \mathbb{X} abbia una base. Allora \mathbb{X} ha una base ortonormale.*

1.1.29 Proposizione. *Supponiamo che $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ sia una base ortonormale. Allora per ogni $x \in \mathbb{X}$ le coordinate di x rispetto a \mathcal{B} sono i numeri*

$$x_i := x \cdot e_i \quad i = 1, \dots, k.$$

Dimostrazione. Supponiamo che

$$x = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{e}_i.$$

Prendiamo j tra 1 e k e moltiplichiamo (scalarmente) la relazione sopra per \mathbf{e}_j :

$$x \cdot \mathbf{e}_j = \left(\sum_{i=1}^k x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^k x_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = x_j.$$

perché $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ quando $i \neq j$ mentre $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = 1$. □

1.1.30 Osservazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale in \mathcal{X} (di dimensione N) allora

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^N [x]_{\mathcal{B},i} [y]_{\mathcal{B},i} = [x]_{\mathcal{B}}^T [y]_{\mathcal{B}}.$$

In altri termini il prodotto scalare in \mathcal{X} si trasforma nel prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^N . Per vederlo basta usare la Proposizione (1.1.36): è chiaro che in questo caso $a_{i,j} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{i,i} = 1$), cioè $A = I$ e la tesi segue.

1.1.31 Definizione. Dato un sottospazio $V \subset \mathcal{X}$ definiamo *l'ortogonale di V* :

$$V^\perp := \{x \in \mathcal{X} : x \cdot v = 0 \ \forall v \in V\}.$$

V^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathcal{X} tale che $\mathcal{X} = V \oplus V^\perp$. Ne segue facilmente che $(V^\perp)^\perp = V$.

1.1.32 Teorema. Sia \mathcal{X} di dimensione finita e sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare. Allora esiste un vettore $v \in \mathcal{X}$ tale che

$$Lx = x \cdot v \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Inoltre l'applicazione $L \mapsto v$ è lineare (e dipende dal prodotto scalare).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ una base ortonormale per \mathcal{X} . Data $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ lineare definiamo:

$$v := (L\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (L\mathbf{e}_N)\mathbf{e}_N = \sum_{i=1}^N (L\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i.$$

Dato un generico $x \in \mathcal{X}$ consideriamo le sue coordinate x_1, \dots, x_N rispetto a \mathcal{B} . Allora:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{e}_i \Rightarrow x \cdot v = \sum_{i,j=1}^N x_i (L\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^N x_i (L\mathbf{e}_i) = L \left(\sum_{i=1}^N x_i \mathbf{e}_i \right) = Lx$$

□

1.1.33 Definizione. Sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un'applicazione lineare. Diciamo che L è *simmetrica* se

$$Lx \cdot y = x \cdot Ly \quad (= Ly \cdot x) \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

1.1.34 Osservazione. È facile vedere che se \mathcal{B} è una base ortonormale per \mathcal{X} , $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ è lineare e A è la matrice $N \times N$ che rappresenta L ($A = A_{L, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$), allora:

$$L \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow A = A^T \quad (A \text{ è simmetrica}).$$

1.1.35 Teorema. *Sia \mathcal{X} di dimensione finita e sia $b : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare. Allora esiste un'applicazione lineare $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tale che:*

$$b(x, y) = (Ly) \cdot x \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Inoltre L è simmetrica se e solo se b è simmetrica (N.B. L dipende dal prodotto scalare).

Dimostrazione. Fissato x in \mathcal{X} l'applicazione $y \mapsto b(x, y)$ è lineare da \mathcal{X} in \mathbb{R} . Dunque per il Teorema (1.1.32) esiste $v \in \mathcal{X}$ tale che:

$$b(x, y) = y \cdot v \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Se v' è un altro vettore che verifica la proprietà sopra si ha:

$$y \cdot (v - v') = y \cdot v - y \cdot v' = b(x, y) - b(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

Prendendo $y = v - v'$ se ne deduce $\|v - v'\|^2 = 0$ da cui $v = v'$: dunque dato x c'è un unico $v = v(x)$ con la proprietà sopra. Prendiamo ora $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Poniamo $v := \lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2)$. Si ha, per ogni y in \mathcal{X} :

$$\begin{aligned} v \cdot y &= (\lambda_1 v(x_1) + \lambda_2 v(x_2)) \cdot y = \\ &= \lambda_1 v(x_1) \cdot y + \lambda_2 v(x_2) \cdot y = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y) = b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) \end{aligned}$$

da cui $v = v(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, in altri termini $x \mapsto v(x)$ è un'applicazione lineare, cioè la tesi. \square

1.1.36 Proposizione. *Sia \mathcal{X} di dimensione N , sia $b : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare e sia L l'applicazione lineare che rappresenta b come dal Teorema (1.1.35). Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$ una base ortonormale di \mathcal{X} e sia A la matrice $N \times N$ che rappresenta L rispetto alla base \mathcal{B} (in partenza e in arrivo).*

Allora:

$$b(x, y) = [x]_{\mathcal{B}}^T A [y]_{\mathcal{B}} \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Non è difficile verificare che $a_{i,j} := b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$:

$$A := \begin{pmatrix} b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_N) \\ \vdots & & \vdots \\ b(\mathbf{e}_N, \mathbf{e}_1) & \cdots & b(\mathbf{e}_N, \mathbf{e}_N) \end{pmatrix}.$$

È chiaro anche che $A = A^T$ (A è simmetrica) se e solo se b è simmetrica, se e solo se L è simmetrica.

1.1.37 Definizione. Sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ lineare. Si dice che un numero λ è un *autovalore* se esiste $\mathbf{e} \in \mathcal{X}$ tale che $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$. Il vettore \mathbf{e} si dice *autovettore di autovalore* λ .

1.1.38 Osservazione. Se si fissa una base \mathcal{B} in \mathcal{X} e A è la matrice che rappresenta L rispetto alla base \mathcal{B} (in partenza e in arrivo), allora $A[\mathbf{e}]_{\mathcal{B}} = \lambda[\mathbf{e}]_{\mathcal{B}}$. Dunque la ricerca degli autovalori di L equivale alla ricerca degli autovalori di A . Per quest'ultimo problema abbiamo a disposizione le tecniche dell'algebra lineare che ci dicono che gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $\mathcal{P}(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. In generale queste radici sono complesse (in effetti si potrebbe rifare la teoria degli spazi vettoriali prendendo gli scalari in \mathbb{C} e considerando allora matrici a coefficienti complessi).

È ben noto che ad autovalori diversi corrispondono autovettori linearmente indipendenti; da questo segue che se A ha N autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (\mathcal{P} ha N radici distinte,

tutte di molteplicità 1) allora esiste una base per \mathbb{R}^N fatta di autovettori di A . Rispetto a questa base la matrice si scrive come $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ (la matrice diagonale avente $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sulla diagonale). Dunque A è *diagonalizzabile*: $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = M^{-1}AM$ dove $M = M(\hat{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$, $\hat{\mathcal{B}}$ è la base canonica e \mathcal{B} è la base ottenuta dagli autovettori.

Se \mathcal{P} ha meno di N radici le cose si fanno complicate. In generale per ogni radice λ_0 di \mathcal{P} si definiscono la *molteplicità algebrica* $\mu_a(\lambda_0)$ che è l'intero m tale che $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{P}_0(\lambda)$, con $\mathcal{P}_0(\lambda_0) \neq 0$ e la *molteplicità geometrica* $\mu_g(\lambda_0)$ che è la dimensione del sottospazio generato dagli autovettori di A di autovalore λ_0 . In generale $\mu_g(\lambda_0) \leq \mu_a(\lambda_0)$. Se per qualche autovalore λ_0 si ha $\mu_g(\lambda_0) < \mu_a(\lambda_0)$ la matrice **non è diagonalizzabile**. In questo caso ci sono forme canoniche più complicate (“forma di Jordan”) che sono per esempio utili nella soluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari. Se la matrice è simmetrica la situazione è molto più semplice come vediamo ora.

1.1.39 Proposizione. *Sia L un'applicazione lineare simmetrica. Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due autovalori di A e siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ due corrispondenti autovettori. Allora \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 sono ortogonali.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\lambda_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = (L\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \cdot L\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{e}_2) = \lambda_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)$$

Dato che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ne segue $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$. □

1.1.40 Teorema (Teorema Spettrale). *Sia $\dim(\mathcal{X}) = N$. Sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ lineare e simmetrica. Allora L ha tutti autovalori reali e \mathcal{X} ha una base ortonormale di autovettori di L . Questo significa che esistono $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ in \mathcal{X} ed esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ in \mathbb{R} tali che $L\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N$).*

1.1.41 Osservazione. Il Teorema Spettrale ci dice che se A è una matrice $N \times N$ simmetrica, esiste una matrice M tale che $MM^T = I$ per cui M^TAM è diagonale. Infatti siano $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ in \mathbb{R}^N e $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ come sopra e consideriamo

$$M := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N).$$

Per quanto visto M manda i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_N$ della base canonica nei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$, cioè $M\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i$ per $i = 1, \dots, N$. Dato che \mathcal{B} è ortonormale è facile vedere che $MM^T = I$ e $M^T M = I$, cioè $M^{-1} = M^T$; dunque $M^T \mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{e}}_i$. Allora:

$$M^TAM\hat{\mathbf{e}}_i = M^T A\mathbf{e}_i = M^T(\lambda_i \mathbf{e}_i) = \lambda_i M^T \mathbf{e}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

da cui si ricava:

$$M^TAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} =: \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

1.1.42 Osservazione. Supponiamo che $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una forma quadratica e sia b bilineare simmetrica per cui $\Phi(x) = b(x, x)$. Per il Teorema (1.1.35) esiste una applicazione lineare simmetrica tale che $b(x, y) = (Lx) \cdot y$. Per il Teorema Spettrale esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ autovalori reali di L e $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ autovettori corrispondenti tra loro ortogonali. In particolare $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ è una base ortonormale per \mathcal{X} . Per la Proposizione (1.1.36) si ha che

$$\Phi(x) = b(x, x) = [x]_{\mathcal{B}}^T A [x]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x \cdot \mathbf{e}_i)^2 \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

(perché $a_{i,j} = b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (L\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \lambda_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{i,j}$ e se $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ allora $x_i = x \cdot \mathbf{e}_i$).

In particolare Φ è semidefinita positiva (negativa, definita positiva, definita negativa) se e solo se $\lambda_i \geq 0$ ($\lambda_i \leq 0$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_i < 0$) per ogni $i = 1, \dots, N$.

Notiamo anche che se Φ è definita positiva (negativa) se e solo se

$$\exists \nu > 0 \text{ tale che } \Phi(\mathbf{x}) \geq \nu \|\mathbf{x}\|^2 \quad (\leq -\nu \|\mathbf{x}\|^2) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}. \quad (1.4)$$

Per vederlo basta prendere come ν il minimo autovalore (o il massimo autovalore).

1.1.43 Osservazione. Una forma quadratica Φ su \mathbb{R}^N è definita mediante $N(N+1)/2$ coefficienti $c_{i,j}$ con $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, i$ dalla formula

$$\Phi(\mathbf{x}) := \sum_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, i} c_{i,j} x_i x_j$$

Per esempio, se $N = 2$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$) $\Phi(\mathbf{x}) = c_{1,1}x_1^2 + c_{2,2}x_2^2 + c_{2,1}x_2x_1$ – non c'è bisogno del termine $c_{1,2}x_1x_2$ perché lo si può assimilare a $c_{2,1}x_2x_1$ (essendo $x_1x_2 = x_2x_1$). In questo modo una matrice C da cui ottenere Φ è quella con i coefficienti $c_{i,j}$ detti sopra, convenendo che $c_{i,j} = 0$ quando $j > i$. Dato però che vogliamo una matrice simmetrica bisognerà considerare $A := (C + C^T)/2$ che vuol dire $a_{i,j} := (c_{i,j} + c_{j,i})/2$; notiamo che i termini sulla diagonale rimangono gli stessi ($a_{i,i} = c_{i,i}$) mentre gli altri vengono distribuiti metà da un lato e metà dall'altro della diagonale).

Per esempio se $N = 3$ e se $\phi(x, y, xz) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ la matrice da considerare è:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}.$$

1.1.44 Definizione. Data una matrice $M \times N$ A si chiama *minore* di A una sottomatrice A_I^J ottenuta da A cancellando un sottoinsieme $I \subset \{1, \dots, M\}$ di righe e un sottoinsieme $J \subset \{1, \dots, N\}$ di colonne. Se A è quadrata ($M = N$) possiamo definire i *minori principali* di A come le sottomatrici quadrate A_I^I , dove $I \subset \{1, \dots, N\}$ (dunque $J = I$).

Se $K = 1, \dots, N$ chiamo *minore principale dominante K -esimo* la sottomatrice $A(K)$ ottenuta cancellando le ultime $N - K$ righe e le ultime $N - K$ colonne, cioè $A(K) := A_{\{N-K+1, \dots, N\}}^{\{N-K+1, \dots, N\}}$.

$$A(1) = (a_{1,1}), \quad A(2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \dots, \quad A(K) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{i,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K,1} & \cdots & a_{K,K} \end{pmatrix}.$$

1.1.45 Proposizione (criterio di Sylvester). *Supponiamo A simmetrica. Allora:*

- la matrice A (la forma quadratica associata ad A) è definita positiva se e solo se

$$\det(A(K)) > 0 \quad \forall K = 1, \dots, N.$$

- la matrice A (la forma quadratica associata ad A) è definita negativa se e solo se

$$(-1)^K \det(A(K)) > 0 \quad \forall K = 1, \dots, N.$$

Si noti che il secondo caso segue dal primo dato che A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva. Non è vero l'analogo criterio ottenuto rimpiazzando "definita" con "semidefinita" e ">" con "≥". Vale in effetti:

- *la matrice A (la forma quadratica associata ad A) è semidefinita positiva sse:*

$$\det(A') \geq 0 \quad \text{per ogni minore principale } A'.$$

1.2 Spazi normati

In questo paragrafo supporremo sempre che \mathbb{X} sia uno spazio vettoriale.

1.2.1 Definizione. Chiameremo *norma* su \mathbb{X} una applicazione da \mathbb{X} a valori in $[0, +\infty[$, denotata solitamente con $\| \cdot \|$ tale che:

- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|tx\| = |t|\|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

per ogni x, y in \mathbb{X} e per ogni $t \in \mathbb{R}$ ($x + y$ e tx hanno senso perché siamo in uno spazio vettoriale). La terza proprietà viene detta “disuguaglianza triangolare” (per la norma).

Chiameremo *spazio normato* uno spazio vettoriale \mathbb{X} dotato di una norma $\| \cdot \|$ (formalmente una coppia $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ in cui \mathbb{X} è uno spazio vettoriale e $\| \cdot \|$ è una norma).

Nel seguito di questo paragrafo \mathbb{X} sarà uno spazio vettoriale normato e $\| \cdot \|$ la norma.

1.2.2 Osservazione. Se in \mathbb{X} è definito un prodotto scalare allora \mathbb{X} è normato con la norma indotta dal prodotto scalare, come si è visto nel paragrafo precedente.

1.2.3 Definizione. Dato uno spazio normato si definisce la *distanza* tra due punti x_1 e x_2 in \mathbb{X} ponendo:

$$d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|.$$

È facile vedere che la distanza verifica le proprietà seguenti.

1. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si potrebbe chiamare *spazio metrico* un insieme \mathbb{X} su cui è definita una distanza, cioè una funzione con le proprietà dette sopra. Molte delle nozioni che introdurremo infatti dipendono solo dalla distanza – la distanza indotta dalla norma secondo la definizione sopra è un caso particolare ed ha varie proprietà in più rispetto al caso generale (è invariante per traslazioni, ha una proprietà di “omogeneità” rispetto alle dilatazioni – in sostanza va d’accordo con la struttura lineare dello spazio).

1.2.4 Osservazione. Si ha:

$$| \|x_2\| - \|x_1\| | \leq \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}.$$

Infatti $\|x_2\| = \|x_2 - x_1 + x_1\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1\|$. Scambiando x_2 con x_1 , con facili calcoli si ha:

$$- \|x_2 - x_1\| \leq \|x_2\| - \|x_1\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

che equivale a quanto enunciato sopra.

1.2.5 Definizione. Se $A \subset \mathbb{X}$ dico che A è *limitato* quando esiste $R > 0$ per cui

$$\forall x \in A \text{ si ha: } \|x\| \leq R.$$

In caso contrario dico che A è *illimitato*. Questo si verifica se:

$$\forall r > 0 \exists x \in A \text{ tale che } \|x\| > r.$$

Se \mathbb{X}_1 è un altro spazio normato con norma $\|\cdot\|_1$ e se $f : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ diremo che f è *limitata* su A quando esiste $R > 0$ per cui

$$\forall x \in A \text{ si ha: } \|f(x)\|_1 \leq R.$$

In caso contrario si dice che f è *illimitata* su A .

1.2.6 Definizione. Dati $x_0 \in \mathbb{X}$ e un numero $r > 0$ chiamiamo *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{X} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{X} : \|x - x_0\| < r\}.$$

1.2.7 Definizione. Siano dati un insieme $A \subset \mathbb{X}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{X}$. Diremo che:

- x_0 è *interno* ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$;
- x_0 è *esterno* ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$;
- x_0 è *di frontiera* per A se non è né interno né esterno ad A .

È chiaro che, dato A , ogni punto x_0 di \mathbb{X} ricade in una e una sola delle tre categorie indicate sopra. È anche chiaro che un punto è esterno ad A se e solo se è interno al complementare di A : $\mathcal{C}A := \mathbb{X} \setminus A$.

Dato un sottoinsieme A di \mathbb{X} definiamo allora:

$$\overset{\circ}{A} := \{x \in \mathbb{X} : x \text{ è interno ad } A\}, \quad \partial A := \{x \in \mathbb{X} : x \text{ è di frontiera per } A\}$$

$\overset{\circ}{A}$ viene detto *interno* o *parte interna* di A mentre ∂A si chiama *frontiera* di A . Possiamo anche chiamare “*parte esterna*” di A l'insieme dei punti esterni ad A – di fatto la parte esterna altro non è che la parte interna del complementare di A , cioè $\overset{\circ}{\mathcal{C}A}$. Con queste definizioni lo spazio \mathbb{X} viene “tripartito” nei tre insiemi disgiunti:

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\mathcal{C}A} \cup \partial A.$$

Dato $A \subset \mathbb{X}$ chiamiamo *chiusura* di A l'insieme:

$$\bar{A} := \overset{\circ}{A} \cup \partial A.$$

Da queste definizioni è chiaro che

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \mathcal{C} \left(\overset{\circ}{\mathcal{C}A} \right), & \overset{\circ}{A} &= \mathcal{C} (\bar{\mathcal{C}A}), \\ \partial A &= \partial \mathcal{C}A, & \partial A &= \bar{A} \cap \bar{\mathcal{C}A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}. \end{aligned}$$

1.2.8 Definizione. Un insieme A si dice *aperto* se tutti i punti di A sono interni ad A cioè se $A = \overset{\circ}{A}$. È immediato che A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$ (A non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera).

Un insieme A si dice *chiuso* se $A = \bar{A}$.

Notiamo che, per le definizioni, un insieme è aperto (chiuso) se e solo se il suo complementare è chiuso (aperto).

1.2.9 Proposizione. *Siano $A, B \subset \mathbb{X}$ con \mathbb{X} normato. Valgono le seguenti proprietà.*

1. $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

2. $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Ne segue che A è chiuso se e solo se $\partial A \subset A$.

3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Ne segue che $\overset{\circ}{A}$ è aperto e \overline{A} è chiuso.

4. *Se $A \subset B$ allora $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ e $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

In particolare se A è aperto (B chiuso) e $A \subset B$, allora $A \subset \overset{\circ}{B}$ ($\overline{A} \subset B$).

5. *Se A e B sono aperti, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Se A e B sono chiusi, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi. Inoltre, se A e B sono due insiemi generici:*

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B} \quad , \quad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B} \quad , \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

6. ∂A è (sempre) chiusa.

7. $\partial \overline{A} \subset \partial A$, $\partial \overset{\circ}{A} \subset \partial A$.

8. *Si ha sempre $\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B)$. Se $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ vale l'eguaglianza:*

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B).$$

Questo è vero se A e B sono chiusi (per (5)) e dunque:

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B) \quad \text{se } A \text{ e } B \text{ sono chiusi.}$$

Dimostrazione. 1. La prima inclusione è ovvia per definizione. La seconda segue dalla prima passando ai complementari.

2. Dalla (1) segue $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \subset A \cup \partial A$. Dato che $A \subset \overline{A}$ (sempre da (1)) e $\partial A \subset \overline{A}$ (per la definizione di \overline{A}), si ha $A \cup \partial A \subset \overline{A}$. Dunque vale l'eguaglianza.

3. Dalla (1) si ha $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{A}$. Vediamo che vale anche $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$. Per questo prendiamo $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Allora esiste $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subset A$. Dico che $B(x_0, \rho/2) \subset \overset{\circ}{A}$. Infatti se $x \in B(x_0, \rho/2)$ allora $B(x, \rho/2) \subset B(x_0, \rho) \subset A$ e quindi x è interno ad A . Dunque se $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ ho trovato un raggio $\rho' (= \rho/2)$ per cui $B(x_0, \rho') \subset \overset{\circ}{A}$ – in altri termini $x_0 \in \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$. Questo prova che $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$ e conclude la dimostrazione.

4. La prima inclusione è ovvia per definizione. La seconda segue dalla prima passando ai complementari.

5. Supponiamo A e B aperti. Sia $x_0 \in A \cup B$. Allora x_0 si trova in A oppure x_0 si trova in B . Nel primo caso esiste $r > 0$ con $B(x_0, r) \subset A \subset A \cup B$; nel secondo caso esiste $r > 0$ con $B(x_0, r) \subset B \subset A \cup B$. In entrambi i casi si ricava $B(x_0, r) \subset A \cup B$.

Sia ora $x_0 \in A \cap B$. Per definizione esistono $r_1 > 0$ ed $r_2 > 0$ tali che $B(x_0, r_1) \subset A$ e $B(x_0, r_2) \subset B$. Se r è il minimo tra r_1 ed r_2 allora $B(x_0, r) \subset B(x_0, r_1) \subset A$ e $B(x_0, r) \subset B(x_0, r_2) \subset B$. Dunque $B(x_0, r) \subset A \cap B$.

Abbiamo dimostrato che $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Il caso dei chiusi si dimostra passando al complementare.

Riguardo alle formule notiamo che $\overset{\circ}{A} \subset A$ e $\overset{\circ}{B} \subset B$ da cui

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \cup B \quad , \quad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B.$$

ed essendo $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ e $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ degli insiemi aperti, per (4), si ha:

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \widehat{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}} \quad , \quad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \widehat{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}.$$

Vediamo che la seconda inclusione è un'eguaglianza. Si ha:

$$\begin{aligned} A \cap B \subset A &\Rightarrow \widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \\ A \cap B \subset B &\Rightarrow \widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Le formule per le chiusure si ottengono passando ai complementari.

6. Per vedere che ∂A è chiuso basta mostrare che il suo complementare è aperto. Ma per definizione $\mathcal{C}\partial A = \overset{\circ}{A} \cup \widehat{\mathcal{C}A}$. Sia $\overset{\circ}{A}$ che $\widehat{\mathcal{C}A}$ sono aperti (per (3)) e quindi la loro unione è aperta.

7. Ricordiamo che, per definizione, $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Inoltre $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$ (per la (4)). Allora:

$$\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A.$$

Passando al complementare

$$\partial \overset{\circ}{A} = \partial \mathcal{C}\overset{\circ}{A} = \partial \overline{\mathcal{C}A} \subset \partial \mathcal{C}A = \partial A.$$

8. Usando la definizione di frontiera, le (5) e alcune proprietà insiemistiche, ha:

$$\begin{aligned} \partial(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \setminus \overset{\circ}{A \cap B} = \overline{A \cap B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}) \subset \overline{A} \cap \overline{B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}) = \\ &= \overline{A} \cap \overline{B} \cap (\overline{\mathcal{C}A} \cup \overline{\mathcal{C}B}) = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{\mathcal{C}A}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{\mathcal{C}B}) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

Da quanto sopra segue l'inclusione e anche l'eguaglianza quando $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. \square

1.2.10 Osservazione. Un punto x_0 è di frontiera per A se e solo se per ogni $r > 0$ esistono x', x'' in $B(\mathbf{x}_0, r)$ con $x' \in A$ e $x'' \notin A$. Questo si vede facilmente dalla definizione dato che x_0 non è né interno né esterno ad A .

1.2.11 Definizione. Chiameremo *aderente ad A* un qualunque punto della chiusura di A . Per la definizione di \overline{A} , x_0 è aderente ad A se e solo se x_0 non è esterno ad A , cioè se:

$$\forall r > 0 \exists x \in A : x \in B(x_0, r).$$

In particolare i punti di A verificano la proprietà sopra prendendo $x = x_0$ per ogni $r > 0$.

1.2.12 Definizione. Se $x_0 \in \mathbb{X}$ e $A \subset \mathbb{X}$ dico che x_0 è di *accumulazione per A* , se:

$$\forall r > 0 \exists x \in B(x_0, r) \cap A \text{ con } x \neq x_0.$$

L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama *il derivato di A* e si indica con $D(A)$. I punti di A che non sono di accumulazione per A si dicono *punti isolati in A* .

1.2.13 Osservazione. Si ha

$$\partial A \setminus A \subset D(A).$$

1.2.14 Esempio. In $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ si considera la *norma euclidea* :

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

indotta dal prodotto scalare di \mathbb{R}^N . La norma euclidea induce la distanza (euclidea)

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

1.2.15 Esempio. Dati due spazi normati \mathbb{X} e \mathbb{X}_1 possiamo definire una norma su $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_1)$ (applicazioni lineari da \mathbb{X} in \mathbb{X}_1), ponendo:

$$\|L\| := \sup \{\|Lx\|_1 : \|x\| = 1\}$$

($\|\cdot\|_1$ indica la norma in \mathbb{X}_1). Si vede facilmente che:

$$\|Lx\|_1 \leq \|L\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

(anzi $\|L\|$ è l'inf delle costanti C per cui $\|Lx\|_1 \leq C\|x\|$). Verifichiamo che si tratta di una norma. L'unica cosa non ovvia è la disuguaglianza triangolare: prendiamo dunque $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_1)$. Se $x \in \mathbb{X}$ e $\|x\| = 1$ si ha:

$$\|(L_1 + L_2)x\| = \|L_1x + L_2x\| \leq \|L_1x\| + \|L_2x\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|.$$

Prendendo l'estremo superiore su tutte le x con $\|x\| = 1$:

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|.$$

Dunque abbiamo definito una norma. Si vede subito che (\mathbb{X}_2 è un terzo spazio normato):

$$\|L_2L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\| \quad \forall L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_1) \quad \forall L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2).$$

Di fatto abbiamo anche introdotto una norma tra le matrici. Se $N, M \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$\mathbb{X} = \mathcal{M}(M, N) := \{\text{matrici } M \times N \text{ a coefficienti reali}\}.$$

Se $A \in \mathcal{M}(M, N)$ definita la norma di A :

$$\|A\|_{M,N} := \sup \{\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^M} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^N} = 1\}.$$

dove con $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^K}$ indichiamo la norma euclidea in \mathbb{R}^K . È chiaro che:

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^M} &\leq \|A\|_{M,N} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^N} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \\ \|AB\|_{M,K} &\leq \|A\|_{M,N} \|B\|_{N,K} \quad \forall A \in \mathcal{M}(M, N), \quad \forall B \in \mathcal{M}(N, K). \end{aligned}$$

1.3 Limite e continuità in spazi normati

1.3.1 Definizione (limite). Sia A un sottoinsieme di uno spazio normato \mathbb{X} e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$ un punto di accumulazione per A . Sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ dove \mathbb{X}_1 è un altro spazio normato con norma $\|\cdot\|_1$. Diciamo che un elemento \mathbf{l} di \mathbb{X}_1 è il *limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0* , e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l},$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \text{ con } \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ si ha } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_1 < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Notiamo che agli effetti del limite non ha nessuna rilevanza l'eventuale valore che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ assume in \mathbf{x}_0 . Quando $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ diremo anche che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *tende a \mathbf{l} per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0* e scriveremo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{l} \quad (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \text{ se } \mathbf{x}_0 \text{ è chiaro dal contesto}).$$

1.3.2 Teorema (unicità del limite). *Siano \mathcal{X} e \mathcal{X}_1 due spazi normati con norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ rispettivamente. Siano $A \subset \mathcal{X}$, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathcal{X}_1$ una funzione e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ un punto di accumulazione per A . Se esistono*

$$\mathbf{l}_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_1 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

allora $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_1$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{l}_0 \neq \mathbf{l}_1$. Prendiamo $\varepsilon := \frac{d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)}{3} (> 0)$. Per la definizione di limite esistono $r_0 > 0$ e $r_1 > 0$ tali che valga la (1.5) per $r = r_0$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ e per $r = r_1$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1$. Prendendo $r := \min(r_0, r_1)$ otteniamo che

$$\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \text{ si ha } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_1(\mathbf{l}_0, \varepsilon) \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_1(\mathbf{l}_1, \varepsilon).$$

Dato che \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A c'è sicuramente un punto \mathbf{x} in $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e quindi $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ deve stare contemporaneamente in $B_1(\mathbf{l}_0, \varepsilon)$ e in $B_1(\mathbf{l}_1, \varepsilon)$. Ma questo è impossibile, dato che:

$$3\varepsilon = d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1) \leq d_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{y}) + d_1(\mathbf{y}, \mathbf{l}_1) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon !!!$$

□

1.3.3 Osservazione. Si ha $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ se e solo se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_1 = 0$ (la funzione $x \mapsto \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| = d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{l})$ va da A in \mathbb{R}). Inoltre è semplice verificare che, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \in \mathcal{X}_1$, allora $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ è limitata per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 . Anzi si ha $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \rightarrow \|\mathbf{l}\|$.

1.3.4 Proposizione. *Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathcal{X}_1$, $A \subset \mathcal{X}$ e \mathbf{x}_0 di accumulazione per A . Se esiste il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 , allora \mathbf{f} è "limitata vicino a \mathbf{x}_0 ", cioè esiste $r > 0$ tale che \mathbf{f} è limitata in $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A$.*

Valgono le solite proprietà del limite di cui omettiamo la dimostrazione.

1.3.5 Teorema. *Siano \mathcal{X} , \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 spazi normati, $A \subset \mathcal{X}$, $B \subset \mathcal{X}_1$, \mathbf{x}_0 di accumulazione per A e \mathbf{y}_0 di accumulazione per B . Valgono i fatti seguenti (sottinteso che $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$).*

- **(linearità del limite)** *Siano $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathcal{X}_1$. Se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$ allora $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.*
- **(limite del prodotto)** *Se $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathcal{X}_1$ e se $f_1(\mathbf{x}) \rightarrow l_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, allora il prodotto $f_1 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow l_1 \mathbf{l}_2$.*
- **limite del quoziente** *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se $f(x) \rightarrow l$ con $l \neq 0$, allora $1/f(x) \rightarrow 1/l$.*
- *Se $\mathbf{f}_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathcal{X}_1$, se una delle due è limitata e l'altra tende a zero, allora $\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow 0$.*

- **(limite della composizione/cambio di variabile)** Se $f : A \rightarrow B$, $f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{y}_0$ con $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, se $g : B \rightarrow \mathbb{X}_2$ e $g(\mathbf{y}) \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{l}$, allora $g(f(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{l}$.
- **(limite della restrizione)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$, se $A_1 \subset A$ e \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A_1 , allora la restrizione $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow \mathbb{X}$ tende ancora a \mathbf{l} .
- **(limite e componenti)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ si ha che $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ se e solo se $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow l_i$ dove f_i e l_i indicano l' i -esima componente di f e \mathbf{l} .

Inoltre per ogni $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$ e ogni $i = 1, \dots, N$ si ha:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} x_i = x'_i.$$

- **(permanenza del segno)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.
- **(monotonia del limite)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$ e se $f(\mathbf{x}) \geq 0$, allora $l \geq 0$.
- **(teorema dei carabinieri)** Se $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e se $f(\mathbf{x}) \rightarrow l$, $h(\mathbf{x}) \rightarrow l$, allora $g(\mathbf{x}) \rightarrow l$.

Aggiungiamo qualche altra proprietà, più specificamente vettoriale, di cui diamo la dimostrazione.

1.3.6 Proposizione. Siano A e \mathbf{x}_0 come nella proposizione precedente.

1. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e se $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora $\|f(\mathbf{x})\|_M \rightarrow \|\mathbf{l}\|_M$.
2. Se $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2$.
3. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, se (per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$) si ha $f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{v}$, allora $g(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda$.

Dimostrazione. La 1. dipende dalla proprietà della norma mostrata nell'Osservazione (1.2.4) (usando la definizione di limite).

Per la 2. si può notare che (aggiungendo e togliendo $\mathbf{f}_1(x) \cdot \mathbf{l}_2$):

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2| &\leq |f_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2)| + |(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{l}_2| \leq \\ &\|f_1(\mathbf{x})\| \|\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2\| + \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1\| \|\mathbf{l}_2\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(si è usata la disuguaglianza di Schwartz e il fatto che $\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\|$ è limitata, in quanto ha limite).

Dimostriamo la 3. Introduciamo la funzione $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2}$ che è ben definita (almeno vicino a \mathbf{x}_0 , dato che $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \rightarrow \|\mathbf{v}\| \neq 0$). Dato che $g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{l}$ e $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|^2}$, facendo il prodotto scalare:

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|^2} = \lambda.$$

□

1.3.7 Definizione (limiti infiniti). Nel caso in cui lo spazio di arrivo \mathbb{X}_1 sia \mathbb{R} si possono considerare i limiti infiniti “in arrivo”. Consideriamo dunque $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbf{x}_0 di accumulazione per A . Si dice che f tende a $+\infty$ ($-\infty$) per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ e si scrive:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = -\infty \right)$$

se

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ si ha } f(\mathbf{x}) > C \quad (f(\mathbf{x}) < C).$$

Se $A \subset \mathbb{R}$ diremo che $+\infty$ ($-\infty$) è di accumulazione per A quando $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$). In questo caso si possono definire i limiti a più o a meno infinito.

Data $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $\mathbf{l} \in \mathbb{X}_1$ dico che $\mathbf{f}(x)$ tende a \mathbf{l} per $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) e scrivo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l} \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l} \right)$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in A, x > C \text{ (} x < C \text{) si ha } \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}\|_1 < \varepsilon.$$

Ovviamente le due definizioni si possono combinare se c è \mathbb{R} sia in partenza che in arrivo (ma questo è stato fatto in Analisi 1).

Se $A \in \mathbb{X}$ diciamo che ∞ (senza segno) è di accumulazione per A quando A è illimitato.

In questo caso possiamo introdurre il limite per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Data $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $\mathbf{l} \in \mathbb{X}_1$ dico che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende a \mathbf{l} per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ e scrivo:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \text{ con } \|\mathbf{x}\| \geq C \text{ si ha } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_1 < \varepsilon.$$

Nel caso in cui $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}$ posso definire anche

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \text{ (} -\infty \text{)}$$

combinando le definizioni sopra.

Per i limiti infiniti valgono gli stessi risultati dimostrati in Analisi 1 (quando c'era \mathbb{R} anche in partenza). Le dimostrazioni sono identiche pur di rimpiazzare il valore assoluto con la norma.

1.3.8 Proposizione. Siano $A \subset \mathbb{X}$ \mathbf{x}_0 di accumulazione per A e consideriamo funzioni da A a valori reali e limiti per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Usiamo la notazione $f(\mathbf{x}) \rightarrow l^+$ ($f(\mathbf{x}) \rightarrow l^-$) per indicare che $f(\mathbf{x}) \rightarrow l$ e che in più $f(\mathbf{x}) > l$ ($f(\mathbf{x}) < l$) quando \mathbf{x} è vicino a \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.

- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ e $g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ allora $(f + g)(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$;
- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ e $g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ allora $(f + g)(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$;
- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ e $g(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$ ($l < 0$) allora $(fg)(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$);
- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ e $g(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$ ($l < 0$) allora $(fg)(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ ($+\infty$);
- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) allora $1/f(\mathbf{x}) \rightarrow 0^+$ (0^-);
- se $f(\mathbf{x}) \rightarrow 0^+$ (0^-) allora $1/f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$);

I casi $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ e quelli che si riconducono a questi sono (come sempre) indeterminati, cioè il loro valore (e la loro esistenza) non seguono una regola generale e bisogna ragionare caso per caso.

1.3.9 Proposizione. Se $A \subset \mathbb{X}$, \mathbf{x}_0 di accumulazione per A , $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

allora (sottintendendo $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$):

$$g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty \quad , \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty \Rightarrow g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty.$$

1.3.10 Definizione (successioni). Chiamiamo *successione in \mathbb{X}* o *successione di punti di \mathbb{X}* una applicazione \mathbf{a} da \mathbb{N} a valori in \mathbb{X} . Nel caso di una successione si usa le convenzioni di indicare con \mathbf{a}_n , in luogo di $\mathbf{a}(n)$, l'elemento n -esimo della successione e con (\mathbf{a}_n) (o $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) la successione \mathbf{a} .

Dato che l'unico punto di accumulazione per \mathbb{N} è $+\infty$ l'unico limite che si può considerare per una successione è quello a $+\infty$. Ricordiamo che $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{l}$ con $\mathbf{l} \in \mathbb{X}$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \|\mathbf{a}_n - \mathbf{l}\| < \varepsilon.$$

Notiamo anche che ai fini del limite contano soli gli elementi \mathbf{a}_n con n grande per cui possiamo includere nelle successioni anche le applicazioni (\mathbf{a}_n) definite da un certo n_0 in poi (che si possono indicare con $(\mathbf{a}_n)_{n \geq n_0}$).

1.3.11 Proposizione (caratterizzazioni di interno/aderente mediante successioni). Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$. Allora:

- \mathbf{x}_0 è interno ad A se e solo se per ogni successione (\mathbf{x}_n) in \mathbb{X} che converge a \mathbf{x}_0 si ha che $\mathbf{x}_n \in A$ per n grande ($\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \mathbf{x}_n \in A$).
- \mathbf{x}_0 è aderente ad A se e solo se esiste una successione (\mathbf{x}_n) di punti di A tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$;

1.3.12 Proposizione (caratterizzazione della chiusura mediante successioni). Sia $A \subset \mathbb{X}$ (rispettivamente $A \subset \Omega \subset \mathbb{X}$). A è chiuso (risp. A è chiuso in Ω) se e solo se per ogni successione (\mathbf{x}_n) di punti di A che ammetta limite $x \in \mathbb{X}$ (risp. $x \in \Omega$) si ha $x \in A$, cioè:

$$\mathbf{x}_n \in A, \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in A.$$

1.3.13 Proposizione (caratterizzazione della frontiera mediante successioni). Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$. Allora $\mathbf{x} \in \partial A$ se e solo se esistono due successioni (\mathbf{x}'_n) e (\mathbf{x}''_n) tali che

$$\mathbf{x}'_n \in A \quad \forall n, \quad \mathbf{x}''_n \notin A \quad \forall n, \quad \mathbf{x}'_n \rightarrow \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}''_n \rightarrow \mathbf{x}.$$

1.3.14 Proposizione (caratterizzazione del derivato mediante successioni). Siano $A \subset \mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. Allora: \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione (\mathbf{x}_n) di punti di A con $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$.

1.3.15 Proposizione (caratterizzazione del limite mediante successioni). Siano $A \subset \mathbb{X}$, \mathbf{x}_0 di accumulazione per A , $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $\mathbf{l} \in \mathbb{X}_1$. Allora sono fatti equivalenti:

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$;
2. per ogni successione (\mathbf{x}_n) di punti di A con $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{l}$.

1.3.16 Definizione (estratte). Data una successione $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chiamo *sottosuccessione* di $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o *successione estratta* da $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una $(\mathbf{a}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dove $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di interi strettamente crescente.

1.3.17 Proposizione. Sia (\mathbf{a}_n) una successione di punti di \mathcal{X} che ammetta limite $\mathbf{l} \in \mathcal{X}$ (o anche $\mathbf{l} = \pm\infty$ nel caso in cui $\mathcal{X} = \mathbb{R}$). Allora ogni sua estratta (\mathbf{a}_{n_k}) tende allo stesso limite \mathbf{l} . Questo è un caso particolare del risultato sulle restrizioni.

1.3.18 Teorema (Bolzano-Weierstrass). Se (\mathbf{a}_n) è una successione di punti di \mathbb{R}^N ed è limitata allora esiste una sua estratta (\mathbf{a}_{n_k}) che ammette limite $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$. Lo stesso vale se (\mathbf{a}_n) è una successione di punti di \mathcal{X} con \mathcal{X} di **dimensione finita**.

Dimostrazione. Questo teorema è stato dimostrato in Analisi 1 nel caso $N = 1$. La dimostrazione nel caso generale si ottiene notando che (\mathbf{a}_n) è limitata in \mathbb{R}^N se e solo se ogni componente $a_{n,i}$ di \mathbf{a}_n è limitata in \mathbb{R} . Si può allora considerare un (n_k) tale che $a_{n_k,1}$ ammette limite a_1 in \mathbb{R} . In questo modo le rimanenti componenti ristrette alla (n_k) sono ancora limitate e quindi, passando ad un'ulteriore estratta $(a_{n_{k_h}})$ si può fare in modo che anche $a_{n_{k_h},2}$ ammetta limite a_2 (continuando a valere che $a_{n_{k_h},1} \rightarrow a_1$). Ripetendo N volte il procedimento alla fine si trova la tesi. \square

1.4 Norme equivalenti

1.4.1 Definizione (norme equivalenti). Sia \mathcal{X} uno spazio vettoriale e siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ due norme su \mathcal{X} . Diciamo che sono *norme equivalenti* se esistono due costanti positive, $0 < C_1 < C_2$, tali che:

$$C_1\|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Ciò che rende interessante questa definizione è il fatto che due norme equivalenti danno luogo alla stessa nozione di limite.

Più precisamente, se $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|')$ sono due spazi normati, $f : \mathcal{X} \rightarrow Y$ è una funzione tale che $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, dove $x_0 \in \mathcal{X}$ e $l \in Y$, allora sostituendo le norme su \mathcal{X} e su Y con due norme equivalenti $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'_1$ (e quindi considerando due “diversi” spazi normati $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_1)$ e $(Y, \|\cdot\|'_1)$) è ancora vero che $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

È anche vero che le nozioni di punto interno/esterno/di frontiera/di accumulazione non cambiano passando da una norma a una equivalente.

1.4.2 Esempio. Dato $p \geq 1$ poniamo:

$$\|\mathbf{x}\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p)^{1/p} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_N|) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

(si può dimostrare che $\|\mathbf{x}\|_p \rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty$ per $p \rightarrow +\infty$). Notiamo che $\|\cdot\|_2$ è la norma euclidea. Si può dimostrare che $\|\cdot\|_p$ è una norma su \mathbb{R}^N per qualunque $p \in [1, +\infty]$. Verifichiamolo nei casi estremi $p = 1$ e $p = \infty$ (vedremo più in là il caso $p = 2$). Al solito l'unica proprietà difficile è la disuguaglianza triangolare. Dato che $|a + b| \leq |a| + |b|$ se $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_N + y_N| \leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_N| + |y_N| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1.$$

Da $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ per $i = 1, \dots, N$ si ricava (per una nota proprietà del massimo):

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \max_{i=1, \dots, N} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i=1, \dots, N} |x_i| + \max_{i=1, \dots, N} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty.$$

Tutte le norme $\|\cdot\|_p$ sono tra loro equivalenti. In effetti dato $p \geq 1$:

$$\text{se } i = 1, \dots, N \text{ si ha } |x_i| = (|x_i|^p)^{1/p} \leq (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p}$$

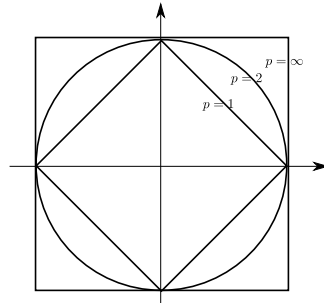
e d'altra parte, essendo $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$ per $i = 1, \dots, N$, si ha:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \leq (\|\mathbf{x}\|_\infty^p + \dots + \|\mathbf{x}\|_\infty^p)^{1/p} = N^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{x}\|_p \leq N^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty}$$

Dunque la norma $\|\cdot\|_\infty$ è equivalente a una qualunque $\|\cdot\|_p$. Da questo si deduce il resto: dati $p_1, p_2 \geq 1$ si ha:

$$\|\mathbf{x}\|_{p_1} \leq N^{1/p_1} \|\mathbf{x}\|_\infty \leq N^{1/p_1} \|\mathbf{x}\|_{p_2}, \quad \|\mathbf{x}\|_{p_2} \leq N^{1/p_2} \|\mathbf{x}\|_\infty \leq N^{1/p_2} \|\mathbf{x}\|_{p_1}$$

Dunque qualunque p si scelga, la nozione di limite che ne ricava non cambia. La norma euclidea è spesso la più conveniente per motivi che vedremo ora (esistenza di un prodotto scalare), ciò nonostante a volte può risultare più comodo utilizzare la norma $\|\cdot\|_\infty$ o la norma $\|\cdot\|_1$. La figura mostra come sono fatte le palle di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1 al variare di p (nel caso $N = 2$).



1.4.3 Esempio. Le matrici $M \times N$ si possono anche vedere come dei vettori di lunghezza NM “mettendo in un’unica fila gli NM coefficienti”.

Possiamo allora introdurre in $\mathcal{M}(M, N)$ le norme:

$$\|A\|_p := \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|^p \right)^{1/p}, \quad \|A\|_\infty := \max_{i=1, \dots, M, j=1, \dots, N} (|a_{i,j}|)$$

($p \geq 1$) – qui $a_{i,j}$ sono le componenti della matrice A . Tutte queste norme sono equivalenti e inducono su $\mathcal{M}(M, N)$ la medesima nozione di limite.

Queste norme sono anche equivalenti alla norma “canonica” $\|\cdot\|_{M,N}$. Vediamo che la norma $\|\cdot\|_{M,N}$ è equivalente alla $\|\cdot\|_2$ (da cui il caso generale per $p \in [0, \infty]$). Se $A \in \mathcal{M}(M, N)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ si ha (uso Schwartz dentro la parentesi):

$$\|A\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^M}^2 = \sum_{i=1}^M (A\mathbf{x})_i^2 = \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^N x_j^2 \right) = \|A\|_2^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Prendendo il massimo al variare tra tutti gli \mathbf{x} di norma 1 si trova:

$$\|A\|_{M,N} \leq \|A\|_2. \tag{1.6}$$

Viceversa indichiamo con $\hat{\mathbf{e}}_i$ l’ i -esimo vettore della base canonica che ha tutte componenti nulle tranne la i -esima pari a 1. Dato che $\|\hat{\mathbf{e}}_i\| = 1$:

$$\|A\|_{M,N} \geq \|A\hat{\mathbf{e}}_i\| = \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Eleviamo al quadrato e sommiamo su tutti gli indici $i = 1 \dots N$ si ricava:

$$M\|A\|_{M,N}^2 \geq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{i,j}^2 = \|A\|_2^2$$

e dunque:

$$\|A\|_{M,N} \geq \frac{1}{\sqrt{M}} \|A\|_2. \quad (1.7)$$

Da (1.6), (1.7) si deduce la tesi.

Notiamo che questa dimostrazione fa vedere che **la norma** $\|A\|_{M,N}$ **è finita** per qualunque matrice $A \in \mathcal{M}(M, N)$. È immediato verificare che (rispetto a una qualunque di queste norme):

$$A_n \rightarrow A \quad \text{in } \mathcal{M}_{M,N} \quad \Leftrightarrow \quad (A_n)_{i,j} \rightarrow (A)_{i,j} \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

1.5 Funzioni continue

1.5.1 Definizione (continuità). Siano \mathbb{X} e \mathbb{X}_1 due spazi normati con norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ rispettivamente. Sia $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$, e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Si dice che \mathbf{f} è *continua in* \mathbf{x}_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in A \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r \text{ si ha } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_1 < \varepsilon.$$

Si vede subito che se \mathbf{x}_0 è un punto isolato di A qualunque funzione è continua in \mathbf{x}_0 : basta prendere $r > 0$ in modo che $A \cap B(\mathbf{x}_0, r)$ contenga solo \mathbf{x}_0 . Se invece \mathbf{x}_0 è di accumulazione è facile vedere che \mathbf{f} è continua in \mathbf{x}_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

1.5.2 Osservazione (caratterizzazione della continuità mediante successioni). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora \mathbf{f} è continua in \mathbf{x}_0 se e solo se:

$$\text{per ogni } (\mathbf{x}_n) \text{ successione in } A \text{ con } \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \text{ si ha } \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Infatti se \mathbf{x}_0 è isolato non c'è niente da dimostrare (si noti che se $\mathbf{x}_n \in A$ e $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ allora $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ per n grande, per cui $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ per gli stessi n). Se invece \mathbf{x}_0 è di accumulazione si usa la corrispondente caratterizzazione del limite con $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Valgono i soliti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione

1.5.3 Teorema. *Siano \mathbb{X} , \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 normati, $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Valgono i fatti seguenti.*

- Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ sono continue in \mathbf{x}_0 , allora la somma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ è continua in \mathbf{x}_0 .
- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in \mathbf{x}_0 , allora il prodotto $g\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ è continuo in \mathbf{x}_0 .
- Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in \mathbf{x}_0 e se $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, allora $1/f$ è continua in \mathbf{x}_0 .
- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow B \subset \mathbb{X}_1$ è continua in \mathbf{x}_0 , $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{X}_2$ è continua in $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, allora la composizione $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_2$ è continua in \mathbf{x}_0 .
- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ è continua in \mathbf{x}_0 e se $\mathbf{x}_0 \in B \subset A$, allora la restrizione $\mathbf{f}|_B : A_1 \rightarrow \mathbb{X}_1$ è continua in \mathbf{x}_0 .

- $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua in \mathbf{x}_0 se e solo se tutte le sue componenti $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, N$) sono continue in \mathbf{x}_0 .
- Per ogni $i = 1, \dots, N$ la proiezione i -esima $\mathbf{x} \mapsto x_i$ è continua.

1.5.4 Definizione. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $c \in \mathbb{R}$ consideriamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \{f \leq c\} &:= \{x \in A : f(x) \leq c\}, & \{f < c\} &:= \{x \in A : f(x) < c\}, \\ \{f = c\} &:= \{x \in A : f(x) = c\}. \end{aligned}$$

diremo che $\{f \leq c\}$ è un *sottolivello* e che $\{f = c\}$ è un *insieme di livello* per f .

1.5.5 Proposizione. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$, che $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e che c sia un numero reale. Allora:

1. Se A è chiuso, allora $\{f \leq c\}$ e $\{f = c\}$ sono chiusi.
2. Se A è aperto allora $\{f < c\}$ è aperto.
3. Se $A = \mathbb{R}^N$ si ha:

$$\partial \{f \leq c\} \subset \{f = c\}, \quad \partial \{f < c\} \subset \{f = c\}.$$

Notiamo che se $A = \mathbb{R}^N$ (che è contemporaneamente aperto e chiuso) allora valgono sia $\{f \leq c\}$ e $\{f = c\}$ chiusi, sia $\{f < c\}$ aperto.

Dimostrazione. Usiamo la caratterizzazione della chiusura mediante successioni (vedi la (b) della (1.3.12)). Supponiamo che (\mathbf{x}_n) sia una successione di punti di $\{f \leq c\}$ (risp. di $\{f = c\}$) che converga a un punto x in \mathbb{R}^N . Dato che A è chiuso deve essere $x \in A$. Per definizione si ha $f(x_n) \leq c$ (risp. $f(x_n) = c$). Per la continuità di f si ha $f(x) \leq c$ (risp. $f(x) = c$), cioè $x \in \{f \leq c\}$ (risp. $x \in \{f = c\}$). Dunque $\{f \leq c\}$ ed $\{f = c\}$ sono chiusi.

Supponiamo ora che $x \in \{f < c\}$ e che (\mathbf{x}_n) sia una successione in \mathbb{R}^N con $\mathbf{x}_n \rightarrow x$. Dato che A è aperto si ha $x_n \in A$ per n grande. Inoltre $f(x) < c$ per definizione e allora per la continuità di f deve essere $f(\mathbf{x}_n) < c$ per n grande (permanenza del segno). Dunque $\mathbf{x}_n \in \{f < c\}$ per n grande e abbiamo dimostrato che x è interno a $\{f < c\}$ (vedi la Proposizione (1.3.11)). Dato che ciò è vero per ogni x di $\{f < c\}$ l'insieme $\{f < c\}$ è aperto.

Per quanto riguarda il terzo punto mostriamo ad esempio la prima inclusione.. Sappiamo per la (1.3.13) che $x \in \partial \{f \leq c\}$ se e solo se esistono due successioni, una in $\{f \leq c\}$ – chiamiamola (x'_n) – e una fuori da $\{f \leq c\}$ – chiamiamola (x''_n) – entrambe convergenti a x . Dunque $f(x'_n) \leq c$, $f(x''_n) > c$, $x'_n \rightarrow x$, $x''_n \rightarrow x$. Per la continuità di f e la monotonia del limite ne segue $f(x) = c$, cioè $x \in \{f = c\}$. Abbiamo dimostrato che $\partial \{f \leq c\} \subset \{f = c\}$. Nello stesso modo si vede che $\partial \{f < c\} \subset \{f = c\}$. \square

In generale non valgono le eguaglianze in 3. Se per esempio $f(x, y) = -x^2$ (definita su tutto \mathbb{R}) e se $c = 0$, si ha:

$$\{f \leq c\} = \mathbb{R} \Rightarrow \partial \{f \leq c\} = \emptyset \neq \{(0)\} = \{f = c\}.$$

Oppure si prenda $f(x) := x^2(x - 1)$ (sempre definita su \mathbb{R}). Allora:

$$\{f < 0\} =]-\infty, 1[\Rightarrow \partial \{f < 0\} = \{1\} \neq \{0, 1\} = \{f = 0\}.$$

1.5.6 Esempio. Il disco unitario in \mathbb{R}^2 : $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è in insieme chiuso e la sua parte interna è $\overset{\circ}{D} = B(\mathbf{0}, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. La frontiera di D è la sfera unitaria $\partial B = S := \{x^2 + y^2 = 1\}$. In effetti dalla continuità della funzione $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ si ricava che D è chiuso e $B(\mathbf{0}, 1)$ è aperto, come pure il fatto che $\partial D \subset S$. Mostriamo che $S \subset \partial D$; per questo dobbiamo mostrare che ogni punto di S è limite di punti di D ed è limite di punti di $\mathcal{C}D$. Il primo fatto è ovvio dato che $S \subset D$; per il secondo prendiamo $(x, y) \in S$ e consideriamo $P_n = (\mathbf{x}_n, y_n) := (1 + 1/n)(x, y)$. È chiaro che $\mathbf{x}_n^2 + y_n^2 = (1 + 1/n)^2 > 1$, dunque $P_n \notin D$, e che $P_n \rightarrow (x, y)$. Quindi $\partial D = S$. Ne segue anche $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D = D \setminus S = B(\mathbf{0}, 1)$.

Se prendiamo $D^{++} := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, allora D^{++} è ancora un chiuso, la sua parte interna è $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$, mentre la frontiera è

$$\{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, x = 0, y \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y = 0\}.$$

Per vederlo notiamo che $D^{++} = D \cap \Pi_1 \cap \Pi_2$ dove $\Pi_1 := \{(x, y) : x \geq 0\}$ e $\Pi_2 := \{(x, y) : y \geq 0\}$. Per la continuità delle funzioni $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ gli insiemi Π_1 e Π_2 sono chiusi, e $\partial \Pi_1 \subset \Sigma_1$, $\partial \Pi_2 \subset \Sigma_2$, dove $\Sigma_1 := \{(x, y) : x = 0\}$ e $\Sigma_2 := \{(x, y) : y = 0\}$. In effetti vale $\partial \Pi_1 = \Sigma_1$: per vederlo, ragionando come prima, basta notare che dato $(0, y)$ in Σ_1 lo posso ottenere come limite di $(1/n, y)$ (successione in Π_1) e come limite di $(-1/n, y)$ (successione in $\mathcal{C}\Pi_1$). Nello stesso modo si ottiene $\partial \Pi_2 = \Sigma_2$. Dato che tutti gli insiemi in ballo sono chiusi vale la formula

$$\begin{aligned} \partial D^{++} &= (\partial D \cap \Pi_1 \cap \Pi_2) \cup (D \cap \partial \Pi_1 \cap \Pi_2) \cup (D \cap \Pi_1 \cap \partial \Pi_2) = \\ &= (S \cap \Pi_1 \cap \Pi_2) \cup (D \cap \Sigma_1 \cap \Pi_2) \cup (D \cap \Pi_1 \cap \Sigma_2) \end{aligned}$$

che corrisponde a quanto affermato sopra. Per differenza si ricava l'espressione di $\overset{\circ}{D}^{++}$.

Se invece prendiamo la "mezza palla" $E := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 0, x > 0\}$ otteniamo un insieme che non è né aperto né chiuso in \mathbb{R}^2 . Però si può vedere che E è (relativamente) chiuso nel semipiano aperto $\Omega := \{(x, y) : x > 0\}$. Inoltre la frontiera di E è costituita da

$$\partial E = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2, x > 0\} \cap \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\};$$

da cui segue che $\partial E_\Omega = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 = 1\}$.

1.5.7 Definizione (Grafico ed epigrafico). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dove $A \subset \mathbb{R}^N$. Definiamo il *grafico di f* come l'insieme in \mathbb{R}^{N+1} dato da $G(f) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y = f(\mathbf{x})\}$ e l'*epigrafico* $\text{epi}(f) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y \leq f(\mathbf{x})\}$. Introduciamo anche l'insieme $\overset{\circ}{\text{epi}}(f) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y < f(\mathbf{x})\}$.

1.5.8 Proposizione. *Supponiamo che $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua. Allora (in \mathbb{R}^{N+1}) $G(f)$ e $\text{epi}(f)$ sono chiusi, $\overset{\circ}{\text{epi}}(f)$ è aperto e*

$$\overset{\circ}{\text{epi}}(f) = \overset{\circ}{\widehat{\text{epi}}(f)}, \quad \overline{\overset{\circ}{\text{epi}}(f)} = \text{epi}(f), \quad \partial \text{epi}(f) = \partial \overset{\circ}{\text{epi}}(f) = G(f).$$

Se in generale $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^N$, f è continua, allora $\text{epi}(f)$ e $G(f)$ sono chiusi in $A \times \mathbb{R}^N$, $\overset{\circ}{\text{epi}}(f)$ è aperto in $A \times \mathbb{R}^N$,

$$\overset{\circ}{\text{epi}}(f) = \widehat{\overset{\circ}{\text{epi}}(f)}_{A \times \mathbb{R}^N}, \quad \overline{\overset{\circ}{\text{epi}}(f)}_{A \times \mathbb{R}^N} = \text{epi}(f), \quad \partial_{A \times \mathbb{R}^N} \text{epi}(f) = \partial_{A \times \mathbb{R}^N} \overset{\circ}{\text{epi}}(f) = G(f).$$

Notiamo che quest'ultima affermazione ci dice che, se A è chiuso, allora $(A \times \mathbb{R}^N)$ è chiuso e) $\text{epi}(f)$ e $G(f)$ sono chiusi in \mathbb{R}^{N+1} , mentre se A è aperto, allora $(A \times \mathbb{R}^N)$ è aperto e) $\overset{\circ}{\text{epi}}(f)$ è aperto in \mathbb{R}^{N+1} .

Notiamo anche che, in ogni caso $\overset{\circ}{G}(f) = \emptyset$ perchè $G(f)$ è una frontiera.

Dimostrazione. Se consideriamo $g : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(\mathbf{x}, y) := f(\mathbf{x}) - y$, allora $G(f) = \{g(\mathbf{x}, y) = 0\}$, $\text{epi}(f) = \{g(\mathbf{x}, y) \leq 0\}$ e $\overset{\circ}{\text{epi}}(f) = \{g(\mathbf{x}, y) < 0\}$. Dunque per quanto visto sopra $G(f)$, $\text{epi}(f)$ sono chiusi, $\overset{\circ}{\text{epi}}(f)$ è aperto e $\overset{\circ}{\partial} \text{epi}(f) \subset G(f)$, $\partial \text{epi}(f) \subset G(f)$. Rimane da dimostrare $G(f) \subset \overset{\circ}{\partial} \text{epi}(f)$ e $G(f) \subset \partial \text{epi}(f)$. In effetti dato (\mathbf{x}, y) con $f(\mathbf{x}) = y$ possiamo prendere $P_n := (\mathbf{x}, y + 1/n)$ e $Q_n := (\mathbf{x}, y - 1/n)$. Allora $P_n \in \overset{\circ}{\text{Cepi}}(f) \subset \overset{\circ}{\text{Cepi}}(f)$, $Q_n \in \text{epi}(f) \subset \overset{\circ}{\text{epi}}(f)$, $P_n \rightarrow (\mathbf{x}, y)$ e $Q_n \rightarrow (\mathbf{x}, y)$.

Il caso generale si fa in maniera analoga. □

1.5.9 Proposizione. (*insiemi normali*) Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme chiuso e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. L'insieme:

$$B := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y \in \mathbb{R}, g(\mathbf{x}) \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$$

si dice normale rispetto all'asse $N + 1$ -esimo (relativo a A , f e g).

Allora B è chiuso in \mathbb{R}^{N+1} e la sua frontiera ∂B è data da

$$\{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y = g(\mathbf{x})\} \cup \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y = f(\mathbf{x})\} \cup \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \partial A, g(\mathbf{x}) \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$$

Inoltre la parte interna di B coincide con

$$\overset{\circ}{B} = \left\{ (\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \overset{\circ}{A}, g(\mathbf{x}) < y < f(\mathbf{x}) \right\}.$$

Dimostrazione. Omettiamo la (semplice) dimostrazione. □

Vediamo ora i corrispondenti in \mathbb{R}^N di alcuni “teoremi globali” sulle funzioni continue.

1.5.10 Lemma. Sia $A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esistono due successioni (x'_n) e (x''_n) di punti di A tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \inf_{x \in A} f(x) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \sup_{x \in A} f(x)$$

Dimostrazione. Facciamo il caso dell'estremo inferiore.

Poniamo $m := \inf_{x \in A} f(x)$. Ci sono due possibilità.

(I) $m \in \mathbb{R}$ Per definizione di \inf so che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$ e che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $f(x_n) \leq m + 1/n$. Ne segue che $f(x_n) \rightarrow m$.

(II) $m = -\infty$ Dunque f non è inferiormente limitato in A . Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ per cui $f(x_n) \leq -n$. Ne segue $f(x_n) \rightarrow -\infty = m$. □

1.5.11 Teorema (Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e chiuso. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo, cioè esistono x' e x'' in A tali che

$$f(x') \leq f(\mathbf{x}) \leq f(x'') \quad \forall x \in A.$$

Dimostrazione. Facciamo il caso del minimo. Prendiamo $m := \inf_{x \in A} f(x)$. Per il Lemma (1.5.10) si trova una successione (x_n) di punti di A con $f(x_n) \rightarrow m$. Dato che A è limitato (x_n) è limitata, dunque per il Teorema di Bolzano Weierstrass esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) che ammette limite \bar{x} , cioè: $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ per $k \rightarrow \infty$. Dato che A è chiuso deve essere $\bar{x} \in A$. Per la continuità di f si deduce che $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$. Ma $(f(x_{n_k}))$ è una successione estratta da $(f(x_n))$ e quest'ultima tende a m per come è stata costruita. Dato che il limite di $(f(x_{n_k}))$ è unico, deve essere $f(\bar{x}) = m$. Per definizione di m questo equivale a dire che:

$$-\infty < m = f(\bar{x}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) = \min_{x \in A} f(x).$$

□

1.5.12 Proposizione. *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme chiuso e limitato e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione continua. Allora $f(A) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$ è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. (a) Dimostriamo che $f(A)$ è chiuso. Per questo prendiamo (y_n) in $f(A)$ tale che $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^M$. Per definizione di $f(A)$ esiste (\mathbf{x}_n) in A per cui $y_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. Dato che A è limitato esiste un'estratta (\mathbf{x}_{n_k}) che ha limite: $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}^M$. Dato che A è chiuso $x \in A$. Dato che f è continua si ha $y_{n_k} = f(\mathbf{x}_{n_k}) \rightarrow \mathbf{f}(x)$. Essendo (y_{n_k}) estratta da (y_n) si ha $y_{n_k} \rightarrow y$ e quindi, per l'unicità del limite, $\mathbf{f}(x) = y$. Questo ci dice che $y \in f(A)$, dunque $f(A)$ è chiuso (vedi la (1.3.12)).

(b) Dimostriamo che $f(A)$ è limitato. Se non lo fosse si troverebbe una successione (y_n) in $f(A)$ per cui $\|y_n\|_{\mathbb{R}^M} \rightarrow +\infty$. Per definizione di $f(A)$ ciò significa che esiste (\mathbf{x}_n) in A per cui $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\|_{\mathbb{R}^M} = \|y_n\|_{\mathbb{R}^M} \rightarrow +\infty$. Ragionando come sopra si può trovare un'estratta (\mathbf{x}_{n_k}) e un punto x in A per cui $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow x$ e per la continuità di f in x si ha $y_{n_k} = f(\mathbf{x}_{n_k}) \rightarrow \mathbf{f}(x)$. In particolare (y_{n_k}) è limitata, il che è in contraddizione con il fatto che (y_n) è estratta da una successione che diverge in norma. \square

1.5.13 Teorema (Weierstrass generalizzato). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che:*

(a) *Se $x_0 \in \partial A$ ma $x_0 \notin A$ allora:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{risp. } -\infty);$$

(b) *Se A non è limitato, allora:*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad (\text{risp. } -\infty).$$

Allora f ammette minimo (risp. f ammette massimo). Notiamo che se A è limitato e chiuso le (a) e (b) sono automaticamente verificate (in entrambe le versioni) e quindi si riottiene il teorema di Weierstrass.

Dimostrazione. Facciamo il caso del minimo. Per il Lemma (1.5.10) possiamo prendere una successione (x_n) di punti di A tale che: $f(x_n) \rightarrow m := \inf_{x \in A} f(x)$. Notiamo che $m < +\infty$ (perché $m \leq f(x) < +\infty$ per un qualunque $x \in A$). Dico che (x_n) è limitata. Se non lo fosse, dato k intero troverei un elemento x_{n_k} della successione per cui $\|x_{n_k}\| \geq k$. Dunque troverei un'estratta (x_{n_k}) tale che $\|x_{n_k}\| \rightarrow \infty$. Ma allora per la (b) avrei $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$. Però essendo un'estratta deve ancora valere che $f(x_{n_k}) \rightarrow m < +\infty$ da cui un assurdo. Dunque (x_n) è limitata. Per Bolzano Weierstrass esiste una (x_{n_k}) che converge a un punto \bar{x} . Se \bar{x} non fosse in A potrei usare la (a) e ottenere $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$. Ma per lo stesso motivo detto sopra dovrebbe essere $f(x_{n_k}) \rightarrow m < +\infty$ che è di nuovo impossibile. Dunque $\bar{x} \in A$. A questo punto per la continuità si ha $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$ e, come nella dimostrazione di Weierstrass si ricava $f(\bar{x}) = m$, cioè \bar{x} è punto di minimo per f su A . \square

1.5.14 Teorema (continuità dell'inversa). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e chiuso in \mathbb{R}^N e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione continua e iniettiva. Posto $B := f(A)$ (che è anche lui chiuso e limitato per quanto visto prima) è ben definita $f^{-1} : B \rightarrow A$. Allora f^{-1} è continua.*

Dimostrazione. Fissiamo y_0 in B e dimostriamo che f^{-1} è continua in y_0 . Se y_0 è isolato in B non c'è nulla da dimostrare, se no bisogna far vedere che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = y_0.$$

Ragionando per successioni basta far vedere che se $y_n \in B$, $y_n \rightarrow y_0 \in B$ allora $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$. Indichiamo $\mathbf{x}_n := f^{-1}(y_n)$, $\mathbf{x}_0 := f^{-1}(y_0)$ e supponiamo per assurdo che non valga $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Negando la definizione di limite si vede che esistono $\varepsilon > 0$ e una estratta (\mathbf{x}_{n_k}) tali che $\|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_0\| \geq \varepsilon$. Essendo A chiuso e limitato, pur di passare a un'ulteriore sottosuccessione, possiamo supporre che $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ per un opportuno punto $\bar{x} \in A$, che deve verificare $\|\bar{x} - \mathbf{x}_0\| \geq \varepsilon$ e dunque $\bar{x} \neq \mathbf{x}_0$. Applicando f e usando la continuità si ha $y_{n_k} = f(\mathbf{x}_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$. Peraltro essendo (y_{n_k}) estratta da (y_n) che converge a $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ se ne ricava $f(\bar{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. Questo è assurdo perché f è iniettiva. \square

1.6 Continuità delle funzioni lineari

In questo paragrafo \mathcal{X} denota uno spazio normato con norma $\|\cdot\|$ e \mathcal{X}_1 denota uno spazio normato con norma $\|\cdot\|_1$.

1.6.1 Proposizione. *Sia $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_1$ un'applicazione lineare. Allora sono equivalenti:*

- (a) L è continua in $\mathbf{0}$;
- (b) L è continua in \mathcal{X} ;
- (c) esiste una costante M tale che

$$\|L\mathbf{x}\|_1 \leq M\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_1.$$

Dimostrazione. (a) \Rightarrow (c) Se L è continua in $\mathbf{0}$, allora per la definizione di limite:

$$\exists R > 0 \text{ tale che } \|L\mathbf{x} - L\mathbf{0}\|_1 = \|L\mathbf{x}\|_1 \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R).$$

Preso un generico $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si ha $\frac{R\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in B(\mathbf{0}, R)$, e quindi:

$$\left\| L \left(\frac{R\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|L\mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1}{R}\|\mathbf{x}\|.$$

Ne segue (c) con $M = 1/R$ (se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ la disuguaglianza a destra è ovvia).

(c) \Rightarrow (b) Se vale (c) si ha:

$$\|L\mathbf{x}_1 - L\mathbf{x}_2\|_1 = \|L(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_1 \leq M\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}.$$

Ne segue che $L\mathbf{x} \rightarrow L\mathbf{x}_0$ se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, cioè la continuità di L .

(b) \Rightarrow (c) È ovvia. \square

1.6.2 Definizione. Se $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_1$ è lineare e continua, possiamo definire la *norma* di L ponendo

$$\|L\| := \inf \{ M \in \mathbb{R} : \|L\mathbf{x}\|_1 \leq M\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_1 \}$$

Tale norma è finita per quanto appena visto. Si verifica facilmente che le proprietà della norma sono verificate.

1.6.3 Osservazione. Supponiamo che $\dim(\mathcal{X}) = N$ e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ una base per \mathcal{X} . Ricordiamo che $\|\cdot\|$ è la norma in \mathcal{X} . Definiamo $\|\cdot\|_*$ in \mathbb{R}^N ponendo:

$$\|\mathbf{v}\|_* := \|v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n\| = \left\| \sum_{i=1}^N v_i\mathbf{e}_i \right\| \text{ se } \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Allora si verifica facilmente che $\|\cdot\|_*$ è una norma in \mathbb{R}^N .

1.6.4 Osservazione. Se $\| \cdot \|$ è una norma in \mathcal{X} si ha:

$$\left| \| \mathbf{x}_1 \| - \| \mathbf{x}_2 \| \right| \leq \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}.$$

Infatti per la disuguaglianza triangolare

$$\| \mathbf{x}_1 \| = \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \| \leq \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \| + \| \mathbf{x}_2 \| \Rightarrow \| \mathbf{x}_1 \| - \| \mathbf{x}_2 \| \leq \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|\|$$

e scambiando i due punti tra loro si ha anche $\| \mathbf{x}_2 \| - \| \mathbf{x}_1 \| \leq \| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \| = \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|\|$ da cui segue la disuguaglianza con il modulo.

1.6.5 Teorema. *Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^N tutte le norme sono equivalenti tra loro.*

Dimostrazione. Mostriamo che se $\| \cdot \|$ è una norma in \mathbb{R}^N allora $\| \cdot \|$ è equivalente alla norma euclidea $\| \cdot \|_2$. Prima di tutto notiamo che, se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, si ha:

$$\| \mathbf{x} \| = \left\| \sum_{i=1}^N x_i \hat{\mathbf{e}}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i| \| \hat{\mathbf{e}}_i \| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N \| \hat{\mathbf{e}}_i \|^2} = \| \mathbf{x} \|_2 \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^N \| \hat{\mathbf{e}}_i \|^2}}_{=:M}$$

(si è usato Schwartz). Definiamo $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $p(\mathbf{x}) := \| \mathbf{x} \|$. Si ha:

$$|p(\mathbf{x}_1) - p(\mathbf{x}_2)| \leq \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \| \leq M \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2 \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^N, \quad (1.8)$$

dunque p è continua in \mathbb{R}^N rispetto all'usuale norma euclidea. Dato che la sfera unitaria $S := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \| \mathbf{x} \|_2 = 1 \}$ è chiusa e limitato, per Weierstrass, p ha massimo e minimo su S . ci sono dunque $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ tali che:

$$C_1 := p(\mathbf{x}_1) \leq p(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}_2) =: C_2 \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

È chiaro che $C_1 > 0$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ possiamo usare la disuguaglianza sopra per $\mathbf{x}/\| \mathbf{x} \|_2 \in S$ – per la definizione di p e per l'omogeneità della norma si ricava la tesi:

$$C_1 \| \mathbf{x} \|_2 \leq \| \mathbf{x} \| \leq C_2 \| \mathbf{x} \|_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

□

1.6.6 Teorema. *Se \mathcal{X} e \mathcal{X}_1 hanno dimensione finita allora ogni applicazione lineare $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_1$ è continua.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N \}$ una base per \mathcal{X} e $\mathcal{B}' = \{ \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_M \}$ una base per \mathcal{X}_1 . Per l'Osservazione (1.6.3) possiamo considerare la norma $\| \cdot \|_*$ in \mathbb{R}^N e la norma $\| \cdot \|_{*,1}$ in \mathbb{R}^M definite da:

$$\| (x_1, \dots, x_N) \|_* := \| x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_N \mathbf{e}_N \|, \quad \| (y_1, \dots, y_M) \|_{*,1} := \| y_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + y_M \mathbf{e}'_M \|_1$$

Inoltre possiamo considerare la matrice $A \in \mathcal{M}(M, N)$ che rappresenta L :

$$[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Sappiamo che:

$$\| A\mathbf{v} \|_M \leq \| A \|_{M,N} \| \mathbf{v} \|_N \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$$

dove $\| \cdot \|_N$ e $\| \cdot \|_M$ denotano le norme euclidee in \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M rispettivamente e $\| \cdot \|_{M,N}$ è la norma nelle matrici $M \times N$, che è finita come visto in (1.4.3). D'altra parte per il Teorema (1.6.5) possiamo trovare delle costanti $0 < C_1 < C_2$ e $0 < C'_1 < C'_2$ tali che:

$$C_1 \| \mathbf{v} \|_* \leq \| \mathbf{v} \|_N \leq C_2 \| \mathbf{v} \|_* \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \quad C'_1 \| \mathbf{v}' \|_{*,1} \leq \| \mathbf{v}' \|_M \leq C'_2 \| \mathbf{v}' \|_{*,1} \quad \forall \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^M.$$

Da tutto questo si deriva che:

$$\|A\mathbf{v}\|_{*,1} \leq \underbrace{\frac{\|A\|_{M,N}C_2}{C_1}}_{=:M} \|\mathbf{v}\|_* \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N,$$

che, per tutte le definizioni fatte, si traduce in

$$\|L\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

(si prende $\mathbf{v} = [\mathbf{x}]_{\emptyset}$). Questo prova che L è continua. \square

1.6.7 Osservazione. Abbiamo introdotto il simbolo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ per indicare le applicazioni lineari da \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^M . In generale si usa il simbolo $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_1)$ per indicare le applicazioni lineari e **continue** da \mathbb{X} in \mathbb{X}_1 . Nel caso di $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ e $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}^M$ non è necessario chiedere la continuità perché questa segue automaticamente dalla linearità.

L'insieme $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_1)$ è chiaramente uno spazio lineare ed è anche uno spazio normato rispetto alla norma per le applicazioni lineari continue introdotta prima.

1.6.8 Esempio. Consideriamo $\mathbb{X} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua}\}$. Se $f, g \in \mathbb{X}$ poniamo:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad \|f\| := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx} = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

È facile vedere che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare e che $\|\cdot\|$ è la relativa norma. Dunque \mathbb{X} è uno spazio normato (con la norma detta sopra). Definiamo $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$Lf := f(0).$$

È immediato verificare che L è lineare. Se prendiamo in \mathbb{X} la successione (f_n) con f_n definite da: $f_n(x) := e^{-nx}$, abbiamo che $Lf_n = f_n(0) = 1$, mentre:

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 e^{-2nx} dx = \left[\frac{e^{-2nx}}{-2n} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2n}(1 - e^{-2n}) \rightarrow 0.$$

Allora si ha $f_n \rightarrow 0$ in \mathbb{X} , ma $1 = Lf_n$ non tende a $L0 = 0$. Dunque L **non è continua**.

1.7 Completezza

1.7.1 Definizione (successioni di Cauchy). Sia \mathbb{X} uno spazio normato e sia (x_n) una successione in \mathbb{X} . Si dice che (x_n) ha la proprietà di Cauchy o che (x_n) è di Cauchy, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

(i punti della successione si avvicinano tra loro al crescere degli indici).

1.7.2 Osservazione. Se $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{X} , di sicuro (x_n) è di Cauchy – lo si vede dalla definizione dato che $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$. Il viceversa può essere falso. Per esempio in $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$ ci sono successioni di Cauchy che non hanno limite – basta prendere una successione di razionali (q_n) che in \mathbb{R} tenda a $\sqrt{2}$ (questa non ha limite in \mathbb{Q}).

1.7.3 Proposizione. Se una successione (x_n) è di Cauchy, allora è limitata.

Dimostrazione. Applicando la definizione sopra con $\varepsilon = 1$ si trova \bar{n} tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ risulta $\|x_n - x_m\| \leq 1$. In particolare per $n \geq \bar{n}$:

$$\|x_n\| = \|x_n - x_{\bar{n}} + x_{\bar{n}}\| \leq \|x_n - x_{\bar{n}}\| + \|x_{\bar{n}}\| \leq 1 + \|x_{\bar{n}}\|.$$

Ne segue che preso un n arbitrario:

$$\|x_n\| \leq \max(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{\bar{n}-1}\|, 1 + \|x_{\bar{n}}\|).$$

□

1.7.4 Definizione (completezza). Si dice che uno spazio normato \mathcal{X} è completo se ogni successione di Cauchy converge a un punto $x \in \mathcal{X}$.

1.7.5 Teorema. *Lo spazio \mathbb{R}^N è completo.*

Dimostrazione. Facciamo vedere che \mathbb{R} è completo. Sia data una successione di numeri reali (x_n) che sia di Cauchy. Dato che (x_n) è limitata esiste un sottosuccessione (x_{n_k}) ed esiste $x \in \mathbb{R}$ per cui $x_{n_k} \rightarrow x$. Sia ora $\varepsilon > 0$ e scegliamo \bar{n} come dalla proprietà di Cauchy. Dato che $n_k \rightarrow +\infty$ (n_k NON x_{n_k}) si ha che $n_k \geq \bar{n}$ per k abbastanza grande. Dunque se $n \geq \bar{n}$ e k è grande abbiamo:

$$\|x_n - x_{n_k}\| \leq \varepsilon.$$

Facendo tendere $k \rightarrow \infty$ si ha $x_{n_k} \rightarrow x$ da cui:

$$\|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

che (essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario) è la definizione di $x_n \rightarrow x$. Questo dimostra il caso $N = 1$.

Nel caso generale basta notare che se (\mathbf{x}_n) è di Cauchy in \mathbb{R}^N , ogni componente $(x_{i,n})$ è di Cauchy in \mathbb{R} (per $i = 1, \dots, N$), come è facile verificare. Dunque esistono x_1, \dots, x_N tali che $x_{i,n} \rightarrow x_i$ per $i = 1, \dots, N$. Posto $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N)$ si ha allora $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ e la dimostrazione è conclusa. □

La completezza gioca un ruolo chiave in moltissime questioni. Ne riportiamo due.

1.7.6 Definizione (serie assolutamente convergenti). Data una successione (x_n) in uno spazio normato \mathcal{X} si definisce la *serie degli x_n* come la successione S_n delle somme parziali, definite da:

$$S_n := x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Si dice che la *serie degli x_n* è *convergente* o anche che la *successione (x_n)* è *sommabile*, se la successione (S_n) ammette limite S in \mathcal{X} . Se questo accade il punto S si chiama *somma della serie degli x_n* e lo si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. In realtà, con abuso di linguaggio, spesso si

indica con $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ anche la serie (oltrechè la sua somma) cioè la successione (S_n) .

Si dice che la *serie degli x_n* è *assolutamente convergente* o anche che la *successione (x_n)* è *assolutamente sommabile*, se la serie di numeri reali positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ è convergente.

Si noti che quest'ultima serie, essendo a termini positivi può solo convergere o divergere a $+\infty$ e che a questa serie si possono applicare i criteri quelli del confronto.

1.7.7 Teorema. *Se lo spazio \mathcal{X} è completo ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione e siano

$$S_n := x_1 + \cdots + x_n, \quad \sigma_n := \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$$

le somme parziali di $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e di $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ rispettivamente. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converga assolutamente cioè che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converga. Questo significa che (σ_n) converge per cui è di Cauchy. Dunque dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\sigma_n - \sigma_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

(c'è il valore assoluto perché siamo in \mathbb{R}). Se allora $n \geq m \geq \bar{n}$ si ha:

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| = \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_k\| - \sum_{k=1}^m \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque (S_n) è di Cauchy. Per la completezza di \mathcal{X} (S_n) ha limite cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. \square

Un altro risultato legato alla completezza è il Teorema delle Contrazioni.

1.7.8 Definizione (contrazioni). Chiamiamo *contrazione* un'applicazione $f : A \rightarrow A$, dove $A \subset \mathcal{X}$, tale che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad \forall x, y \in A.$$

per un'opportuna costante $\alpha < 1$. Notiamo che una contrazione è sicuramente continua.

1.7.9 Teorema (delle contrazioni). *Se \mathcal{X} è completo ogni contrazione f definita su un insieme A chiuso ha un punto fisso $\bar{x} \in A$, cioè un punto tale che*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Dimostrazione. Prendiamo un punto (a caso) $x_0 \in A$ e definiamo ricorsivamente una successione (x_n) ponendo:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \geq 1$$

(dunque $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$ e così via). Preso $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \leq \\ &\leq \alpha^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \cdots \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\| = \alpha^n \|f(x_0) - x_0\|. \end{aligned}$$

Più in generale se $n > m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \left\| \sum_{k=m}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k \|f(x_0) - x_0\| \leq \\ &\leq \|f(x_0) - x_0\| \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k = \|f(x_0) - x_0\| \alpha^m \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \|f(x_0) - x_0\| \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

La disuguaglianza sopra implica che (x_n) è di Cauchy, perché se $\varepsilon > 0$ basta fissare \bar{n} in modo che $\|f(x_0) - x_0\| \frac{\alpha^{\bar{n}+1}}{1-\alpha} < \varepsilon$ per avere $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ per $n, m \geq \bar{n}$. Dato che \mathbb{X} è completo esiste $\bar{x} \in \mathbb{X}$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Dato che A è chiuso $\bar{x} \in A$. Dato che (x_{n+1}) è un'estratta da (x_n) si ha anche $x_{n+1} \rightarrow \bar{x}$ e per la continuità di f vale $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Andando al limite nella relazione $x_{n+1} = f(x_n)$ otteniamo la tesi:

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$

□

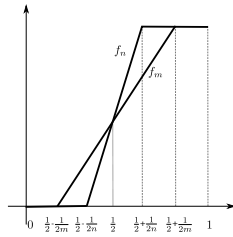
Concludiamo mostrando un esempio di spazio vettoriale non completo.

1.7.10 Esempio (\star). Consideriamo lo spazio \mathbb{X} delle funzioni continue su $[0, 1]$ con la norma introdotta nell'Esempio (1.6.8). Consideriamo le funzioni $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ n(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che le f_n sono continue ($f_n \in \mathbb{X}$). Siano $m \leq n$ interi. Notiamo che:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, 1].$$



Ne segue:

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}} (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \leq \frac{1}{m} \frac{1}{4}.$$

Se ne ricava che (f_n) è una successione di Cauchy. In effetti dato $\varepsilon > 0$ si può prendere $\bar{n} := 1/4\varepsilon^2$, di modo che, quando $n \geq m \geq \bar{n}$ si ha:

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \frac{1}{4m} \leq \frac{1}{4\bar{n}} = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

Se \mathbb{X} fosse completo esisterebbe $f \in \mathbb{X}$ tale che $f_n \rightarrow f$. Dico che:

$$(a) \quad 0 \leq f \leq 1, \quad (b) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0, \quad (c) \quad \int_{1/2}^1 (1 - f(x)) dx = 0.$$

Le proprietà (a), (b) e (c), per quanto intuitive non sono evidenti. Vediamo come si dimostra la (a). Per questo definiamo la funzione ausiliaria $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - 1 & \text{se } 1 \leq f(x), \\ 0 & \text{se } 0 \leq f(x) \leq 1, \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente dalla definizione che $g \geq 0$ e che g è continua (se f lo è). Inoltre:

$$g(x) \leq |f(x) - f_n(x)| \quad \forall x \in [0, 1].$$

Infatti se $0 \leq f(x) \leq 1$ si ha $g(x) = 0$, dunque la tesi è vera. Se invece $f(x) \geq 1$ si ha $g(x) = f(x) - 1 \leq f(x) - f_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ (dato che $f_n \leq 1$). Analogamente se $f(x) \leq 0$ si ha $g(x) = -f(x) \leq f_n(x) - f(x) = |f(x) - f_n(x)|$ (dato che $f_n \geq 0$). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = \langle 1, |f - f_n| \rangle \leq \|1\| \|f - f_n\| = \|f - f_n\|$$

(qui stiamo usando la disuguaglianza di Schwartz per il prodotto scalare introdotto in (1.6.8) tra la funzione identicamente eguale a 1 e la funzione $|f - f_n|$; la norma della funzione 1 vale $\sqrt{\int_0^1 1^2 dx} = 1$). Dato che $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ l'unica possibilità è che $\int_0^1 g(x) dx = 0$. Ma allora, essendo g continua, deve essere $g(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$. Per la definizione di g ne segue $0 \leq f \leq 1$. Mostriamo che vale (b). Se $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{1/2} f(x) dx &= \int_0^{1/2} (f(x) - f_n(x)) dx + \int_0^{1/2} f_n(x) dx \leq \int_0^{1/2} |f(x) - f_n(x)| dx + \\ &\int_{1/2-1/2n}^{1/2} f_n(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx + \int_{1/2-1/2n}^{1/2} (1/2) dx \leq \|1\| \|f - f_n\| + 1/4n. \end{aligned}$$

Ragionando come nella dimostrazione di (a) si conclude che $\int_0^{1/2} f(x) dx = 0$. In maniera analoga si dimostra (c).

Da (a), (b) e (c) (e dalla continuità di f) si ricava facilmente che f dovrebbe essere nulla su $[0, 1/2[$ ed eguale a uno su $]1/2, 1]$. Questo è chiaramente impossibile se f è continua e dunque non può esistere una tale f .

Capitolo 2

Curve e integrali curvilinei

2.1 Curve

2.1.1 Definizione. Sia $A \subset \mathbb{R}^M$. Chiamiamo *curva in A* una applicazione $\gamma : I \rightarrow A$ dove I è un intervallo in \mathbb{R} .

Nel caso (tipico) in cui $I = [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ diremo che $P = \gamma(a)$ è il *primo estremo* di γ e $Q = \gamma(b)$ è il *secondo estremo* di γ , oppure che γ *congiunge* P a Q . Diremo che γ è *chiusa* (in A) se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Se γ è una curva chiamiamo *sostegno di γ* l'immagine di γ , cioè $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}$.

Mettiamo in evidenza che per definire una curva non basta dare il sostegno $S = \gamma(I)$ ma si deve anche precisare la “legge del moto” con cui il punto $\gamma(t)$ percorre S . Per esempio gli estremi della curva dipendono da questa legge. Se infatti $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$, allora γ ha come estremi $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \mathbf{0}$, dunque è una curva chiusa. Il sostegno di γ è $\{(x, x) : -1 \leq x \leq 1\}$. Peraltro se $\gamma_1(t) = (t, t)$, per $t \in [-1, 1]$, allora γ_1 ha lo stesso sostegno di γ ma gli estremi di γ_1 sono $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

Notiamo anche che $\gamma(t)$ induce un “verso” sul sostegno. In effetti le due curve (chiusure):

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t)), \quad \gamma_1(t) := (\cos(t), -\sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

hanno entrambe come sostegno la circonferenza $S := \{x^2 + y^2 = 1\}$, ma la prima “percorre S in verso antiorario” mentre la seconda “percorre S in verso orario”.

2.1.2 Definizione. Essendo le curve delle funzioni di variabile reale ha senso dire che una curva γ è *continua*, *derivabile*, *k volte derivabile*. Indicheremo

$$\gamma^{(i)}(t) = (\gamma_1^{(i)}(t), \dots, \gamma_M^{(i)}(t)) \quad (\in \mathbb{R}^M)$$

la derivata i -esima di γ nel punto t . Al solito $\gamma^{(0)} = \gamma$, $\gamma' = \gamma^{(1)}$, $\gamma'' = \gamma^{(2)}$.

Diremo che una curva è di classe \mathcal{C}^k su I o che $\gamma \in \mathcal{C}^k(I)$ se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ ha derivate fino all'ordine k in $\overset{\circ}{I}$ e tali derivate $\gamma^{(j)}$ si prolungano con continuità a tutto I . Se $\gamma \in \mathcal{C}^k(I)$ per ogni intero k diremo che γ è di classe \mathcal{C}^∞ su I o che $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Un altro modo equivalente per definire la classe $\mathcal{C}^k([a, b])$ è di dire che γ è derivabile k volte in $]a, b[$ e che, per ogni i tra 0 e k esistono:

$$\gamma^{(i)}(a^+) := \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma^{(i)}(t), \quad \gamma^{(i)}(b^-) := \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma^{(i)}(t).$$

N.B. : le notazioni a^+ e b^- sono suggestive per ricordare che si arriva ad a da destra e a b da sinistra, ma non definiscono a^+ e b^- individualmente. Se c'è solo l'intervallo $[a, b]$ si può tranquillamente usare $\gamma^{(i)}(a)$ invece di $\gamma^{(i)}(a^+)$, e lo stesso per b .

Diremo che $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ è \mathcal{C}^k a tratti su I se $\gamma \in \mathcal{C}^0(I)$ e si possono trovare un numero finito di punti $t_1 < t_2 < \dots < t_K$ in I tali che posto $t_0 := -\infty$, $t_{K+1} := +\infty$ si abbia:

$$\gamma \in \mathcal{C}^k([t_j, t_{j+1}] \cap I).$$

Se γ è \mathcal{C}^k a tratti su I , allora le derivate $\gamma^{(j)}(t)$ esistono per tutte le t diverse da t_1, \dots, t_K , mentre se t è uno di questi punti esistono comunque la derivata sinistra $\gamma^{(j)}(t^-)$ e la derivata destra $\gamma^{(j)}(t^+)$, definite come sopra (fanno eccezione il primo punto $a = \inf I$, se $a \in I$, in cui non esiste $\gamma^{(i)}(a^-)$ e il punto $b = \sup I$, se $b \in I$, in cui non esiste $\gamma^{(i)}(b^+)$).

Diciamo che γ è *regolare* se $\gamma \in \mathcal{C}^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$. Diciamo che γ è *regolare a tratti* se $\gamma \in \mathcal{C}^0(I)$ e si possono trovare un numero finito di punti $t_1 < t_2 < \dots < t_K$ come prima tali che γ sia regolare su ogni $[t_j, t_{j+1}] \cap I$.

2.1.3 Osservazione. Il motivo per cui si chiede $\gamma' \neq \mathbf{0}$ per definire la regolarità si intuisce dal seguente esempio. Prendiamo $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ per $t \in [-1, 1]$. È chiaro che $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1])$. Se però si disegna il sostegno S di γ si trova

$$S = \underbrace{\{(x, x^{3/2}) : 0 \leq x \leq 1\}}_{=: S_1} \cup \underbrace{\{(x, -x^{3/2}) : 0 \leq x \leq 1\}}_{=: S_2}$$

e si vede che i due insiemi S_1 e S_2 formano una “cuspidine” nel punto $\mathbf{0}$ in cui si intersecano. Si può vedere che nessuna γ regolare può avere S come sostegno; è invece possibile ottenere S come sostegno di una curva regolare a tratti: basta prendere

$$\gamma_1(t) := (|t|, \operatorname{sgn}(t)|t|^{3/2}) \quad -1 \leq t \leq 1;$$

la γ_1 è $\mathcal{C}^1([0, 1])$ ed è $\mathcal{C}^1([-1, 0])$, ma $\gamma'(0^+) = (1, 0) \neq \gamma'(0^-) = (-1, 0)$.

2.1.4 Proposizione. *Siamo I un intervallo, $t_0 \in I$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ delle curve derivabili in t_0 e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in t_0 . Allora è vero quanto segue.*

- $\gamma_1 + \gamma_2$ è derivabile in t_0 e $(\gamma_1 + \gamma_2)'(t_0) = \gamma_1'(t_0) + \gamma_2'(t_0)$.
- $f\gamma$ è derivabile in t_0 e $(f\gamma)'(t_0) = f'(t_0)\gamma(t_0) + f(t_0)\gamma'(t_0)$. Se $f(t) = c$ è costante si ricava $(c\gamma)'(t_0) = c\gamma'(t_0)$.
- $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ è derivabile in t_0 e $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t_0) = \gamma_1'(t_0) \cdot \gamma_2(t_0) + \gamma_1(t_0) \cdot \gamma_2'(t_0)$.

2.1.5 Osservazione. Dalla formula sulla derivata del prodotto scalare segue che, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ è derivabile e se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^M$, allora

$$\frac{d}{dt} \|\gamma(t) - \mathbf{x}_0\|^2 = \frac{d}{dt} (\gamma(t) - \mathbf{x}_0) \cdot (\gamma(t) - \mathbf{x}_0) = 2(\gamma(t) - \mathbf{x}_0) \cdot \gamma'(t).$$

Se ne deduce che, se $\|\gamma(t) - \mathbf{x}_0\|$ è costante, allora $\gamma'(t)$ è sempre ortogonale a $(\gamma(t) - \mathbf{x}_0)$.

2.1.6 Proposizione. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva di classe \mathcal{C}^1 . Allora*

$$\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} \|\gamma'(t)\| \right) |t_2 - t_1| \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Se $t_1 \in [a, b]$ e definiamo $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $p(t) := \|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|$. Dato che $p(t) = \sqrt{\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|^2}$ (usando la derivata della norma al quadrato) si ha:

$$p'(t) = \frac{2(\gamma(t) - \gamma(t_1)) \cdot \gamma'(t)}{2\sqrt{\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|^2}} = \frac{(\gamma(t) - \gamma(t_1))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|} \cdot \gamma'(t) \quad \forall t \neq t_1.$$

Usando Schwartz se ne ricava che $|p'(t)| \leq \|\gamma'(t)\|$. Prendiamo $t_2 \in [a, b]$ con $t_2 \neq t_1$ e applichiamo Lagrange alla funzione p :

$$\left| \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = |p'(\xi)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |p'(t)| \leq \max_{a \leq x \leq b} \|\gamma(t)\|.$$

(ξ è il punto intermedio tra t_1 e t_2 ottenuto dal teorema di Lagrange e si è usata la disuguaglianza sopra). Ne segue la tesi poiché $|p(t_2) - p(t_1)| = p(t_2) - p(t_1) = \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|$. \square

2.1.7 Osservazione. Il Teorema di Lagrange NON si può estendere alle curve: non è vero infatti che, se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ è derivabile in $[a, b]$ si trova ξ tra a e b per cui

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} = \gamma'(\xi).$$

Un controesempio è dato dall'*elica* $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

Si vede infatti che

$$\frac{\gamma(2\pi) - \gamma(0)}{2\pi - 0} = (0, 0, 1),$$

mentre in nessun punto t la $\gamma'(t)$ ha mai nulle entrambe le prime due componenti.

2.1.8 Definizione. Date due curve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^M$ diciamo che γ_1 è una *riparametrizzata* di γ , o che γ_1 si *ottiene da γ mediante un cambio di parametro*, se esiste una funzione $\varphi : I_1 \rightarrow I$ tale che φ è continua, bigettiva e $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$ per ogni $s \in I_1$. Se questo avviene diciamo che φ (o $t = \varphi(s)$) è la *riparametrizzazione* o il *cambio di parametro* che fa passare da γ a γ_1 . È chiaro che in questa situazione γ e γ_1 hanno lo stesso sostegno.

2.1.9 Osservazione. Le due curve dell'Osservazione (2.1.3) sono una riparametrizzata dell'altra. Infatti se $\varphi(s) = \operatorname{sgn}(t)\sqrt{|s|}$ per $s \in [-1, 1]$, allora $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$.

2.1.10 Definizione. Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^M (senza particolari proprietà). Diremo che un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ è *tangente ad A in un punto $\mathbf{x}_0 \in A$* se esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste una curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$ di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$, $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

2.1.11 Osservazione. Notiamo che il vettore nullo è sempre tangente a qualunque insieme A in un qualunque suo punto \mathbf{x}_0 , dato che si può sempre considerare la curva costante $\gamma(t) = \mathbf{x}_0$, che ha ovviamente derivata nulla. Inoltre se \mathbf{v} è tangente ad A in \mathbf{x}_0 allora anche $\lambda\mathbf{v}$ è tangente ad A in \mathbf{x}_0 , per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ questo è chiaro per quanto appena detto, altrimenti supponiamo $\lambda \neq 0$ e prendiamo $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$ curva \mathcal{C}^1 con $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Poniamo $\varepsilon_1 := \varepsilon/|\lambda|$ e $\varphi :]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\rightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[$ definita da $\varphi(s) := \lambda s$. φ è un cambio di parametro (che mantiene il verso se $\lambda > 0$, mentre lo scambia se $\lambda < 0$) e $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ ha le proprietà $\gamma_1 :]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\rightarrow A$, $\gamma_1(0) = \mathbf{x}_0$, $\gamma_1(s) = \varphi'(s)\gamma'(\lambda s) \Rightarrow \gamma_1'(0) = \lambda\mathbf{v}$. Dunque $\lambda\mathbf{v}$ è tangente ad A in \mathbf{x}_0 .

Non è invece vero in generale che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tangenti ad A in \mathbf{x}_0 implica $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ tangente ad A in \mathbf{x}_0 . Per esempio se $A := \{(x, y) : x^2 - y^2 = 0\}$, cioè se A è l'unione delle due rette $\{x = y\}$ e $\{x = -y\}$ allora i vettori $(1, 1)$ e $(1, -1)$ sono tangenti ad A nell'origine, ma il vettore $(0, 2) = (1, 1) + (-1, 1)$ non lo è. Per quest'ultima proprietà ci vuole una maggiore "regolarità" di A .

2.2 Integrali curvilinei di prima specie

2.2.1 Definizione. (integrale curvilineo di primo tipo) Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ una curva di classe \mathcal{C}^1 e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Chiamiamo integrale di f lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Si può anche scrivere $\int_{\gamma} f(\mathbf{x}) \, ds$ per esprimere la definizione di f (anche se non è una notazione rigorosa). Si può generalizzare questa nozione al caso in cui γ è \mathcal{C}^1 a tratti:

$$\int_{\gamma} f \, ds := \sum_{i=1}^K \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

dove $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ sono tali che $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_{i-1}, t_i])$ per $i = 1, \dots, K$.

2.2.2 Definizione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ una curva di classe \mathcal{C}^1 . Chiamiamo *lunghezza* di γ l'integrale su γ della funzione $f(x) = 1$:

$$\ell(\gamma) := \int_{\gamma} 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

2.2.3 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$, $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ sono curve \mathcal{C}^1 e se $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametro di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, allora per qualunque funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si ha:

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds.$$

Lo stesso risultato vale se γ è \mathcal{C}^1 a tratti.

Dimostrazione. Usando il cambio di variabile $t = \varphi(s)$ nell'integrale si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f \, ds &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \|\gamma_1'(s)\| \, ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\varphi(s))) |\varphi'(s)| \|\gamma'(\varphi(s))\| \, ds = \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{\gamma} f \, ds. \end{aligned}$$

La generalizzazione al caso \mathcal{C}^1 a tratti è immediata. \square

2.2.4 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ è curva di classe \mathcal{C}^1 (a tratti), se $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora:

$$\int_{\gamma} (\lambda f + \mu g) \, ds = \lambda \int_{\gamma} f \, ds + \mu \int_{\gamma} g \, ds$$

2.2.5 Definizione (curva opposta). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva. Definiamo la *curva opposta* di γ come $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita da

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t) \quad \forall t \in [a, b].$$

È chiaro che $\tilde{\gamma}$ è una particolare riparametrizzata di γ e che gli estremi delle due curve si scambiano tra loro. La curva $\tilde{\gamma}$ “percorre il sostegno in verso opposto” a quello di γ . Per quanto visto sopra, se f è continua definita sul sostegno di γ , si ha:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \, ds = - \int_{\gamma} f \, ds$$

2.2.6 Definizione. (incollamento di curve) Siano $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $\gamma_2 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ due curve. Diciamo che γ_1 e γ_2 sono *consecutive* se $b = a_1$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(a_1)$. Se γ_1 e γ_2 sono consecutive definiamo la curva $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ ponendo:

$$\gamma : [a, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^M \quad \gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1]. \end{cases}$$

2.2.7 Proposizione. Se γ_1 e γ_2 sono due curve di classe \mathcal{C}^1 (o \mathcal{C}^1 a tratti) consecutive, allora per ogni funzione continua f (definita sul sostegno di $\gamma_1 \vee \gamma_2$) si ha:

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds.$$

2.2.8 Osservazione. Se guardiamo le definizioni vediamo che una curva γ è \mathcal{C}^1 a tratti se e solo se esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ curve di classe \mathcal{C}^1 consecutive e tali che $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_K$.

2.2.9 Osservazione. Nella definizione di incollamento non è così importante che $b = a_1$ dato che possiamo sempre usare una traslazione come cambio di parametro in modo che questa proprietà sia vera. È allora sempre possibile incollare una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ con la sua opposta: $\gamma \vee \tilde{\gamma}$ ottenendo una curva chiusa.

In generale l'intervallo I su cui è definita una curva γ è abbastanza arbitrario (almeno ai fini dell'integrale su γ). Si potrebbe decidere che ogni curva definita su un intervallo chiuso e limitato sia in realtà definita su $[0, 1]$. Un'altra alternativa sarebbe di scegliere la parametrizzazione in modo che $\|\gamma'(t)\| = 1$.

2.2.10 Proposizione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ una curva regolare di classe \mathcal{C}^1 e sia $L := \ell(\gamma)$. Allora esiste una riparametrizzazione $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ ha la proprietà $\|\gamma_1'(s)\| = 1$ per ogni $s \in [0, L]$. In questo modo il parametro $s \in [0, L]$ rappresenta la lunghezza del tratto di γ_1 tra 0 ed s : si dice che γ_1 è parametrizzata in lunghezza d'arco.

Dimostrazione. Definiamo $l : [a, b] \rightarrow [0, L]$ ponendo:

$$l(t) := \int_a^t \|\gamma(\tau)\| \, d\tau.$$

È chiaro che $l(a) = 0$, $l(b) = L$, l è derivabile e $l'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ (la curva è regolare!). Dunque l è bigettiva e la sua inversa $\varphi := l^{-1}$ è una funzione bigettiva da $[0, L]$ in $[a, b]$, derivabile e si ha (derivata della funzione inversa):

$$\varphi'(s) = \frac{1}{l'(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} \quad \forall s \in [0, L]$$

Se definiamo $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ abbiamo $\gamma_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^M$ e per ogni $s \in [0, L]$:

$$\gamma_1'(s) = \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) = \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) = \frac{\gamma'(\varphi(s))}{\|\gamma'(\varphi(s))\|} \Rightarrow \|\gamma_1'(s)\| = 1.$$

□

2.2.11 Esempio. Siano dati $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^M$. La curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita da:

$$\gamma(t) := t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad t \in [0, 1],$$

descrive il segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 . La sua lunghezza vale $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$, infatti

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \, dt = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

2.2.12 Proposizione. Sia $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{M-1}$ e definiamo $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ ponendo

$$\gamma(t) := (t, \hat{\gamma}(t)) = (t, \hat{\gamma}_1(t), \dots, \hat{\gamma}_{M-1}(t)).$$

La curva γ si dice grafico di $\hat{\gamma}$. Si ha allora $\gamma(t) := (1, \hat{\gamma}'(t)) = (1, \hat{\gamma}'_1(t), \dots, \hat{\gamma}'_{M-1}(t))$, da cui $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \|\hat{\gamma}'(t)\|^2}$. Dunque

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(t, \hat{\gamma}(t)) \sqrt{1 + \|\hat{\gamma}'(t)\|^2} \, dt.$$

In particolare

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \|\hat{\gamma}'(t)\|^2} \, dt.$$

Il caso più semplice è quello in cui $M = 2$, dunque $\hat{\gamma}$ è una funzione scalare che possiamo indicare con $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (invece che con $\hat{\gamma}$). Allora $\gamma(t) = (t, g(t))$ e

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(t, g(t)) \sqrt{1 + |g'(t)|^2} \, dt, \quad \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |g'(t)|^2} \, dt.$$

2.2.13 Esempio (lunghezza di un arco di parabola). Prendiamo la curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) := (t, t^2)$, che è il grafico della funzione g tale che $g(x) = x^2$. Allora:

$$\ell(\gamma) = \int_0^L \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \frac{L\sqrt{1 + L^2}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2L)}{2}.$$

2.2.14 Esempio. Anche l'elica che abbiamo già incontrato $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ è un grafico (rispetto alla coordinata z), dove $\hat{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Più in generale si può prendere $\hat{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\hat{\gamma}(t) := (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ con $\omega > 0$ e $\gamma(t) = (\hat{\gamma}(t), t)$, di modo che $\hat{\gamma}'(t) = \omega(-\sin(t), \cos(t))$ da cui $\|\hat{\gamma}'(t)\| = \omega$ e $\ell(\gamma) = \int_0^L \sqrt{1 + \omega^2} \, dt = L\sqrt{1 + \omega^2}$.

2.2.15 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ è una curva, A è chiuso e limitato e \mathcal{C}^1 e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora:

$$\left| \int_{\gamma} f \, ds \right| \leq \max_{\mathbf{x} \in A} |f(\mathbf{x})| \ell(\gamma).$$

2.2.16 Definizione. Si può estendere l'integrale curvilineo a funzioni vettoriali. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ è una curva di classe \mathcal{C}^1 e se $\vec{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione (a valori vettoriali) continua, allora:

$$\int_{\gamma} \vec{f} \, ds = \int_{\gamma} (f_1, \dots, f_N) \, ds := \left(\int_{\gamma} f_1 \, ds, \dots, \int_{\gamma} f_N \, ds \right).$$

In sostanza si integra “componente per componente”.

2.2.17 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^M$ è una curva di classe \mathcal{C}^1 e se $\vec{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua, allora:

$$\left\| \int_{\gamma} \vec{f} \, ds \right\| \leq \int_{\gamma} \|\vec{f}\| \, ds \tag{2.2}$$

2.2.18 Esempio. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva \mathcal{C}^1 che descrive un *filo* nello spazio e sia $\sigma = \sigma(x, y, z)$ una funzione reale positiva definita sul sostegno di γ che descrive la *densità* di ogni punto del filo. Allora:

$$M(\gamma) = \int_{\gamma} \sigma \, ds$$

è la massa del filo. Inoltre il punto

$$P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := \frac{\int_{\gamma} \sigma(x, y, z)(x, y, z) \, ds}{\int_{\gamma} \sigma(x, y, z) \, ds} = \frac{\int_{\gamma} \sigma(\mathbf{x})\mathbf{x} \, ds}{\int_{\gamma} \sigma(\mathbf{x}) \, ds}$$

(a numeratore c'è l'integrale su γ della funzione vettoriale $\vec{f}(\mathbf{x}) := \sigma(\mathbf{x})\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$) rappresenta il *centro di massa del filo*. Nel caso $\sigma \equiv 1$ il punto

$$B(\gamma) := \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\gamma} (x, y, z) \, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\gamma} \mathbf{x} \, ds$$

è detto *centro geometrico* (spesso *baricentro*) del filo.

2.3 Lunghezza geometrica di una curva

2.3.1 Definizione. Ricordiamo che, dato un intervallo $[a, b]$ in \mathbb{R} si chiama *suddivisione* di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\sigma = (t_i)_{i=0, \dots, k}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$. Indichiamo con $\Sigma(a, b)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di $[a, b]$.

2.3.2 Definizione. Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva. Data una suddivisione $(t_i)_{i=0, \dots, k} \in \Sigma(a, b)$ poniamo

$$\ell(\gamma, \sigma) := \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \dots + \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

e chiamiamo *lunghezza geometrica di γ* il numero (eventualmente $+\infty$):

$$\ell_G(\gamma) := \sup_{\sigma \in \Sigma(a, b)} \ell(\gamma, \sigma). \quad (2.3)$$

Se $\ell_G(\gamma) < +\infty$ diciamo che γ è *rettificabile*.

2.3.3 Osservazione. Dalla definizione si vede che, se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$, allora:

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \ell_G(\gamma).$$

Inoltre se $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^M$ e $\gamma(t) = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ (segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1), allora $\ell_G(\gamma) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$. Infatti se σ è una qualunque suddivisione di $[0, 1]$, allora $\ell(\gamma, \sigma) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$ (dato che, essendo i punti $\gamma(t_i)$ tutti allineati, vale l'eguaglianza nella disuguaglianza triangolare) – passando al sup si ha la tesi.

Dunque, tra le curve che congiungono due punti, il segmento ha lunghezza minima.

2.3.4 Proposizione. Se $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ è una riparametrizzata di $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$, allora $\ell_G(\gamma_1) = \ell_G(\gamma)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$, continua, bigettiva e tale che $\gamma_1 = \gamma_\varphi$. Allora per ogni $\sigma_1 = \{\tau_0, \dots, \tau_k\}$ suddivisione di $[a_1, b_1]$ i punti $t_i := \varphi(\tau_i)$ formano una suddivisione $\sigma = \varphi(\sigma_1)$ di $[a, b]$ (notiamo che φ , essendo continua e bigettiva, deve essere strettamente crescente per cui i punti t_i sono ancora ordinati, eventualmente in verso opposto, e in particolare $t_0 = a$ e $t_k = b$ oppure $t_0 = b$ e $t_k = a$). Allora:

$$\forall \sigma_1 \in \Sigma(a_1, b_1) \quad \ell(\gamma_1, \sigma_1) = \ell(\gamma, \varphi(\sigma_1)) \leq \ell_G(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \ell_G(\gamma_1) \leq \ell_G(\gamma).$$

D'altra parte si possono scambiare i ruoli di γ e γ_1 (anche φ^{-1} è continua e bigettiva) ottenendo la disuguaglianza opposta. \square

2.3.5 Proposizione. *Se γ_1 e γ_2 sono consecutive, allora $\ell_G(\gamma_1 \vee \gamma_2) = \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2)$ (con l'ovvia convenzione sugli infiniti).*

Dimostrazione. Siano $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^M$ e supponiamo $b_1 = a_2$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.

Se σ_1 è una suddivisione di $[a_1, b_1]$ e σ_2 è una suddivisione di $[a_2, b_2]$, allora $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ (ottenuta mettendo insieme tutti i punti) è una suddivisione di $[a_1, b_2]$ e vale

$$\ell_G(\gamma_1 \vee \gamma_2) \geq \ell(\gamma_1 \vee \gamma_2, \sigma) = \ell(\gamma_1, \sigma_1) + \ell(\gamma_2, \sigma_2).$$

Prendendo gli estremi superiori in σ_1 e σ_2 si ottiene:

$$\ell_G(\gamma_1 \vee \gamma_2) \geq \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2).$$

Viceversa data σ suddivisione di $[a_1, b_2]$ prendiamo $\sigma' := \sigma \cup \{b_1\}$ (aggiungiamo a σ il punto $b_1 = a_2$). Definiamo inoltre σ_1 prendendo tutti i punti di σ' minori o eguali a $b_1 = a_2$ e σ_2 prendendo tutti i punti di σ' maggiori o eguali a $b_1 = a_2$; in questo modo σ_1 è una suddivisione di $[a_1, b_1]$ e σ_2 è una suddivisione di $[a_2, b_2]$. Si ha allora:

$$\ell(\gamma_1 \vee \gamma_2, \sigma) \leq \ell(\gamma_1 \vee \gamma_2, \sigma') = \ell(\gamma_1, \sigma_1) + \ell(\gamma_2, \sigma_2) \leq \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2).$$

Prendendo l'estremo superiore in σ :

$$\ell_G(\gamma_1 \vee \gamma_2) \leq \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2).$$

da cui la tesi. \square

2.3.6 Osservazione. Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva. Per ogni $T \in [a, b]$ consideriamo la curva $\gamma_T : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita come la restrizione di γ all'intervallo $[a, T]$ e chiamiamo $\tilde{\gamma}_T$ la restrizione a $[T, b]$. Dalla Proposizione precedente segue che $\ell_G(\gamma_T) \leq \ell_G(\gamma)$ per ogni $T \in [a, b]$. Infatti $\gamma = \gamma_T \vee \tilde{\gamma}$ e dunque $\ell_G(\gamma) = \ell_G(\gamma_T) + \ell_G(\tilde{\gamma}) \geq \ell_G(\gamma_T)$. Quindi l'applicazione $T \mapsto \ell_G(\gamma_T) =: l(T)$ è crescente e per cui ammette limite destro $l(T^+)$ e limite sinistro $l(T^-)$ in ogni T di $[a, b]$. Questi due limiti possono essere diversi: se per esempio $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da:

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (t, 1) & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

allora si può dimostrare che

$$l(T) := \ell(\gamma_T) = \begin{cases} T & \text{se } 0 \leq T \leq \frac{1}{2}, \\ T + 1 & \text{se } \frac{1}{2} < T \leq 1, \end{cases}$$

Infatti se $T \leq 1/2$ la γ_T è un segmento tra $(0, 0)$ e $(T, 0)$ che ha dunque lunghezza T . Supponiamo allora $T \in]1/2, 1]$ e consideriamo $\hat{\gamma}_T : [1/2, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\hat{\gamma}_T(1/2) = (T, 0)$ e $\hat{\gamma}_T(t) = (t, 1)$ se $t \in]1/2, T]$. Voglio calcolare $\ell_G(\hat{\gamma}_T)$: per questo considero una suddivisione $\hat{\sigma} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di $[1/2, T]$ e calcolo:

$$\ell(\hat{\gamma}_T, \hat{\sigma}) = \|\hat{\gamma}(t_1) - \hat{\gamma}(t_0)\| + \sum_{i=2}^k \|\hat{\gamma}(t_i) - \hat{\gamma}(t_{i-1})\| = \sqrt{1 + (t_1 - 1/2)^2} + (T - t_1)$$

(perché i punti $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_k)$ sono tutti allineati). È facile vedere che l'espressione scritta a destra è decrescente in t_1 per cui il suo estremo superiore coincide con il limite destro per $t_1 \rightarrow (1/2)^+$ che fa $1 + T - 1/2 = 1/2 + T$. Usando l'additività dell'incollamento: $\ell_G(\gamma_T) = \ell_G(\gamma_{1/2}) + \ell_G(\hat{\gamma}_T) = 1/2 + 1/2 + T = 1 + T$, per ogni $T > 1/2$.

Allora $1/2 = l((1/2)^-) < l((1/2)^+) = 3/2$.

Questo esempio mostra anche che **curve discontinue possono avere lunghezza finita**.

2.3.7 Esempio. Vediamo che **esistono curve continue con lunghezza infinita**.

Definiamo $\gamma : [0, \pi^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ponendo:

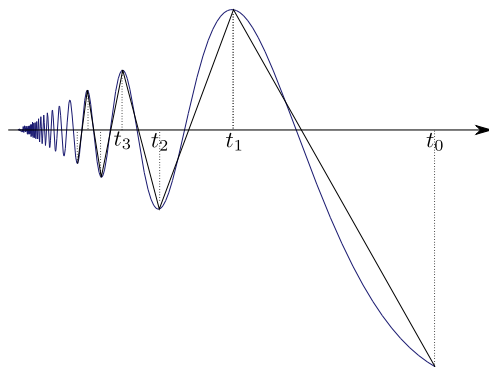
$$\gamma(t) := (t, t \cos(1/t)) \quad 0 < t \leq \pi^{-1}, \quad \gamma(0) := (0, 0).$$

È chiaro che γ è continua in $[0, \pi]$ (se $t \rightarrow 0^+$ si ha che $t \rightarrow 0$ e $\cos(1/t)$ è limitata). Consideriamo la successione $(t_n) = (\frac{1}{n\pi})$ per $n \geq 1$; allora $\gamma(t_n) = (t_n, t_n(-1)^n)$. Se $\sigma_n = \{0, t_n, t_{n-1}, \dots, t_1\}$, allora σ_n è una suddivisione di $[0, \pi^{-1}]$ e

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, \sigma_n) &= \|\gamma(t_n)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma_{t_{i+1}} - \gamma(t_i)\| \geq \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (t_{i+1} + t_i)^2} \geq \\ & \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} + t_i| = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(i+1)\pi} + \frac{1}{i\pi} \right) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Dato che $\ell_G(\gamma)$ è il sup di $\ell(\gamma, \sigma)$ si ha:

$$\ell_G(\gamma) \geq \ell(\gamma, \sigma_n) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell_G(\gamma) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$



Il seguente teorema dice che la definizione geometrica di lunghezza di una curva γ coincide con l'integrale curvilineo su γ della funzione 1, cioè con la definizione di lunghezza introdotta nel paragrafo precedente (quando quest'ultima ha senso). Questo ci autorizzerà a togliere l'indice G dal simbolo $\ell_G(\gamma)$ dato che non c'è ambiguità nello scrivere semplicemente $\ell(\gamma)$.

2.3.8 Teorema. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva regolare. Allora γ è rettificabile e

$$\ell_G(\gamma) = \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dimostrazione. La dimostrazione non è semplice e viene omessa. \square

2.3.9 Lemma. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ una curva continua di lunghezza finita. Se $T \in [a, b]$ indichiamo con γ_T la restrizione di γ all'intervallo $[a, T]$. Allora esiste T con $a < T < b$ per cui $\ell_G(\gamma_T) \geq \ell_G(\gamma)/2$.

Dimostrazione. Prima di fare la dimostrazione notiamo che il risultato è falso se γ non è continua. Per vederlo consideriamo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (0, 2) & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

(siamo imitando l'esempio di (2.3.6)). Allora si ha $\ell_G(\gamma) = 3$ mentre $\ell_G(\gamma_T) < 1$ per ogni $T \in]0, 1[$.

Dimostriamo il lemma. Per definizione di lunghezza si trova una suddivisione σ di $[a, b]$ per cui $\ell_G(\gamma, \sigma) \geq 3\ell_G(\gamma)/4$. Se σ è fatta dai punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ possiamo trovare un punto T con $t_{k-1} < T < t_k = b$ tale che $\|\gamma(T) - \gamma(b)\| < \ell_G(\gamma)/4$ (usando la continuità di γ). Indichiamo con $\tilde{\sigma}$ la suddivisione ottenuta aggiungendo T a σ e con σ^* la suddivisione di $[a, T]$ ottenuta da $\tilde{\sigma}$ togliendo $t_k = b$. Allora:

$$\begin{aligned} \ell_G(\gamma_T) &\geq \ell_G(\gamma_T, \sigma^*) = \ell_G(\gamma, \tilde{\sigma}) - \|\gamma(T) - \gamma(b)\| \geq \\ &\ell_G(\gamma, \sigma) - \|\gamma(T) - \gamma(b)\| \geq \frac{3}{4}\ell_G(\gamma) - \frac{1}{4}\ell_G(\gamma) = \frac{1}{2}\ell_G(\gamma). \end{aligned}$$

\square

2.3.10 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ è continua e rettificabile, allora

$$\lim_{T \rightarrow b^-} \ell_G(\gamma_T) = \ell_G(\gamma)$$

(stiamo sempre indicando con γ_T la restrizione di γ su $[a, T]$).

Dimostrazione. Dato che $\ell_G(\gamma_T)$ è crescente, esiste il limite

$$\tilde{L} := \lim_{T \rightarrow b^-} \ell_G(\gamma_T) = \sup_{T < b} \ell_G(\gamma_T) \leq \ell_G(\gamma).$$

Se fosse $\tilde{L} < \ell_G(\gamma)$ posto $\delta := \ell_G(\gamma) - \tilde{L} > 0$ avremmo:

$$\ell_G(\gamma|_{[T, b]}) = \ell_G(\gamma) - \ell_G(\gamma_T) \geq \delta \quad \forall T \in [a, b].$$

Ma allora, usando il Lemma (2.3.9), potremmo costruire una successione (a_n) con la seguente regola:

$$a_0 := a, \quad a_{n+1} \in]a_n, b[\text{ tale che } \ell_G(\gamma|_{[a_n, a_{n+1}]}) \geq \delta/2$$

(a_{n+1} si può costruire dato che $\ell_G(\gamma|_{[a_n, b]}) \geq \delta$). Ma allora, per ogni k intero:

$$\ell_G(\gamma) \geq \ell_G(\gamma|_{[a_0, a_k]}) = \sum_{i=1}^k \ell_G(\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}) \geq \frac{k}{2}\delta$$

da cui $\ell_G(\gamma) = +\infty$, contro l'ipotesi che γ fosse rettificabile. \square

2.3.11 Corollario. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ è continua su $[a, b]$ ed è $\mathcal{C}^1(]a, b[)$, allora:

$$\ell_G(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dove l'integrale è da intendersi in senso improprio e va considerato $+\infty$ se non converge.

Dimostrazione. Sia $M \in]a, b[$. Allora:

$$\ell_G(\gamma|_{[a, M]}) = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \ell_G(\gamma|_{[\alpha, M]}) \quad , \quad \ell_G(\gamma|_{[M, b]}) = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \ell_G(\gamma|_{[M, \beta]}).$$

Infatti se uno dei due limiti è infinito allora, per monotonia, la corrispondente porzione di curva ha lunghezza infinita, altrimenti si usa la Proposizione (2.3.10). Per il Teorema (2.3.8) si ha:

$$\ell_G(\gamma|_{[\alpha, M]}) = \int_{\alpha}^M \|\gamma'\| (t) dt \quad , \quad \ell_G(\gamma|_{[M, \beta]}) = \int_M^{\beta} \|\gamma'\| (t) dt$$

e quindi

$$\ell_G(\gamma|_{[a, M]}) = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^M \|\gamma'\| (t) dt \quad , \quad \ell_G(\gamma|_{[M, b]}) = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_M^{\beta} \|\gamma'\| (t) dt$$

che ci dà la tesi. □

2.4 Integrali curvilinei di seconda specie

2.4.1 Definizione (Campi). Chiameremo *campo vettoriale* una applicazione $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^N .

2.4.2 Definizione (integrale curvilineo di seconda specie). Sia $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe \mathcal{C}^1 . Definiamo l'integrale di \vec{f} lungo γ come:

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Possiamo estendere questa nozione nel caso di γ \mathcal{C}^1 a tratti: se $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ con γ_j di classe \mathcal{C}^1 consecutive, allora:

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

2.4.3 Osservazione. Se γ è una curva costante ($\gamma(t) = \mathbf{x}_0$ per ogni t), allora $\int_{\gamma} \vec{f} \cdot \vec{s} = 0$ (per qualunque \vec{f}).

2.4.4 Definizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ sono curve \mathcal{C}^1 e se $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametro di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ diremo che γ e γ_1 hanno lo stesso verso se $\varphi' \geq 0$, mentre diremo che γ e γ_1 hanno verso opposto se $\varphi' \leq 0$. Notiamo che φ' non può cambiare segno essendo φ bigettiva. Notiamo anche che $\varphi' \geq 0$ se e solo se $\varphi(a_1) = a$ e $\varphi(b_1) = b$ ($\varphi' \leq 0$ se e solo se $\varphi(a_1) = b$ e $\varphi(b_1) = a$).

2.4.5 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ sono curve \mathcal{C}^1 e se $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametro di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ e γ_1 ha lo stesso verso di γ , allora per ogni campo continuo $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ si ha:

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Nel caso di verso opposto i due integrali sono opposti. Lo stesso risultato vale se γ è \mathcal{C}^1 a tratti. In particolare:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Dimostrazione. Usando il cambio di variabile $t = \varphi(s)$ nell'integrale si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_{a_1}^{b_1} \vec{f}(\gamma_1(s)) \cdot \gamma_1'(s) ds = \int_{a_1}^{b_1} \vec{f}(\gamma(\varphi(s))) \cdot \varphi'(s) \gamma'(\varphi(s)) ds = \\ &= \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \pm \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

a seconda che $\varphi' \geq 0$ o $\varphi' \leq 0$. La generalizzazione al caso \mathcal{C}^1 a tratti è immediata. \square

2.4.6 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$ è curva di classe \mathcal{C}^1 (a tratti), se $\vec{f}, \vec{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due campi continui e se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora:

$$\int_{\gamma} (\lambda \vec{f} + \mu \vec{g}) \cdot d\vec{s} = \lambda \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \mu \int_{\gamma} \vec{g} \cdot d\vec{s}.$$

2.4.7 Proposizione. Se γ_1 e γ_2 sono due curve di classe \mathcal{C}^1 (o \mathcal{C}^1 a tratti) consecutive in un aperto Ω , allora per ogni campo continuo $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ si ha:

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

2.4.8 Proposizione. Sia $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe \mathcal{C}^1 . Allora

$$\left| \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right| \leq \int_{\gamma} \|\vec{f}\| ds.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right| &= \left| \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right| dt \leq \\ &= \int_a^b \|\vec{f}(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} \|\vec{f}\| ds. \end{aligned}$$

\square

2.5 Un altro approccio: curve come sottoinsiemi

In questo paragrafo consideriamo una nozione alternativa in cui chiameremo curva un sottoinsieme di \mathbb{R}^N (invece di una funzione). Per motivi di brevità useremo sempre il termine “curva”, anche se a rigore dovremmo usare un termine diverso, per distinguere le nuove definizioni da quelle dei paragrafi precedenti.

Cominciamo con un risultato che ci dà una condizione per cui due curve differiscono per un cambio di parametro.

2.5.1 Lemma. Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue e tali che:

- γ è iniettiva su $[a, b]$, γ è di classe $\mathcal{C}^1(]a, b[)$, $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in]a, b[$,
- γ_1 è iniettiva su $[a_1, b_1]$, γ_1 di classe $\mathcal{C}^1(]a_1, b_1[)$, $\gamma_1'(s) \neq \mathbf{0}$ per ogni $s \in]a_1, b_1[$,
- $\gamma([a, b]) = \gamma_1([a_1, b_1])$; in altri termini γ e γ_1 hanno lo stesso sostegno.

Allora esiste $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ continua e bigettiva tale che $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Inoltre φ è bigettiva tra $]a_1, b_1[$ e $]a, b[$ ed è di classe $\mathcal{C}^1(]a, b[)$ e $\varphi'(s) \neq 0$ per ogni $s \in]a_1, b_1[$.

Dimostrazione. (*) Indichiamo con C il sostegno comune delle due curve. Definiamo $\varphi := \gamma^{-1} \circ \gamma_1$ (usando il fatto che γ e γ_1 sono bigettive dai rispettivi intervalli di definizione a C). La funzione φ è continua dato che, per il Teorema (1.5.14) γ^{-1} è continua. Dato che φ è bigettiva e continua tra due intervalli, φ deve essere strettamente monotona, dunque φ manda $]a_1, b_1[$ in $]a, b[$. Inoltre l'inversa $\varphi^{-1} = \gamma_1^{-1} \cdot \gamma$ è continua. Prendiamo $s_0 \in]a_1, b_1[$ e siano $t_0 := \varphi(s_0)$, $P_0 := \gamma_1(s_0)$. Per quanto appena detto $t_0 \in]a, b[$ e per la definizione di φ si ha $P_0 = \gamma(t_0)$. Indichiamo con $\hat{v} := \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ e definiamo la mappa $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da $\pi(P) := P_0 + (P - P_0) \cdot \hat{v} \hat{v}$. Chiaramente $\pi(P)$ è la proiezione ortogonale di P sulla retta $\{P_0 + t\hat{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Dico che:

$$\lim_{P \rightarrow P_0, P \in C} \frac{\|P - \pi(P)\|}{\|P - P_0\|} = 0 \quad (2.4)$$

Dato che γ^{-1} è continua, la (2.4) equivale a:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\gamma(t) - \pi(\gamma(t))\|}{\|\gamma(t) - P_0\|} = 0$$

(usando il cambio di variabile $P = \gamma(t)$). Questo è vero perché:

$$\frac{\|\gamma(t) - \pi(\gamma(t))\|}{\|\gamma(t) - P_0\|} = \frac{\left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \cdot \hat{v} \hat{v}}{t - t_0} \right\|}{\left\| \frac{\gamma(t) - P_0}{t - t_0} \right\|} \rightarrow \frac{\|\gamma'(t_0) - \gamma'(t_0) \cdot \hat{v} \hat{v}\|}{\|\gamma'(t_0)\|}$$

e l'ultima quantità è zero dato che:

$$\gamma'(t_0) \cdot \hat{v} \hat{v} = \gamma'(t_0) \cdot \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \gamma'(t_0).$$

Dunque (2.4) è vera. Ne segue:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\gamma_1(s) - \pi(\gamma_1(s))\|}{\|\gamma_1(s) - P_0\|} = 0$$

da cui segue:

$$\left\| \frac{\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0) - (\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0)) \cdot \hat{v} \hat{v}}{s - s_0} \right\| = \frac{\|\gamma_1(s) - \pi(\gamma_1(s))\|}{\|\gamma_1(s) - P_0\|} \left\| \frac{\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0)}{s - s_0} \right\| \rightarrow 0.$$

Ma allora:

$$0 = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0) - (\gamma_1(s) - \gamma_1(s_0)) \cdot \hat{v} \hat{v}}{s - s_0} = \gamma_1'(s_0) - \gamma_1'(s_0) \cdot \hat{v} \hat{v}.$$

Se guardiamo come è definita \hat{v} , vediamo che:

$$\gamma'_1(s_0) = \lambda_0 \gamma'(t_0) \quad \text{dove } \lambda_0 := \frac{\gamma_1(s_0) \cdot \gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|^2}.$$

Notiamo che $\lambda_0 \neq 0$, dato che $\gamma'_1(s_0) \neq \mathbf{0}$. Allora da:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\gamma(\varphi(s)) - \gamma(\varphi(s_0))}{\varphi(s) - \varphi(s_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0)$$

e da

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} \frac{\gamma(\varphi(s)) - \gamma(\varphi(s_0))}{\varphi(s) - \varphi(s_0)} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\gamma(\varphi(s)) - \gamma(\varphi(s_0))}{s - s_0} = \gamma'(s_0) = \lambda_0 \gamma'(t_0)$$

si ricava, usando la 3. della Proposizione (1.3.6), che:

$$\varphi'(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} = \lambda_0 \neq 0.$$

Dunque φ è derivabile. Dalla relazione $\gamma'_1(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s))$, usando la continuità di γ' , γ'_1 e φ e usando ancora la 3. di (1.3.6) si ricava che φ' è continua in $]a, b[$. \square

2.5.2 Definizione. Sia $C \subset \mathbb{R}^N$. Diciamo che C è una *curva semplice* se esistono un intervallo $[a, b]$ e una $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che:

1. $\gamma([a, b]) = C$.
2. γ è iniettiva (dunque è bigettiva da $[a, b]$ in C).
3. γ è continua su $[a, b]$ ed è \mathcal{C}^1 su $]a, b[$.
4. $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni t in $]a, b[$.

Diremo in questo caso che γ è una *parametrizzazione* per C . In particolare γ è una curva nel senso dei paragrafi precedenti e C è il sostegno di γ .

A causa del Lemma (2.5.1) se γ e γ_1 sono due parametrizzazioni per C , allora si ottengono l'una dall'altra mediante un cambio di parametro φ . Questo fa sì che le seguenti nozioni abbiano senso.

Chiamiamo *estremi di C* i due punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Questa nozione non dipende da γ perchè se $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow C$ è un'altra parametrizzazione, allora $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, con φ come in (2.5.1). In particolare φ è iniettiva da $\{a_1, b_1\}$ in $\{a, b\}$ e dunque vale una delle due:

$$\gamma_1(a_1) = \gamma(a), \gamma_1(b_1) = \gamma(b) \quad \text{oppure} \quad \gamma_1(a_1) = \gamma(b), \gamma_1(b_1) = \gamma(a).$$

In ogni caso γ_1 individua gli stessi estremi di γ .

Indicheremo con $\Sigma(C)$ l'insieme dei due punti estremi. In qualche senso $\Sigma(C)$ è il "bordo di C visto come insieme unidimensionale", da non confondere con ∂C che, con le ipotesi fatte, è destinato a coincidere con C .

Se $P \in C \setminus \Sigma(C)$, definiamo la *retta tangente a C in P* come:

$$T_C(P) := \{\lambda \gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{dove } t \in]a, b[\text{ è tale che } P = \gamma(t)$$

Anche la retta tangente non dipende dalla parametrizzazione: se γ_1 e φ sono come sopra e se $s := \varphi^{-1}(t)$ allora $P = \gamma_1(s)$ e

$$\{\mu \gamma'_1(s) : \mu \in \mathbb{R}\} = \{\mu \varphi'(s) \gamma'(t) : \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$T_C(P)$ è una retta per l'origine, a volte si chiama retta tangente a C in P l'insieme

$$R = R_C(P) := P + T_C(P) = \{P + \lambda \gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2.5.3 Definizione. Sia C una curva semplice in \mathbb{R}^N e sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo *l'integrale di prima specie di f su C* come:

$$\int_C f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

dove $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ è una parametrizzazione. Notiamo che l'integrale a destra è (in generale) un integrale improprio dato che nell'integrando il termine $\|\gamma'(t)\|$ è continuo solo su $]a, b[$. Dunque se $f \geq 0$ l'integrale si può considerare, con valore eventualmente $+\infty$, se invece f non ha segno costante l'integrale potrebbe non esistere. Naturalmente se γ è $\mathcal{C}^1([a, b])$ l'integrale esiste finito.

Notiamo infine che la definizione è ben posta in quanto non dipende dalla parametrizzazione, a causa della Proposizione (2.2.3).

In particolare chiamiamo *lunghezza* di C l'integrale su C della funzione uno:

$$\ell(C) := \int_C ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Come detto sopra la lunghezza di C può anche essere infinita (nel caso che l'integrale di destra diverga).

2.5.4 Definizione. Chiameremo *curva semplice orientata* (o curva semplice con un verso) una coppia (C, \hat{v}) dove C è una curva semplice e $\hat{v} : C \setminus \Sigma(C) \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo di vettori continuo tale che:

$$\|\hat{v}(P)\| = 1 \quad , \quad \hat{v}(P) \in T_C(P) \quad \forall P \in C \setminus \Sigma(C).$$

È abbastanza chiaro che ogni curva semplice ammette solo due possibili versi ottenuti come segue: si prende una parametrizzazione $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ e per ogni $P \in C \setminus \Sigma(C)$ si definisce $\hat{v}(P)$ in uno dei due modi seguenti:

$$\hat{v}(P) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{oppure} \quad \hat{v}(P) := -\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

dove $t \in]a, b[$ è tale che $P = \gamma(t)$. Nel caso in cui valga la prima delle due eguaglianze diremo che γ è una *parametrizzazione concorde con \hat{v}* .

La presenza di \hat{v} , che si può pensare come il “verso” di C , permette di ordinare gli estremi di C . Diremo infatti che $A \in \Sigma(C)$ è il *l'estremo sinistro di C* (o il primo estremo) e $B \in \Sigma(C)$ è il *l'estremo destro di C* (o il secondo estremo) se esiste una parametrizzazione $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ tale che:

$$\gamma(a) = A, \quad \gamma(b) = B, \quad \hat{v}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in]a, b[.$$

2.5.5 Definizione. Sia (C, \hat{v}) una curva semplice orientata e sia $\vec{f} : C \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo. Definiamo *l'integrale di seconda specie di \vec{f} su C* come:

$$\int_{(C, \hat{v})} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_C \vec{f} \cdot \hat{v} \, ds = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

dove $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ è una parametrizzazione concorde con \hat{v} . Anche questo integrale è ben definito a causa della Proposizione (2.4.5).

Anche questo integrale è (in generale) un integrale improprio, a meno che non si possa trovare una parametrizzazione $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$.

2.5.6 Definizione. Sia $C \subset \mathbb{R}^N$. Diciamo che C è una *curva regolare a tratti* se esistono C_1, \dots, C_k curve semplici tali che

1. $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ e $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ $i = 1, \dots, k-1$ (C si ottiene “incollando” k curve semplici);
2. se $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ si ha $C_i \cap C_j \subset \Sigma(C_i) \cap \Sigma(C_j)$ (“lincollamento avviene agli estremi”);
3. se i, j, h sono diversi tra loro, allora $C_i \cap C_j \cap C_h = \emptyset$ (non ci sono “punti tripli”).

Se valgono le proprietà sopra diremo che C_1, \dots, C_k è una *decomposizione* di C .

Si vede ottenere abbastanza facilmente che, se C_1, \dots, C_k è una decomposizione di C , esistono $k+1$ punti P_0, P_1, \dots, P_k in \mathbb{R}^N tali che P_1, \dots, P_k sono tra loro distinti e $\Sigma(C_i) = \{P_{i-1}, P_i\}$. Inoltre ci sono due possibilità:

$$(a) \quad P_0 \neq P_i \quad i = 1, \dots, k \quad , \quad (b) \quad P_0 = P_k$$

Se vale la (a) diciamo che C ha come estremi P_0 e P_k e scriviamo $\Sigma(C) = \{P_0, P_k\}$; se vale la (b) diciamo che C è una *curva chiusa* e che $\Sigma(C) = \emptyset$ (C non ha estremi). Si può dimostrare che la definizione di $\Sigma(C)$ non dipende dalla decomposizione utilizzata per descrivere C e quindi $\Sigma(C)$ è ben definito.

Sia C una curva regolare a tratti e sia $P \in C$. Diciamo che P è un *punto regolare di C* se esiste una decomposizione C_1, \dots, C_k per C tale che $P \in C_i \setminus \Sigma(C_i)$, per un i tra 1 e k . Se P non è regolare diciamo che P è un *punto singolare di C* . Indichiamo con $\Sigma^*(C)$ l'insieme dei punti singolari di C . Notiamo che $\Sigma(C) \subset \Sigma^*(C)$. Se $\Sigma(C) = \Sigma^*(C)$ dico che C è una *curva regolare*. Possiamo pensare ai punti di $\Sigma^*(C)$ diversi dagli estremi come “agli spigoli” di C .

Se C è una curva regolare a tratti e $P \notin \Sigma^*(C)$ è ben definita la retta tangente a C in P , che indichiamo al solito con $T_C(P)$. Si può infatti prendere una decomposizione C_1, \dots, C_k di C tale che $P \in C_i \setminus \Sigma(C_i)$, per un indice i tra 1 e k e definire $T_C(C) := T_{C_i}(P)$. Si può dimostrare che questa definizione è ben posta in quanto cambiando decomposizione il risultato non cambia.

Chiameremo *curva regolare a tratti orientata* una coppia (C, \hat{v}) dove C è una curva regolare a tratti e \hat{v} è un campo di vettori definito in $C \setminus \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$, dove $P_0, P_1, \dots, P_k \in C$, tali che esistono $(C_1, \hat{v}_1), \dots, (C_k, \hat{v}_k)$ curve orientate con:

$$C_1 \cup \dots \cup C_k \quad \text{è una decomposizione di } C \text{ e, se } i = 1, \dots, k, \text{ si ha:}$$

$$P_{i-1} \text{ è estremo sinistro di } C_i, \quad P_i \text{ è estremo destro di } C_i, \quad \hat{v}_i = \hat{v}|_{C_i}$$

(notiamo che per parlare di estremo destro o sinistro abbiamo bisogno del verso \hat{v}). Diremo in questo caso che $(C_1, \hat{v}_1) \dots, (C_k, \hat{v}_k)$ è una decomposizione per (C, \hat{v}) .

2.5.7 Definizione. Se C è una curva regolare a tratti e se $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora si definisce l'integrale di prima specie di f su C come:

$$\int_C f \, ds := \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f \, ds$$

dove C_1, \dots, C_k è una decomposizione per C .

Se (C, \hat{v}) è una curva regolare a tratti orientata e se $\vec{f} : C \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo di vettori continuo, allora si definisce l'integrale di seconda specie di \vec{f} su (C, \hat{v}) come:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} := \sum_{i=1}^k \int_{(C_i, \hat{v}_i)} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove $(C_1, \hat{v}_1) \dots, (C_k, \hat{v}_k)$ è una decomposizione per (C, \hat{v}) .

È sottinteso che, data la natura impropria degli integrali sopra, perché l'integrale di sinistra esista bisogna che esistano tutti gli integrali nella sommatoria a destra. Nel caso dell'integrale di prima specie, se $f \geq 0$ si conviene che gli integrali esistano potendo essere $+\infty$ (quando uno degli integrali nella sommatoria è divergente). Come al solito si chiama lunghezza di C l'integrale della funzione 1 su C .

Queste definizioni sono ben poste dato che si può dimostrare che, cambiando la decomposizione, il risultato non cambia.

Capitolo 3

Calcolo differenziale

3.1 Derivate parziali e differenziale

In questo paragrafo introdurremo le basi del calcolo differenziale in più variabili. Ci ambientiamo, almeno inizialmente in spazi vettoriali normati, per avere delle nozioni il più possibile flessibili. Successivamente passeremo a \mathbb{R}^N .

Consideriamo dunque due spazi normati \mathbb{X}, \mathbb{X}_1 , e indichiamo con $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ le rispettive norme. Siano Ω un sottoinsieme **aperto** di \mathbb{X} e $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{X}_1$ una funzione.

3.1.1 Definizione (derivata direzionale). Sia $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e sia $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{X}$. Diciamo che \mathbf{f} è *derivabile lungo la direzione* $\vec{\mathbf{v}}$ se esiste il limite:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\vec{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (\in \mathbb{X}_1).$$

Il vettore $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}})$, che sta in \mathbb{X}_1 , si chiama *derivata direzionale di \mathbf{f} lungo $\vec{\mathbf{v}}$* (o *nella direzione $\vec{\mathbf{v}}$*). Detto in un altro modo $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}})$ è la derivata in $t = 0$ della funzione di una variabile $\varphi(t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\vec{\mathbf{v}})$ (cioè della restrizione di \mathbf{f} sulla retta per \mathbf{x}_0 con direzione $\vec{\mathbf{v}}$ (se $\vec{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$)).

3.1.2 Definizione. Nel caso in cui $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ chiamiamo *derivata parziale i -esima* di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 il limite (se esiste):

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}_{x_i}(\mathbf{x}_0) = D_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{0,i} + h, \dots, x_N) - \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{0,i}, \dots, x_N)}{h}$$

cioè la derivata in $x = x_{0,i}$ della funzione $x \mapsto \mathbf{f}(x_1, \dots, x, \dots, x_N)$. È facile vedere che:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{e}}_i),$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_i$ sono i versori della base canonica di \mathbb{R}^N .

3.1.3 Osservazione. L'esistenza delle derivate direzionali, anche rispetto a ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, non è di per sé garanzia di regolarità per la funzione \mathbf{f} . Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) := 0.$$

Questa funzione non è continua come già visto; però:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

(le restrizioni di f all'asse x e all'asse y sono identicamente nulle). Si noti che nelle direzioni diverse da $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ la derivata direzionale non esiste. Infatti se $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y)$, con $v_x \neq 0$ e $v_y \neq 0$ si ha

$$\varphi(t) := f(tv_x, tv_y) = \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} \neq 0 \quad \text{mentre} \quad \varphi(0) := f(0, 0) = 0,$$

dunque φ non è derivabile on $t = 0$. Se invece prendiamo

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) := 0,$$

abbiamo $\varphi(t) := f(tv_x, tv_y) = \frac{tv_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4}$, da cui, con semplice calcoli:

$$f'(0, 0)(v_x, v_y) = \frac{v_y^2}{v_x}, \text{ se } v_x \neq 0; \quad f'(0, 0)(v_x, v_y) = 0, \text{ se } v_x = 0.$$

Dunque in questo caso le derivate direzionali in $(0, 0)$ esistono per ogni direzione $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y)$; anche in questo caso sappiamo però che f non è continua in zero. Notiamo che in questo secondo esempio l'espressione di $f'(0, 0)(\vec{\mathbf{v}})$ non è lineare in $\vec{\mathbf{v}}$ (come si evince dai calcoli sopra). Se consideriamo un terzo caso:

$$f(x, y) := \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) := 0$$

e calcoliamo le derivate direzionali rispetto a $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y) \neq (0, 0)$. Troviamo:

$$\frac{f(hv_x, hv_y) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^4 v_x v_y^3}{h(h^2 v_x^2 + h^6 v_y^6)} = \frac{h v_x v_y^3}{v_x^2 + h^4 v_y^6} \rightarrow 0.$$

(se $v_x \neq 0$ conta h a numeratore – se $v_x = 0$ la quantità vale 0 per ogni $h \neq 0$). Dunque $f'(0, 0)(\vec{\mathbf{v}}) = 0$ per ogni $\vec{\mathbf{v}}$; anche questa funzione però non è continua come si vede restringendola sulla curva $\gamma(t) := (t, t^3)$. In questo caso peraltro $f'(0, 0)(\vec{\mathbf{v}})$ è lineare in $\vec{\mathbf{v}}$.

3.1.4 Definizione (differenziabilità). Diremo che \mathbf{f} è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_1$ tale che L è continua e:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Una tale L viene detta *differenziale di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0* . A rigore dovremmo dire “un” differenziale perché per quanto ne sappiamo potrebbero esserci più di un L con queste proprietà. Vedremo subito che L è unico: questo ci autorizza a indicare con $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ il differenziale di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 , cioè l'unico L per cui vale la (3.1).

3.1.5 Osservazione. Se \mathbb{X} e \mathbb{X}_1 hanno dimensione finita, la linearità di L implica automaticamente la continuità di L . **D'ora in poi supponiamo \mathbb{X} e \mathbb{X}_1 abbiano dimensione finita** e quindi possiamo non chiedere che L sia continua (perché lo è automaticamente).

3.1.6 Proposizione (differenziale e derivate direzionali). *Supponiamo che \mathbf{f} sia differenziabile in \mathbf{x}_0 e che L sia un differenziale. Allora per ogni vettore $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{X}$ esiste la derivata direzionale $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}})$ e vale*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}}) = L\vec{\mathbf{v}}.$$

Dimostrazione. Se $\vec{v} = \mathbf{0}$ la tesi è ovvia. Suppongo $\vec{v} \neq \mathbf{0}$. Dalla (3.1), restringendo il limite alla curva $\gamma(t) = \mathbf{x}_0 + t\vec{v}$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\vec{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x}_0 + t\vec{v} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0 + t\vec{v} - \mathbf{x}_0\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\vec{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - tL(\vec{v})}{|t|\|\vec{v}\|} = \mathbf{0}.$$

che si vede facilmente essere equivalente a:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\vec{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = L\vec{v}$$

Questo prova la tesi. \square

3.1.7 Osservazione (unicità del differenziale). Dalla precedente proposizione si ricava che il differenziale è unico (e dunque si può usare la notazione $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$). Se infatti ci fossero due differenziali L e L_1 avremmo:

$$L\vec{v} = L_1\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{X}.$$

Ma questo significa esattamente che le due applicazioni lineari L ed L_1 coincidono.

Dunque la definizione di differenziale si potrebbe anche dare chiedendo che:

- esiste la derivata direzionale $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v} \in \mathcal{X}$;
- $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{v}_1) + \mu\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\vec{v}_2)$ per ogni $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{X}$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Nel caso di $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ questo è anche equivalente a chiedere:

- esiste la derivata parziale $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$ per ogni $i = 1, \dots, N$;
- posto $L\vec{v} := \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} v_i$ (dove v_i sono le componenti di \vec{v}) si ha:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

3.1.8 Teorema. *Se \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 , allora è continua in \mathbf{x}_0 .*

Dimostrazione. Dalla definizione di differenziale si ottiene:

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right\|_1 \leq 1 \quad \text{per } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$$

pur di prendere $\rho > 0$ sufficientemente piccolo. Allora:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad \text{per } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$$

e quindi:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_1 \leq (\|d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| + 1)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad \text{per } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho).$$

Se ne ricava che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. \square

3.1.9 *Osservazione.* L'esistenza del differenziale in \mathbf{x}_0 si può esprimere:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$$

dove il “resto” $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ è $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$, cioè $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$. In altri termini “localmente” $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si comporta come la funzione affine $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

3.1.10 Definizione (iperpiano tangente). Se \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 chiamiamo *iperpiano tangente al grafico di \mathbf{f}* l'insieme

$$\Pi := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}_1 : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\},$$

cioè il grafico della funzione $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ introdotta sopra. Nel caso $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$, $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}$ (funzione a valori reali) Π è effettivamente un iperpiano di dimensione N in \mathbb{R}^{N+1} .

Da ora in poi, se non detto altrimenti, supponiamo $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ e $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}^M$ per $N, M \in \mathbb{N}$.

3.1.11 Definizione (matrice jacobiana). Supponiamo che \mathbf{f} sia differenziabile in \mathbf{x}_0 . Allora esiste una matrice $M \times N$, che indichiamo con $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$, che rappresenta $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ (rispetto alle basi canoniche $\hat{\mathcal{B}}_N$ in \mathbb{R}^N e $\hat{\mathcal{B}}_M$ in \mathbb{R}^M – nota che $\vec{\mathbf{v}} = [\vec{\mathbf{v}}]_{\hat{\mathcal{B}}_N}$ perché $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N$):

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N.$$

Nella scrittura a destra si intende il prodotto tra matrici – per questo d'ora in poi **scriveremo i vettori di \mathbb{R}^N come colonne**.

Sappiamo che, se $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$, $(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))_{i,j} = (d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\hat{\mathbf{e}}_j)_i = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right)_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, dunque:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

La matrice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ si chiama *matrice jacobiana* di \mathbf{f} nel punto \mathbf{x}_0 . Per indicare la matrice jacobiana di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 useremo anche le notazioni

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_M)}{\partial (x_1, \dots, x_N)}(\mathbf{x}_0).$$

3.1.12 *Osservazione.* È facile verificare che \mathbf{f} è differenziabile in un punto \mathbf{x}_0 se e solo se ognuna delle sue componenti f_i , $i = 1, \dots, M$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 . Se ciò accade la matrice Jacobiana di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 ha come righe le matrici Jacobiane delle f_i (che sono $1 \times N$).

3.1.13 Definizione (gradiente). Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 chiamiamo *gradiente* il vettore:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = J_f(\mathbf{x}_0)^\top = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)^\top.$$

Il gradiente permette di rappresentare il differenziale $df(\mathbf{x}_0)$ mediante il prodotto scalare (canonico): $df(\mathbf{x}_0)\vec{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{v}$. Possiamo allora riscrivere la differenziabilità come:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

3.1.14 Osservazione. Supponiamo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in \mathbf{x}_0 e $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. Poniamo $\hat{v} := \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$. Allora $\|\hat{v}\| = 1$ e

$$f'(\mathbf{x}_0)(\hat{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Peraltro, usando Schwartz, se $\|\vec{v}\| = 1$ si ha:

$$f'(\mathbf{x}_0)(\vec{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{v} \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \|\vec{v}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Dunque il gradiente individua la direzione \hat{v} rispetto a cui la derivata direzionale è massima (tra i vettori di norma 1) e la sua norma è proprio il valore massimo di tali derivate direzionali:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| = \max_{\|\vec{v}\|=1} f'(\mathbf{x}_0)(\vec{v}) = f'(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \right).$$

3.1.15 Osservazione (curve). Consideriamo il caso in cui la dimensione in partenza sia $N = 1$. Consideriamo dunque una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^M$, I intervallo aperto e $t_0 \in I$. Allora la differenziabilità di γ in t_0 equivale a dire che esiste un vettore $\vec{w} \in \mathbb{R}^M$ tale che:

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \vec{w}(t - t_0)}{|t - t_0|} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \vec{w}(t - t_0)}{t - t_0} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \vec{w}.$$

Dunque nel caso $N = 1$ la differenziabilità equivale alla derivabilità. Più precisamente γ è differenziabile in t_0 se e solo se γ è derivabile in t_0 e $d\gamma(t_0)t = \gamma'(t_0)t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

3.1.16 Esempio (*). Sia $\mathcal{X} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua} \}$. È chiaro che \mathcal{X} è uno spazio lineare. Definiamo un prodotto scalare in \mathcal{X} ponendo

$$f \cdot g := \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

(si verifica facilmente che l'espressione sopra è bilineare, simmetrica e positiva). Con questo prodotto scalare risulta definita la norma:

$$\|f\| := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}.$$

Fissiamo una $a_0 \in \mathcal{X}$ e consideriamo la seguente funzione $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(f) := \int_0^1 a_0(x)f(x)^2 dx.$$

F è una funzione che ha come argomento delle funzioni (spesso si dice che F è un funzionale). Ha senso chiederci se F è differenziabile in un punto $f_0 \in \mathcal{X}$. Fissiamo una funzione $\delta \in \mathcal{X}$ e vediamo se esiste la derivata direzionale $F'(f_0)(\delta)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{F(f_0 + h\delta) - F(f_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^1 a_0(x) [(f_0(x) + h\delta(x))^2 - f_0(x)^2] dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 a_0(x) [2hf_0(x)\delta(x) + h^2\delta(x)^2] dx = 2 \int_0^1 a_0(x)f_0(x)\delta(x) dx + h \int_0^1 a_0(x)\delta(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Facendo tendere h a zero si ottiene:

$$F'(f_0)(\delta) = 2 \int_0^1 a_0(x) f_0(x) \delta(x) dx = \underline{2(a_0 f_0)} \cdot \delta.$$

È chiaro che $\delta \mapsto 2(a_0 f_0) \cdot \delta$ è lineare e (per Schwartz) continuo. Inoltre:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(f) - F(f_0) - F'(f_0)(f - f_0)}{\|f - f_0\|} \right| &= \\ \left| \frac{\int_0^1 a_0(x) [f(x)^2 - f_0(x)^2 - 2f_0(x)(f(x) - f_0(x))] dx}{\|f - f_0\|} \right| &= \\ \left| \frac{\int_0^1 a_0(x) [f(x) - f_0(x)]^2 dx}{\|f - f_0\|} \right| &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |a_0(x)| \frac{\int_0^1 [f(x) - f_0(x)]^2 dx}{\|f - f_0\|} = \\ &\max_{0 \leq x \leq 1} |a_0(x)| \|f - f_0\| \xrightarrow{f \rightarrow f_0} 0. \end{aligned}$$

Ne segue che F è differenziabile in f_0 e il differenziale $dF(f_0)$ è definito da:

$$dF(f_0)\delta = 2 \int_0^1 a_0(x) f_0(x) \delta(x) dx = (2a_0 f_0) \cdot \delta.$$

La formula sopra dice anche che il gradiente di F in f_0 è $w := 2a_0 f_0$ ($w \in \mathcal{X}$!).

Questo esempio è alla base di molte applicazioni avanzate. In realtà ci sono alcuni problemi dovuti al fatto che lo spazio \mathcal{X} , con la norma indotta dal prodotto scalare sopra indicato, *non è completo*.

3.1.17 Teorema (del differenziale totale). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$. Supponiamo che esistano le derivate parziali $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, N$, per tutte le \mathbf{x} di Ω (basterebbero le \mathbf{x} di un opportuno disco $B(\mathbf{x}_0, \rho)$). Se tutte queste derivate parziali sono continue in \mathbf{x}_0 allora \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 .*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $N = 2$, $M = 1$. Cambiamo un po' la notazione indicando con (x, y) e (x_0, y_0) i vari punti. Quello che dobbiamo dimostrare è:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

Prendiamo (x, y) abbastanza vicino a (x_0, y_0) in modo che il rettangolo di base $[x_0, x]$ e altezza $[y_0, y]$ sia contenuto in Ω (che è aperto). Allora (vedi anche la figura):

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x), y_0)(x - x_0)$$

per un opportuno $\xi(x, y_0)$ compreso tra x_0 e x : si è usato il teorema di Lagrange rispetto alla variabile x tenendo $y = y_0$ fissa. Analogamente

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x, y))(y - y_0)$$

con $\eta(x, y)$ compreso tra y_0 e y . Sommando le due relazioni otteniamo:

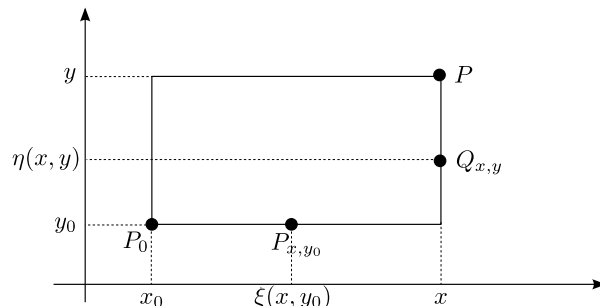
$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &:= \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \\ &\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y_0), y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) (y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}. \end{aligned}$$

Applicando Schwartz:

$$|\Delta(x, y)| \leq \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y_0), y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2}$$

e quest'ultima quantità tende a zero per ipotesi, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, dato che:

$$\xi(x, y_0) \rightarrow x_0, \quad \eta(x, y) \rightarrow y_0 \quad \text{se } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$



□

3.1.18 Teorema (calculus). Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. Valgono i seguenti risultati.

- Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, anche $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha $d(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = \lambda d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mu d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. In termini di matrici jacobiane: $J_{\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0) = \lambda J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) + \mu J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)$ oppure

$$\frac{\partial(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) + \mu \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0).$$

- Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 , anche $f\mathbf{g}$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha $d(f\mathbf{g})(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = (df(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}})\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)(d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}})$. In termini di matrici jacobiane: $J_{f\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0) = J_f(\mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)$ (intendiamo qui che $(\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}})_{i,j} = v_j w_i$ dove $\vec{\mathbf{v}}$ è $1 \times N$ e $\vec{\mathbf{w}}$ è $M \times 1$, e quindi $\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}$ è $M \times N$). Se $M = 1$ si ha (la formula più comprensibile) $\nabla(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\nabla f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\nabla g(\mathbf{x}_0)$.
- Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 , anche $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha $d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}}) = df(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)(\vec{\mathbf{v}})$. In termini di matrici jacobiane: $J_{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)^T J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^T J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)$ e in termini di gradienti: $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la formula sul prodotto scalare (le altre sono simili). Dalle ipotesi sappiamo che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}}),$$

dove

$$\lim_{\vec{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \mathbf{0}, \quad \lim_{\vec{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \mathbf{0}.$$

Facendo il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \vec{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})) \cdot (\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}})) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \\ &= \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}})) + (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})) \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}}) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\vec{\mathbf{v}}), \end{aligned}$$

dove in $\mathbf{R}(\vec{\mathbf{v}})$ tiene conto di tutti i termini dopo i primi tre e si vede che

$$\lim_{\vec{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}(\vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \mathbf{0}.$$

Dunque $d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}}$.
In termini di matrici Jacobiane:

$$J_{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)^T J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^T J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}},$$

da cui l'espressione di $J_{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)$. Per il gradiente basta passare ai trasposti. \square

3.1.19 Teorema (di composizione). *Se $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, se $\mathbf{g} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^K$ è differenziabile in $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \Omega_1$, Ω_1 aperto in \mathbb{R}^M , allora $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha $d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \circ d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. In termini di matrici jacobiane lo jacobiano della composizione è il prodotto degli jacobiani: $J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0)J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$:*

$$\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0).$$

Dimostrazione. Per ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) + d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0)\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

dove

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_0) = 0.$$

Combinando le due e usando $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) &= \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)(d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) + \\ &\quad \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\|d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\| = \\ &\quad \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\|d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\|$$

e quindi:

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\| \leq \left(\|d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\| \|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\| (\|d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\|) \right) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

da cui si vede che $\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \rightarrow 0$ e quindi la tesi è dimostrata. \square

3.1.20 Osservazione. La formula di composizione è particolarmente espressiva in termini dei differenziali (o delle matrici jacobiane). Possiamo tradurre questa formula in termini di derivate parziali. Dato che:

$$(J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))_{i,j} = \sum_{k=1}^M (J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0))_{i,k} (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))_{k,j} = \sum_{k=1}^M \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0),$$

si ha:

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^M \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \quad i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

(che non è una formula immediatamente intuitiva).

3.1.21 *Osservazione.* Supponiamo che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sia differenziabile e che $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ sia una curva derivabile. Allora applicando la formula sulla derivata della composizione:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x_i} \gamma'_i(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0). \quad (3.5)$$

Supponiamo che γ sia una *curva di livello* e cioè che f sia costante su γ : $f(\gamma(t)) = C \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in [a, b]$. Allora $(f \circ \gamma)' = 0$, da cui ∇f è **ortogonale alle curve di livello**.

3.1.22 Esempio. Sia $p \geq 1$ e consideriamo $g_p(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^p$, definita per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Se $p > 1$ la g_p è differenziabile in ogni \mathbf{x} e si ha:

$$\frac{\partial g_p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = p\|\mathbf{x}\|^{p-2}\mathbf{x}^\top \quad \Leftrightarrow \quad \nabla g_p(\mathbf{x}) = p\|\mathbf{x}\|^{p-2}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}$$

(ricordiamo che il gradiente è il trasposto dello Jacobiano). Nel caso $p = 1$ il risultato è vero per le $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (e $\nabla g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$).

Infatti $g_p(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{p}{2}}$ da cui $\frac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{p}{2} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{p}{2}-1} 2x_i = p\|\mathbf{x}\|^{p-2}x_i$. Questa espressione è continua (nelle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ quando $p = 1$) e quindi la tesi segue dal teorema del differenziale totale. Prendiamo ora $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ differenziabile e sia $h(\mathbf{x}) := \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^p$. Allora h è differenziabile in ogni \mathbf{x} (tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ se $p = 1$) e si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial (g_p \circ \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g_p}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = p\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^{p-2}\mathbf{f}(\mathbf{x})^\top \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

che (passando al trasposto) ci dice:

$$\nabla h(\mathbf{x}) = p\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^{p-2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.6)$$

Notiamo che per $p = 2$ si ritrova $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \nabla\|\mathbf{f}\|^2(\mathbf{x}) = 2J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

3.1.23 Esempio. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Per $C \in \mathbb{R}$ consideriamo “l’insieme di livello” $\{f = C\} := \{(x, y) : f(x, y) = C\}$. Allora:

$$\{f = C\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } C < 0, \\ \{\mathbf{0}\} & \text{se } C = 0, \\ \text{ellisse di semiassi } \sqrt{C} \text{ e } \frac{\sqrt{C}}{2} & \text{se } C > 0. \end{cases}$$

Prendiamo $C > 0$. Una curva che viaggia in $\{f = C\}$ è data da:

$$\gamma(t) := \left(\cos(t), \frac{1}{2} \sin(t) \right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tale γ è derivabile e

$$\gamma'(t) = \left(-\sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) \right).$$

Possiamo interpretare $\gamma'(t)$ come un vettore tangente alla γ e quindi a $\{f = C\}$ nel punto $\gamma(t)$. Questo ci dice che, se $(x, y) \in \{f = C\}$ allora il vettore $\vec{\mathbf{v}}(x, y) := \left(-2y, \frac{x}{2} \right)$ è tangente a $\{f = C\}$ nel punto (x, y) . Calcoliamo il gradiente di f . Si ha:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 8y).$$

Se ora calcoliamo $\nabla f(x, y) \cdot \vec{\mathbf{v}}(x, y)$ troviamo effettivamente $2x(-2y) + 8y(x/2) = 0$.

3.1.24 Definizione (connessione). Diciamo che l'aperto Ω è *connesso* se per ogni coppia di punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 in Ω esiste una curva continua in Ω che li congiunge: esiste $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, γ continua, $\gamma(a) = \mathbf{x}_1$ e $\gamma(b) = \mathbf{x}_2$.

Si può dimostrare la seguente proprietà.

3.1.25 Proposizione. *Se Ω è connesso allora per ogni coppia di punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 in Ω esiste una curva \mathcal{C}^1 in Ω che li congiunge: esiste $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, γ è derivabile, γ' è continua, $\gamma(a) = \mathbf{x}_1$ e $\gamma(b) = \mathbf{x}_2$.*

3.1.26 Teorema. *Supponiamo che Ω sia connesso e che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abbia gradiente identicamente nullo: $\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Allora f è costante in Ω .*

Dimostrazione. Fissiamo \mathbf{x}_0 in Ω . Dato un qualunque altro punto \mathbf{x} consideriamo $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ di classe \mathcal{C}^1 che congiunga \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Si ha

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in]a, b[.$$

Dunque, per i risultati in una variabile, $f(\gamma(t))$ è costante su $[a, b]$. In particolare:

$$f(\mathbf{x}) = f(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) = f(\mathbf{x}_0).$$

Dato che questo vale per ogni \mathbf{x} in Ω si ha la tesi. \square

Anche se non c'entra con la differenziabilità concludiamo con l'equivalente multidimensionale del teorema degli zeri (che è legato alla connessione)

3.1.27 Teorema (Teorema degli Zeri). *Se Ω è un aperto connesso, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $f(\mathbf{x}_1) < 0$, $f(\mathbf{x}_2) > 0$, allora esiste un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ tale che $f(\mathbf{x}) = 0$. Si può in realtà dire di più. Poniamo $Z := \{\mathbf{x} \in \Omega\}$: allora per ogni curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(a) = \mathbf{x}_1$ e $\gamma(b) = \mathbf{x}_2$ deve esistere $t \in]a, b[$ tale che $\gamma(t) \in Z$.*

Dimostrazione. Se γ è come sopra, posto $\varphi := f \circ \gamma$ si ha che $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $\varphi(a) < 0$ e $\varphi(b) > 0$. Applicando il Teorema degli Zeri unidimensionale si trova $t \in [a, b]$ tale che $\varphi(t) = 0$, cioè $\gamma(t) \in Z$. \square

3.2 Derivate seconde e successive

Consideriamo sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Ricordiamo che $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ indica le applicazioni lineari da \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^M e che in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ è definita la norma $\|L\| := \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|L\mathbf{x}\|$.

3.2.1 Definizione (derivate direzionali seconde). Siano $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Diciamo che \mathbf{f} è *derivabile due volte nel punto \mathbf{x}_0 lungo (\mathbf{w}, \mathbf{v})* se esiste $\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{v})$ per le \mathbf{x} vicine a \mathbf{x}_0 e se $\mathbf{g}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{v})$ è derivabile a sua volta in \mathbf{x}_0 nella direzione \mathbf{w} . Poniamo:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}'_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{w})(\mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{h}$$

detto *derivata direzionale seconda lungo (\mathbf{w}, \mathbf{v})* .

Analogamente a quanto fatto per le derivate parziali prime introduciamo derivate parziali di secondo ordine. Se $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$ chiamiamo *derivata parziale seconda in \mathbf{x}_0 rispetto a x_i e x_j* la derivata parziale rispetto a x_i , in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, della derivata

parziale di \mathbf{f} rispetto a x_j : $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) := \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right)(\mathbf{x}_0)$. È facile verificare che

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j).$$

3.2.2 Definizione (differenziale secondo). Se supponiamo \mathbf{f} differenziabile in tutto Ω risulta definita l'applicazione: $d\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Dato che $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ è uno spazio normato ha senso considerare le derivate direzionali e il differenziale di $d\mathbf{f}$ nel punto \mathbf{x}_0 . Se $d(d\mathbf{f})(\mathbf{x}_0)$ esiste lo chiamiamo *differenziale secondo di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0* e lo indichiamo con $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Quando esiste il differenziale secondo diremo che \mathbf{f} è *due volte differenziabile in \mathbf{x}_0* .

Dunque $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ ed è lineare (cioè $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M))$). Allora dati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ ha senso calcolare $(d\mathbf{f})(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e applicarlo a un \mathbf{w} . Il risultato è lineare sia in \mathbf{v} che in \mathbf{w} per cui il differenziale secondo in un punto \mathbf{x}_0 si può pensare come un'applicazione bilineare scrivendo:

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}))(\mathbf{w}).$$

3.2.3 Proposizione. Se $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ è differenziabile due volte in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, si ha:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \quad (3.7)$$

Dimostrazione. (*) Dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, la derivata direzionale di $d\mathbf{f}$ in \mathbf{x}_0 lungo \mathbf{v} , cioè $(d\mathbf{f})'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$ è un oggetto in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e per ogni \mathbf{w} si ha:

$$\begin{aligned} ((d\mathbf{f})'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}))(\mathbf{w}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} \right) (\mathbf{w}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{w}) - d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{w}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})}{t} = \mathbf{f}''(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dunque applicando le proprietà del differenziale:

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (d(d\mathbf{f})(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}))(\mathbf{w}) = ((d\mathbf{f})'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}))(\mathbf{w}) = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N.$$

In definitiva abbiamo trovato la formula (3.7) □

Il seguente teorema è conseguenza del Teorema del differenziale totale.

3.2.4 Teorema (del differenziale totale per le derivate seconde). Se le derivate seconde $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ ($i, j = 1, \dots, N$) esistono per tutte le \mathbf{x} vicine a \mathbf{x}_0 e sono continue in \mathbf{x}_0 , allora \mathbf{f} è due volte differenziabile in \mathbf{x}_0 e vale la formula:

$$d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) w_i v_j \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N.$$

3.2.5 Definizione. Indichiamo con $\mathcal{C}^2(\Omega)$ l'insieme delle funzioni aventi derivate seconde continue in tutto Ω . Chiaramente le funzioni in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ ammettono differenziale primo e secondo continui in Ω .

3.2.6 Esempio. Prendiamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Con qualche calcolo si vede che, per $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

mentre è chiaro che le derivate parziali in zero sono entrambe nulle. Si può anche verificare che le derivate parziali prime sono continue in ogni punto.

Prendiamo due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ e vediamo se esiste la derivata direzionale $f''(0,0)(\vec{v}, \vec{w})$. Se $(x, y) \neq (0,0)$, per quanto detto sopra sappiamo che f è differenziabile e che:

$$f'(x, y)(\vec{w}) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{w} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)w_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)w_y = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}w_x + \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}w_y.$$

Inoltre, sempre per quanto detto prima, si ha $f'(0,0)(\vec{w}) = 0$. Dato $t \in \mathbb{R}$ consideriamo $\varphi(t) := f'(t\vec{v})(\vec{w})$. Se $t \neq 0$, per i calcoli sopra, si ha:

$$\varphi(t) = t \left(\frac{v_y(v_x^4 + 4v_x^2v_y^2 - v_y^4)}{(v_x^2 + v_y^2)^2}w_x + \frac{v_x(v_x^4 - 4v_x^2v_y^2 - v_y^4)}{(v_x^2 + v_y^2)^2}w_y \right)$$

ed è chiaro che la formula vale anche in $t = 0$. Dunque:

$$f''(0,0)(\vec{v}, \vec{w}) = \varphi'(0) = \frac{v_y(v_x^4 + 4v_x^2v_y^2 - v_y^4)}{(v_x^2 + v_y^2)^2}w_x + \frac{v_x(v_x^4 - 4v_x^2v_y^2 - v_y^4)}{(v_x^2 + v_y^2)^2}w_y.$$

Questo mostra che f non è differenziabile due volte nell'origine, dato che $f''(0,0)(\vec{v}, \vec{w})$ non è bilineare in (\vec{v}, \vec{w}) (dato che non è lineare in \vec{v}). Dalla formula sopra:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_2, \hat{e}_1) = -1.$$

Quindi cambiando l'ordine di derivazione il risultato cambia.

3.2.7 Teorema (di Schwartz). *Se f ammette derivate parziali seconde per tutte le \mathbf{x} vicine a \mathbf{x}_0 e queste sono continue in \mathbf{x}_0 allora:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0) \quad i, j = 1, \dots, N,$$

dunque le derivate seconde miste non dipendono dall'ordine con cui si fanno le derivate.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $N = 2$. Consideriamo la funzione (definita in un intorno di (x_0, y_0)):

$$\Delta(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

Se poniamo anche $\Phi_x(y) := f(x, y) - f(x_0, y)$ (dove x è considerato un parametro) possiamo scrivere:

$$\Delta(x, y) = \Phi_x(y) - \Phi_x(y_0) = \Phi'_x(\eta)(y - y_0)$$

per un opportuno $\eta = \eta(x, y)$ tra y_0 e y (uso Lagrange). Calcolando Φ'_x :

$$\Delta(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) \right) (y - y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0)$$

per un opportuno $\xi = \xi(x, y)$ tra x_0 e x (riapplico Lagrange a $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$). Questo procedimento si può ripetere invertendo x e y (cominciando con lo scrivere $\Delta(x, y) = \Psi_y(x) - \Psi_y(x_0)$ dove $\Psi_y(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$ e facendo gli stessi calcoli). Si trova:

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi', \eta')(y - y_0)(x - x_0).$$

con $\xi' = \xi'(x, y)$ compreso tra x_0 e x e $\eta' = \eta'(x, y)$ compreso tra y_0 e y . Eguagliando e semplificando $(x - x_0)(y - y_0)$ troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi', \eta')$$

A questo punto facciamo tendere $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$: notiamo che i punti passano al limite:

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) \rightarrow (x_0, y_0); \quad (\xi'(x, y), \eta'(x, y)) \rightarrow (x_0, y_0)$$

(per come sono stati costruiti) e allora, per la continuità delle derivate seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi', \eta') \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Dato che l'eguaglianza passa al limite: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

□

3.2.8 Definizione (matrice Hessiana). Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Poniamo

$$H_f(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

La matrice quadrata $N \times N$ così introdotta si chiama *matrice Hessiana* o *Hessiano* di f nel punto \mathbf{x}_0 ed è una matrice simmetrica. Si ha:

$$f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}^\top H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N. \quad (3.8)$$

Infatti per definizione di H_f si ha $\hat{\mathbf{e}}_i^\top H_f(\mathbf{x}_0) \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f''(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j)$. Scrivendo

$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \hat{\mathbf{e}}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N w_j \hat{\mathbf{e}}_j$, per la bilinearità di $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ si ha la (3.8).

Il fatto di prendere f a valori reali fa sì che gli elementi di questa matrice siano numeri reali (se \mathbf{f} fosse a valori in \mathbb{R}^M gli elementi di $H_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ sarebbero vettori di \mathbb{R}^M). Questo caso si può comunque recuperare ragionando sulle singole componenti di \mathbf{f} .

3.2.9 Definizione (derivate successive). La costruzione fatta per le derivate seconde si può iterare definendo le derivate direzionali (parziali) n -esime e i differenziali n -esimi. Senza entrare troppo nei dettagli possiamo dire che, dati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ possiamo definire

$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ derivando \mathbf{f} nella direzione \mathbf{v}_n , poi $f'(\mathbf{v}_n)$ nella direzione \mathbf{v}_{n-1} , poi $\mathbf{f}''(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ nella direzione \mathbf{v}_{n-2} e così via. Nel caso i cui le direzioni siano scelte tra i vettori della base canonica abbiamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}}(\mathbf{x}_0) := \mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{e}}_{i_1}, \hat{\mathbf{e}}_{i_2}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{i_n}).$$

Se le derivate parziali esistono nell'intorno di \mathbf{x}_0 e sono continue in \mathbf{x}_0 allora:

$$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = d^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^N$$

dove il *differenziale n -esimo di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0* è un'applicazione n -lineare simmetrica: $d^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \underbrace{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \cdots \times \mathbb{R}^N}_{n \text{ fattori}} \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare rispetto a ogni variabile e se $i, j = 1, \dots, n$:

$$d^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = d^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n).$$

3.2.10 Definizione. Definiamo l'insieme $\mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$ come l'insieme delle funzioni $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ che hanno derivate parziali fino all' n -sima continue in Ω . Se $M = 1$ scriviamo semplicemente $\mathcal{C}^n(\Omega)$. Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$ diremo che \mathbf{f} è di classe \mathcal{C}^n su Ω .

Introduciamo anche $\mathcal{C}^n(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^M)$ come l'insieme delle funzioni \mathbf{f} di classe $\mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$ le cui derivate parziali fino all' n -sima si estendono a delle funzioni continue su tutto $\bar{\Omega}$. Anche qui conveniamo che $\mathcal{C}^n(\bar{\Omega}) := \mathcal{C}^n(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$. Per esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è in $\mathcal{C}^1(]0, 1[)$ ma non in $\mathcal{C}^1([0, 1])$.

Ricordiamo anche che, se $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^0(A; \mathbb{R}^M)$ indica le funzioni continue da A a valori in \mathbb{R}^M ($\mathcal{C}^0(A) := \mathcal{C}^0(A; \mathbb{R})$).

3.2.11 Osservazione. Notiamo che, se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$, l'espressione

$$\frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}}(\mathbf{x}_0)$$

si scrive di solito mettendo in ordine crescente le direzioni di derivazione e raggruppando quelle rispetto alla medesima direzione, cioè:

$$\frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_N^{m_N}}(\mathbf{x}_0) \quad \text{dove } m_1 + \cdots + m_N = n$$

(con la convenzione che se $m_i = 0$ non c'è la derivata nella direzione i -esima). Per esempio:

$$\text{invece di } \frac{\partial^4 \mathbf{f}}{\partial z \partial x \partial y \partial x} \quad \text{si scrive } \frac{\partial^4 \mathbf{f}}{\partial x^2 \partial y \partial z}.$$

3.2.12 Osservazione. Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^N$, allora:

$$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_n=1}^N \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}}(\mathbf{x}_0) v_{1,i_1} v_{2,i_2} \cdots v_{n,i_n} \quad (3.9)$$

Infatti se i \mathbf{v}_i sono vettori della base la formula è vera – nel caso generale si usa la n -linearità.

3.2.13 Notazione. Conveniamo di scrivere $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}^n)$ per indicare $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v})$. Se per esempio $M = 1$ e $n = 2$ si ha:

$$f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}^2) = \mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$$

che è una forma quadratica.

3.2.14 Osservazione. Dati $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, posto $\varphi_{\mathbf{v}}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ si ha:

$$\varphi_{\mathbf{v}}^{(n)}(t) = \mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{v}^n).$$

In particolare $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}^n) = \varphi_{\mathbf{v}}^{(n)}(0)$. Lo mostriamo nel caso $n = 2$. Notiamo che:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{v}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}((\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + (t+h)\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \varphi'(t). \end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{v}^2) &:= \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}'((\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0 + (t+h)\mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} = \varphi''(t). \end{aligned}$$

3.2.15 Definizione. Chiamiamo *multiindice di ordine N* (o *N -multiindice*) una N -upla di interi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ con $\alpha_h \geq 0$. Sia α un N -multiindice. Chiamiamo *lunghezza o modulo* di α il numero $|\alpha|$ e *fattoriale* di α il numero $\alpha!$ definiti da:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!.$$

Dato un vettore \mathbf{v} di \mathbb{R}^N definiamo anche la *potenza α -esima* di \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}^\alpha := v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_N^{\alpha_N}$$

Se infine $n = |\alpha|$ e se \mathbf{f} è una funzione di classe \mathcal{C}^n definiamo la derivata α -esima di \mathbf{f} :

$$D_\alpha \mathbf{f} := \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

(convenendo che quando $\alpha_i = 0$ non c'è ∂x_i a denominatore).

3.2.16 Osservazione. La notazione con i multiindici permette di esprimere in maniera concisa molte formule complicate (vedremo fra poco la formula di Taylor in più variabili). Un esempio è la generalizzazione della formula del binomio di Newton. Se $N, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si ha:

$$(x_1 + \dots + x_N)^k = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha.$$

(naturalmente ne omettiamo la dimostrazione). L'espressione $\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ si chiama *coefficiente multinomiale associato a α* . Notiamo che il binomiale $\binom{n}{m}$ altro non è che il multinomiale associato ad $\alpha = (m, n - m)$.

3.2.17 Proposizione. Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^n(\Omega; \mathbb{R}^M)$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ si ha:

$$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D_\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}^\alpha. \quad (3.10)$$

Idea di dimostrazione. Si usa la formula (3.9) con $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{v}$ e si usa il calcolo combinatorio per raggruppare i termini eguali nella sommatoria di destra. Vediamo come funziona la cosa nel caso della derivata terza con $M = 1$, $N = 3$. La (3.9) ci dice:

$$\begin{aligned}
f'''(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}^3 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} v_i v_j v_k = \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} v_1 v_1 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} v_2 v_1 v_1 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_1} v_3 v_1 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} v_1 v_2 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1} v_2 v_2 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1} v_3 v_2 v_1 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1} v_1 v_3 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} v_2 v_3 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_3 \partial x_1} v_3 v_3 v_1 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} v_1 v_1 v_2 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1} v_2 v_1 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2} v_3 v_1 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} v_1 v_2 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_2} v_2 v_2 v_2 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_2} v_3 v_2 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2} v_1 v_3 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2} v_2 v_3 v_2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_3 \partial x_2} v_3 v_3 v_2 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1} v_1 v_1 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3} v_2 v_1 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_3} v_3 v_1 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} v_1 v_2 v_3 + \\
&+ \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_3} v_2 v_2 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_3} v_3 v_2 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_3} v_1 v_3 v_3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_3} v_2 v_3 v_3 + \\
&\quad + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3 \partial x_3 \partial x_3} v_3 v_3 v_3 = \\
&\frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^3} v_1^3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^3} v_2^3 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3^3} v_3^3 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2 \partial x_2} v_1^2 v_2 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2 \partial x_3} v_1^2 v_3 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2^2} v_1 v_2^2 + \\
&\quad + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2 \partial x_3} v_2^2 v_3 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_3^2} v_1 v_3^2 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_3^2} v_2 v_3^2 + 6 \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} v_1 v_2 v_3
\end{aligned}$$

Si vede che il risultato si può ottenere dalla formula dato che i possibili 3-multiindici α con $|\alpha| = 3$ sono:

$$\begin{aligned}
(3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3) & \left(\frac{3!}{\alpha!} = 1 \right) \\
(2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2) & \left(\frac{3!}{\alpha!} = 3 \right) \\
(1, 1, 1) & \left(\frac{3!}{\alpha!} = 6 \right)
\end{aligned}$$

□

3.3 Formula di Taylor

In questo paragrafo supponiamo sempre $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^N e $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

3.3.1 Definizione (insiemi convessi). Si dice che un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ è convesso se:

$$\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A, \forall t \in [0, 1] \quad \text{si ha:} \quad t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0 \in A.$$

Notiamo che la curva $t \mapsto t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$, che in $t = 0$ vale \mathbf{x}_0 e in $t = 1$ vale \mathbf{x}_1 , descrive il *segmento* tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 . Dunque un insieme A è convesso quando A ha la proprietà di contenere tutti i segmenti aventi come estremi due punti di A .

3.3.2 Lemma. Sia Ω un aperto convesso e siano $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Omega$. Ha senso allora definire

$$\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \quad \forall t \in]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$$

per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Se $f \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, allora $\varphi \in \mathcal{C}^n(]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[)$ e si ha:

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D_\alpha f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Per la convessità si ha che $\gamma(t) := \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in \Omega$ se $t \in [0, 1]$. Dato che Ω è aperto questa proprietà rimane valida anche per $-\varepsilon < t \leq 1$ e $1 \leq t < 1 + \varepsilon$, se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo. Dunque φ è definita su $]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$.

Per l'Osservazione (3.2.14) $\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(\gamma(t))((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^k)$, cioè la prima eguaglianza in (3.11). La seconda eguaglianza segue dalla (3.10). \square

3.3.3 Definizione (Polinomio di Taylor). Sia f di classe $\mathcal{C}^n(\Omega)$. Dato $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ definiamo il polinomio di Taylor di ordine n per f rispetto al punto \mathbf{x}_0

$$P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha. \quad (3.12)$$

Conveniamo che $P_{f,n}(\mathbf{x}) = P_{f,n,\mathbf{0}}(\mathbf{x})$ (se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ non scriviamo \mathbf{x}_0). Se f è chiara dal contesto scriviamo semplicemente $P_{n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ o $P_n(\mathbf{x})$.

3.3.4 Osservazione. Se $n = 2$ abbiamo:

$$P_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

3.3.5 Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange). Siano Ω convesso, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(\Omega)$. Allora per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ esiste $t_{\mathbf{x}} \in]0, 1[$ tale che, se $\xi_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0} := t_{\mathbf{x}}\mathbf{x} + (1 - t_{\mathbf{x}})\mathbf{x}_0$ ($\xi_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0}$ è "tra \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 "), si ha:

$$f(\mathbf{x}) = P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1} = P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \quad (3.13)$$

Dimostrazione. Consideriamo $\varphi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ definita su $I :=]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. A causa del Lemma (3.3.2) la φ è di classe $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ per cui possiamo applicare la formula Taylor unidimensionale:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau_t)}{(n+1)!} t^{n+1} \quad \forall t \in I \quad \text{dove } \tau_t \in]0, 1[.$$

Mettendo $t = 1$ e utilizzando la formula (3.11) otteniamo la tesi (con $t_{\mathbf{x}} := \tau_1$):

$$\underbrace{\varphi(1)}_{=f(\mathbf{x})} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}}_{=P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{\varphi^{(n+1)}(\tau_1)}{(n+1)!}}_{=\frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x}_0 + \tau_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

\square

3.3.6 Osservazione. Conveniamo di chiamare *resto di Taylor di ordine n (per f in \mathbf{x}_0)* l'espressione:

$$R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$$

con le stesse convenzioni di notazione adottate per P_{f,n,\mathbf{x}_0} . Il teorema precedente dice che:

$$R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1} \quad \text{per } \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0} \text{ interno al segmento tra } \mathbf{x}_0 \text{ e } \mathbf{x}.$$

3.3.7 Teorema (di Taylor con resto di Peano). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N , $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e f di classe $C^n(\Omega)$. Allora*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n} = \mathbf{0}.$$

Possiamo esprimere questo fatto dicendo che $R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n)$ e scrivere

$$f(\mathbf{x}) = P_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n). \quad (3.14)$$

Dimostrazione. Possiamo prendere $\rho > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \rho) \subset \Omega$. Dato che $B(\mathbf{x}_0, \rho)$ è convesso possiamo utilizzare il teorema precedente al passo $n-1$ ottenendo:

$$R_{n-1,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{f^{(n)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n}{n!} + \frac{(f^{(n)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0}) - f^{(n)}(\mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n}{n!}$$

che equivale a:

$$R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!} (f^{(n)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x},\mathbf{x}_0}) - f^{(n)}(\mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n$$

da cui

$$\frac{\|R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n} \leq \frac{1}{n!} \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|(f^{(n)}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}) - f^{(n)}(\mathbf{x}_0))\mathbf{v}^n\|$$

ed è chiaro che il termine a destra tende a zero se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ($\Rightarrow \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}_0$). \square

3.3.8 Osservazione. La proprietà del resto secondo Peano si può esprimere:

$$R_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \sigma_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^n \quad \text{dove } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \sigma_{f,n,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = 0.$$

3.4 Massimi e minimi liberi

3.4.1 Definizione (massimi e minimi relativi). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subset \mathbb{R}^N$. Si dice che un punto \mathbf{x}_0 di A è un *punto di massimo (minimo) relativo per f* se esiste $\rho > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho) \cap A.$$

Se ciò avviene si dice che $f(\mathbf{x}_0)$ è un *massimo (minimo) relativo per f* .

3.4.2 Teorema (di Fermat). *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto e sia \mathbf{x}_0 un punto di Ω (che quindi è interno a Ω). Se \mathbf{x}_0 è punto di massimo o minimo relativo per f e se f è differenziabile in \mathbf{x}_0 allora \mathbf{x}_0 è un critico (o stazionario) per f cioè:*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. Se \mathbf{x}_0 è un punto di massimo relativo interno a Ω si ottiene facilmente dalle definizioni che

$$\exists \rho > 0 \text{ tale che } B(\mathbf{x}_0, \rho) \subset \Omega \text{ e } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho).$$

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Allora $x_0 + t\mathbf{v} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$ purché $|t| < \varepsilon_{\mathbf{v}} := \rho/\|\mathbf{v}\|$.

Da tutto questo segue:

$$\varphi(t) := f(x_0 + t\mathbf{v}) \text{ è definita per } -\varepsilon_{\mathbf{v}} < t < \varepsilon_{\mathbf{v}} \text{ e ha massimo per } t = 0.$$

Ne segue $\varphi'(0) = 0$. Ma (per definizione) $\varphi'(t) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$ e quindi

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Prendendo $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ si trova $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2 = 0$ da cui $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. \square

3.4.3 Teorema (analisi dei punti critici). *Sia f di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ e supponiamo che $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ sia un punto critico per f . Allora:*

1. se $H_f(\mathbf{x}_0)$ è strettamente definita positiva (negativa), allora \mathbf{x}_0 è di minimo (massimo) relativo per f ;
2. se $H_f(\mathbf{x})$ è definita positiva (negativa) per le \mathbf{x} in un intorno di \mathbf{x}_0 , allora \mathbf{x}_0 è di minimo (massimo) relativo per f ;
3. se $H_f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita, allora \mathbf{x}_0 non è né punto di massimo relativo né punto di minimo relativo per f .

Dimostrazione. Usando la formula di Taylor con resto di Peano (nota che $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$):

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \sigma(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$$

dove $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_{f,2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Se $H_f(\mathbf{x}_0)$ è strettamente positiva si ha:

$$\mathbf{v}^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \geq \nu \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$$

per una opportuna $\nu > 0$. Ne segue:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + (\nu + \sigma(\mathbf{x}))\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$$

Dato che $\nu + \sigma(\mathbf{x}) \rightarrow \nu > 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ esiste un disco $B(\mathbf{x}_0, \rho) \subset \Omega$ tale che $\nu + \sigma(\mathbf{x}) \geq \nu/2$ per le \mathbf{x} in $B(\mathbf{x}_0, \rho)$. Dunque:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho).$$

Abbiamo dimostrato la prima proprietà (per il massimo si fa nello stesso modo).

Se H_f è (solo) positiva in un intorno $B(\mathbf{x}_0, \rho)$ possiamo usare la formula con il resto di Lagrange in $B(\mathbf{x}_0, \rho)$ (che è convesso):

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\xi_{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$$

dove $\xi_{\mathbf{x}}$ si trova sul segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} e quindi $\xi_{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$, da cui $H_f(\xi_{\mathbf{x}}) \geq 0$.

Se infine $H_f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita possiamo trovare due direzioni \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 in \mathbb{R}^N tali che:

$$f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_1 > 0, \quad f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_2^T H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_2 < 0.$$

Dato che $f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_1 = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_2 = 0$ se ne ricava che esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_1) > f(\mathbf{x}_0) \text{ per } 0 < |t| < \varepsilon, \quad f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_2) < f(\mathbf{x}_0) \text{ per } 0 < |t| < \varepsilon.$$

Se ciò è vero \mathbf{x}_0 non è né di massimo né di minimo. \square

3.5 Differenziabilità dell'inversa e funzioni implicite

3.5.1 Lemma. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto convesso e sia $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ e supponiamo che $\|J_\Phi(\mathbf{x})\| \leq L$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$. Allora:*

$$\|\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)\| \leq L\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega.$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$. Per la formula di Taylor secondo Lagrange:

$$\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1) = J_\Phi(\xi)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

dove ξ si trova sul segmento tra \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Passando alle norme:

$$\|\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)\| \leq \|J_\Phi(\xi)\| \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leq L\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

□

3.5.2 Teorema (di inversione locale). *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^N e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Sia $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ tale che $\det(J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$, cioè tale che il differenziale $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ sia invertibile.*

Allora esiste $\rho > 0$ tale che \mathbf{f} è iniettiva in $B(\mathbf{x}_0, \rho)$, l'insieme $\Omega_1 := f(B(\mathbf{x}_0, \rho))$ è un aperto di \mathbb{R}^N , la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1} : \Omega_1 \rightarrow B(\mathbf{x}_0, \rho)$ (a rigore l'inversa della restrizione $\mathbf{f}|_{B(\mathbf{x}_0, \rho)}$, che è ben definita su Ω_1) è di classe $\mathcal{C}^1(\Omega_1; \mathbb{R}^N)$ e vale:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = J_\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))^{-1} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_1,$$

che si può scrivere anche:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = J_\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da:

$$\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

la cui matrice jacobiana è $J_\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{Id} - J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}J_\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Dato che $J_\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ è continua e $J_\Phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Id} - J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Id} - \mathbf{Id} = 0$, possiamo scegliere $\rho_0 > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \rho_0) \subset \Omega$ e:

$$\|J_\Phi(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho_0). \quad (3.15)$$

Dalla (3.15) e dal Lemma (3.5.1):

$$\|\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \rho_0).$$

Ne segue che, per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \rho_0)$ si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| &= \|\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1) + J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1))\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \\ &\|J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1))\| \Rightarrow \|J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1))\| \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|. \end{aligned}$$

D'altra parte $\|J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2))\| \leq \|J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|$ da cui:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \geq \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{2\|J_\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|} \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \rho_0). \quad (3.16)$$

In particolare \mathbf{f} è iniettiva in $B(\mathbf{x}_0, \rho)$ e quindi è definita $\mathbf{f}^{-1} : \underbrace{\mathbf{f}(B(\mathbf{x}_0, \rho))}_{=\Omega_1} \rightarrow B(\mathbf{x}_0, \rho)$ e:

$$\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_2)\| \leq 2\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega_1 \quad (3.17)$$

da cui \mathbf{f}^{-1} è continua. Rimane da mostrare che Ω_1 è aperto e la differenziabilità di \mathbf{f}^{-1} .

Prendiamo $\mathbf{y} \in \Omega_1$ e sia $\mathbf{x} := \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ l'unico punto in $B(\mathbf{x}_0, \rho_0)$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Scegliamo $\rho > 0$ tale che $\overline{B(\mathbf{x}, \rho)} \subset B(\mathbf{x}_0, \rho_0)$ e poniamo $\rho_1 := \frac{\rho}{2\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|}$.

Dato $\mathbf{y}' \in B(\mathbf{y}, \rho_1)$ definiamo la mappa $\Phi_{\mathbf{y}'} : \overline{B(\mathbf{x}, \rho)} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo:

$$\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}') := \mathbf{x}' - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}') \quad (= \Phi(\mathbf{x}') + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{y}') \quad (\mathbf{x}' \in \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}).$$

Dato che $\Phi_{\mathbf{y}'}$ differisce da Φ per una costante, si ha ancora:

$$\|\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}_2) - \Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}_1)\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}.$$

Notiamo che $\Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Se allora $\mathbf{x}' \in \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}$

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}') - \mathbf{x}\| &= \|\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}') - \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| \leq \|\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}') - \Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x})\| + \|\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}) - \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}_{\leq \rho} + \|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\| \underbrace{\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|}_{< \rho_1} < \frac{1}{2}\rho + \|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|\rho_1 \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Dunque $\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}')$ è contenuto in $B(\mathbf{x}, \rho) \subset \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}$ per tutte le \mathbf{x}' di $\overline{B(\mathbf{x}, \rho)}$; in altri termini $\Phi_{\mathbf{y}'} : \overline{B(\mathbf{x}, \rho)} \rightarrow \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}$. Siamo dunque nelle condizioni di applicare il Teorema delle Contrazioni e ottenere che esiste un punto \mathbf{x}' in $\overline{B(\mathbf{x}, \rho)}$ tale che:

$$\Phi_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' \Leftrightarrow J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{y}') = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}') = \mathbf{y}'.$$

Riassumendo abbiamo dimostrato che, dato \mathbf{y} in Ω_1 , esiste $\rho_1 > 0$ tale che ogni $\mathbf{y}' \in B(\mathbf{y}, \rho_1)$ appartiene a $\mathbf{f}(\overline{B(\mathbf{x}, \rho)}) \subset \mathbf{f}(B(\mathbf{x}_0, \rho_0)) = \Omega_1$. Questo significa che Ω_1 è aperto.

Dimostriamo che \mathbf{f}^{-1} è differenziabile. Innanzitutto notiamo che $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ è invertibile per ogni \mathbf{x} in $B(\mathbf{x}_0, \rho_0)$. Questo si potrebbe dedurre dalla (3.15), ma lo si può comunque ottenere pur di prendere ρ_0 abbastanza piccolo (dato che $\mathbf{x} \mapsto \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))$ è continua).

Sia $\mathbf{y} \in \Omega_1$ e sia $\mathbf{x} := \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in B(\mathbf{x}_0, \rho_0)$. Per la differenziabilità di \mathbf{f} in \mathbf{x} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}')\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x}' \in \Omega.$$

dove $\sigma(\mathbf{x}') \rightarrow \mathbf{0}$ per $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$. Prendiamo $\mathbf{y}' \in \Omega_1$ e poniamo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}')$:

$$\mathbf{y}' - \mathbf{y} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) + \sigma(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}'))\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\|.$$

Applichiamo $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}$ a entrambi i lati:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{y}' - \mathbf{y}) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) + \underbrace{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}\sigma(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}'))\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\|}_{=:R(\mathbf{y}')}$$

Poniamo $\sigma_1(\mathbf{y}') := -R(\mathbf{y}')/\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$. Usando la (3.17):

$$\|\sigma_1(\mathbf{y}')\| \leq \frac{\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}\|\|\sigma(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}'))\|2\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|} = L\|\sigma(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))\|$$

con $L = 2\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}\|\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)^{-1}\|$. Se $\mathbf{y}' \rightarrow \mathbf{y}$ si ha $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') \rightarrow \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ da cui $\sigma_1(\mathbf{y}') \rightarrow \mathbf{0}$. Abbiamo dunque:

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}') = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{y}' - \mathbf{y}) + \sigma_1(\mathbf{y}')\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{y}' \in \Omega_1,$$

con $\sigma_1(\mathbf{y}') \rightarrow \mathbf{0}$ per $\mathbf{y}' \rightarrow \mathbf{y}$ e quindi \mathbf{f}^{-1} è differenziabile in \mathbf{y} e $J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}$. \square

3.5.3 Notazione. Sia data una funzione $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ con Ω aperto di \mathbb{R}^{N+M} e supponiamo \mathbf{g} differenziabile. Conveniamo di indicare (\mathbf{x}, \mathbf{y}) i punti di \mathbb{R}^{N+M} , dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$. Ricordiamo che

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \cdots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \cdots, & \frac{\partial g_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

è lo “Jacobiano parziale” di \mathbf{g} rispetto a x_1, \dots, x_N (che è una matrice $M \times N$) e

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \cdots, & \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \cdots, & \frac{\partial g_M}{\partial y_M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

è lo “Jacobiano parziale” di \mathbf{g} rispetto a y_1, \dots, y_M (che è una matrice $M \times M$).

3.5.4 Teorema (delle funzioni implicite). *Siano N, M interi, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ aperto e sia $\mathbf{g} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Supponiamo che $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ verifichi $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e che si abbia:*

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right) \neq 0.$$

Allora esistono $\rho > 0$, un aperto W in \mathbb{R}^N con $\mathbf{x}_0 \in W$ e una funzione $\mathbf{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^M$ tali che $B((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \rho) \subset \Omega$ e:

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \rho) : \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in W, \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Inoltre \mathbf{f} è differenziabile in W e si ha:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in W. \quad (3.18)$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N+M}$ ponendo:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

Si ha che $\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ e

$$J_{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_N, & \mathbf{0}_{N,M} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{pmatrix}$$

(\mathbf{Id}_N indica la matrice identica $N \times N$, $\mathbf{0}_{N,M}$ è la matrice nulla $N \times M$). Per la struttura di J_{Φ} si ha $\det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{y})}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right) \neq 0$. Per il Teorema di Inversione Locale esiste $\rho_0 > 0$ tale che Φ è iniettiva su $B := B_{\mathbb{R}^{N+M}}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \rho_0)$ e l'immagine $\Omega_1 := \Phi(B)$ è un aperto di \mathbb{R}^{N+M} sul quale è ben definita la funzione inversa $\Psi = \Phi^{-1} : \Omega_1 \rightarrow B$. Notiamo che $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega_1$. Scriviamo $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$. Dato che:

$$(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \Phi(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) = \Phi(\Psi_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \Psi_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) = (\Psi_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{g}(\Psi_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \Psi_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})))$$

(se $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega_1$) otteniamo:

$$\Psi_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}, \Psi_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\xi} \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega_1.$$

Poniamo $W := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \Omega_1\}$. W è aperto in quanto $W = \pi^{-1}(\Omega_1)$, dove $\pi : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è la proiezione: $\pi(x, y) = (x, 0)$, che è chiaramente continua. Inoltre $\mathbf{x}_0 \in W$ dato che $\Phi(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. Definiamo $\mathbf{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^M$ ponendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \Psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ per ogni $\mathbf{x} \in W$. Per quanto sopra si ha:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \Psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in W.$$

Viceversa se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, allora:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1 \text{ e } \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} \in W \text{ e } \mathbf{y} = \Psi_2(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Dunque abbiamo caratterizzato $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \cap B((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \rho_0)$ come grafico della funzione \mathbf{f} definita su W . Per quanto riguarda la differenziabilità di \mathbf{f} basta usare le regole di calcolo. Prima di tutto:

$$\begin{aligned} J_{\Psi}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &= J_{\Phi}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}))^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_N, & \mathbf{0}_{N,M} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})), & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_N, & \mathbf{0}_{N,M} \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}))\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})), & \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\Psi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}))\right)^{-1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} J_{11}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) & J_{12}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \\ J_{21}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) & J_{22}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notiamo ora che $\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi}_2 \circ \Psi \circ \boldsymbol{\sigma}$ dove $\boldsymbol{\pi}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ (proiezione su \mathbb{R}^M) e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$. È facile vedere che

$$J_{\boldsymbol{\pi}_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}_{M,N} \quad \mathbf{Id}_M) \quad J_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_N \\ \mathbf{0}_{N,M} \end{pmatrix}$$

da cui, usando la formula di composizione:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{0}_{M,N} \quad \mathbf{Id}_M) \begin{pmatrix} J_{11}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) & J_{12}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \\ J_{21}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) & J_{22}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_N \\ \mathbf{0}_{N,M} \end{pmatrix} = J_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \\ &= -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{0}))\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

□

3.5.5 Osservazione (caso $M = 1$). Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^{N+1} e sia $G \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Poniamo:

$$M := \{(\mathbf{x}, y) \in \Omega : G(\mathbf{x}, y) = 0\}.$$

Supponiamo che:

$$(\mathbf{x}_0, y_0) \in M, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ e una funzione $f : B(\mathbf{x}_0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe \mathcal{C}^1 tali che:

$$M \cap (B(\mathbf{x}_0, \rho) \times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)\}.$$

3.5.6 Osservazione (caso $N, M = 1$). Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^2 e sia $G \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Poniamo:

$$M := \{(x, y) \in \Omega : G(x, y) = 0\}.$$

Supponiamo che:

$$(x_0, y_0) \in M, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ e una funzione $f :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe \mathcal{C}^1 tali che:

$$M \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[) = \{\mathbf{x}, f(x) : \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\}.$$

Notiamo che $\gamma(x) := (x, f(x))$ è una curva in \mathbb{R}^2 e che

$$\gamma'(x) = (1, f'(x)) = \left(1, -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))} \right) \neq (0, 0);$$

dunque vicino a (x_0, y_0) l'insieme M è descritto da una curva regolare.

3.5.7 Osservazione. È abbastanza chiaro che, se $\Omega \in \mathbb{R}^{N+M}$, $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_{N+M})$ è un punto di Ω , e $\mathbf{g} \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ con $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, e se un sottoinsieme di M variabili x_{i_1}, \dots, x_{i_M} tra le $N + M$ x_1, \dots, x_{N+M} è tale che lo “jacobiano parziale $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial (x_{i_1} \dots x_{i_M})}(\mathbf{x}_0)$ ” è invertibile, allora, vicino a \mathbf{x}_0 , l'insieme $M := \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ si descrive come il grafico di una funzione \mathbf{f} definita sulle rimanenti N variabili x_{j_1}, \dots, x_{j_N} a valori nelle x_{i_1}, \dots, x_{i_M} .

In particolare nel caso $M = 1$ basta che una derivata $\frac{\partial G}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ (i tra 1 e $N + 1$) per poter affermare che esiste una funzione f definita nelle x_j con $j \neq i$ a valori reali, tale che, vicino a \mathbf{x}_0

$$\{g(\mathbf{x}) = 0\} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{N+1}), x_{i+1}, \dots, x_{N+1})\}.$$

3.6 Massimi e minimi vincolati

Al solito Ω è un aperto di \mathbb{R}^N e fissiamo anche $M < N$.

3.6.1 Definizione. Chiamiamo *vincolo regolare (bilatero) di codimensione M in Ω* un insieme $V \subset \Omega$ tale che esiste $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ di classe \mathcal{C}^1 con le proprietà:

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \quad \text{rank}(J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) = M \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (3.19)$$

(ricordiamo che il *rango di una matrice* A è il massimo n per cui esiste un minore $n \times n$ di A con determinante non nullo – notiamo anche che l'ipotesi sopra significa che le M righe di $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti). Se V è un vincolo regolare di codimensione M in Ω possiamo chiamare *dimensione di V* il numero intero $N - M$.

Se $\Omega = \mathbb{R}^N$ diciamo semplicemente che V è un *vincolo regolare di codimensione M* .

3.6.2 Esempio. L'insieme $V := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y\}$ è un vincolo regolare di codimensione due. Infatti possiamo considerare:

$$\mathbf{g}(x, y, x) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x - y \end{pmatrix}$$

(per tutte le (x, y, z) in \mathbb{R}^3). Chiaramente $V = \{\mathbf{g}(x, y, z) = \mathbf{0}\}$. Inoltre:

$$J_{\mathbf{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha sempre rango due nei punti di V . Infatti il minore $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante $-2(x+y) = -4y = -4y$ per $(x, y, z) \in V$. Dunque, se $(x, y, z) \in V$ e $x \neq 0$ $J_{\mathbf{g}}(x, y, z)$ rango due. Se $x = 0$ anche $y = 0$ da cui $z \neq 0$ e in tal caso il minore $\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante $-2z \neq 0$. Si vede abbastanza facilmente che V è descritto dalla curva regolare $\gamma(t) := \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t), \sin(t)\right)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

3.6.3 Osservazione. Un vincolo regolare di codimensione M si può sempre vedere come intersezione di M vincoli regolari di codimensione 1. Infatti se \mathbf{g} è tale che $V = \{\mathbf{x} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ allora:

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_M \quad \text{dove } V_i := \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) = 0\},$$

e dove $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_M(\mathbf{x})$ sono le componenti di $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. È chiaro che ogni V_i è regolare perché se fosse $\nabla g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ la riga i -esima di $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ sarebbe identicamente nulla e quindi ogni minore $M \times M$ avrebbe una riga nulla da cui $\text{rank}(J_{\mathbf{g}})(\mathbf{x}) < M$, contro l'ipotesi (3.19). Non è però vero il viceversa perché non è detto che insiemi regolari di codimensione 1 abbiano sempre intersezione regolare: per esempio

$$\text{l'iperboloide } V := \{z^2 + 1 = x^2 + y^2\} \quad \text{e il piano } P := \{x = 1\}$$

sono regolari perché $\nabla g_i(\mathbf{x})$ è il trasposto della riga i -esima di $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ e se $\nabla g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ si avrebbe $\det(J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) = 0$. Però la loro intersezione è data da:

$$V \cap P = \{x = 1, z = y\} \cap \{x = 1, z = -y\}$$

cioè dall'unione di due rette che si intersecano in $(1, 0, 0)$ che **non può essere regolare** dato che non vale la tesi del teorema delle funzioni implicite:

In effetti l'ipotesi su $J_{\mathbf{g}}$ in (3.19) equivale a dire che le righe di $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti per ogni $\mathbf{x} \in V$, che è lo stesso che: **gli M vettori $\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x})$ sono linearmente indipendenti.** Geometricamente questo significa che i V_i si “intersecano trasversalmente”. Nell'esempio sopra invece l'iperboloide V e il piano P sono “tangenti” nel punto $(1, 0, 0)$.

Vediamo ora che i vincoli regolari ammettono uno “spazio tangente” e uno “spazio normale” in ogni loro punto. Ricordiamo che sono state introdotte le direzioni tangenti a un insieme generico nella Definizione (2.1.10)

3.6.4 Teorema. *Sia V un vincolo regolare di codimensione M in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione per cui valgono le (3.19). Allora se $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N$ si ha:*

$$\vec{\mathbf{v}} \text{ è tangente a } V \text{ in } \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Dimostrazione. Dimostriamo “ \Rightarrow ”. Se $\vec{\mathbf{v}}$ è tangente a V in \mathbf{x}_0 esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste una curva $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow V$, di classe \mathcal{C}^1 , con $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma'(0) = \vec{\mathbf{v}}$. Ma allora $\mathbf{g}(\gamma(t)) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ e questo implica $J_{\mathbf{g}}(\gamma(t))\gamma'(t) = \mathbf{0}$. Prendendo $t = 0$ si ottiene $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$.

Dimostriamo “ \Leftarrow ”. Scriviamo i punti \mathbf{x} di \mathbb{R}^N come $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ con $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-M}$ e $\mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^M$. A meno di riordinare le variabili possiamo supporre che $\det \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0) \right) \neq 0$. Sia $\vec{\mathbf{v}}$ tale che $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ e scriviamo anche $\vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{v}}'')$ con $\vec{\mathbf{v}}' \in \mathbb{R}^{N-M}$ e $\vec{\mathbf{v}}'' \in \mathbb{R}^M$. Dato che $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0) \right)$, la condizione su $\vec{\mathbf{v}}$ si può scrivere come:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}}' + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}}'' = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}'' = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}}'$$

(usando l'invertibilità di $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0)$ che abbiamo in ipotesi). Usando il Teorema delle Funzioni implicite possiamo trovare $\rho > 0$, $\rho_1 > 0$ e una funzione $\mathbf{f} : B_{\mathbb{R}^{N-M}}(\mathbf{x}'_0, \rho) \rightarrow B_{\mathbb{R}^M}(\mathbf{x}''_0, \rho_1)$, di classe \mathcal{C}^1 , tale che:

$$V \cap (B_{\mathbb{R}^{N-M}}(\mathbf{x}'_0, \rho) \times B_{\mathbb{R}^M}(\mathbf{x}''_0, \rho_1)) = \{ \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x}' \in B_{\mathbb{R}^{N-M}}(\mathbf{x}'_0, \rho), \mathbf{x}'' = \mathbf{f}(\mathbf{x}') \}.$$

Prendiamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\varepsilon \|\vec{\mathbf{v}}'\| < \rho$ e definiamo una curva γ in \mathbb{R}^N ponendo:

$$\gamma(t) := (\mathbf{x}'_0 + t\vec{\mathbf{v}}', \mathbf{f}(\mathbf{x}'_0 + t\vec{\mathbf{v}}')) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà di \mathbf{f} è chiaro che, se $|t| \leq \varepsilon$, si ha $\gamma(t) \in V$ e $\gamma(0) = (\mathbf{x}'_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}'_0)) = (\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0) = \mathbf{x}_0$. Inoltre:

$$\gamma'(t) = (\vec{\mathbf{v}}', J_{\mathbf{f}}(\gamma(t))\gamma'(t)) = \left(\vec{\mathbf{v}}', - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\gamma(t)) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}'}(\gamma(t))\gamma'(t) \right)$$

(abbiamo usato la formula (3.18)). Se $t = 0$ otteniamo:

$$\gamma'(0) = \left(\vec{\mathbf{v}}', - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}''}(\mathbf{x}_0) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x}_0)\vec{\mathbf{v}}' \right) = (\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{v}}'') = \vec{\mathbf{v}}.$$

Abbiamo dimostrato che $\vec{\mathbf{v}}$ è una direzione tangente. □

3.6.5 Definizione. Dato un vincolo regolare di codimensione M in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, per ogni $\mathbf{x}_0 \in V$ indichiamo:

$$T_V(\mathbf{x}_0) := \{ \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N : \vec{\mathbf{v}} \text{ è tangente a } V \text{ in } \mathbf{x}_0 \} \quad , \quad N_V(\mathbf{x}_0) := T_V(\mathbf{x}_0)^\perp$$

che sono detti rispettivamente *spazio tangente* e *spazio normale* a V in \mathbf{x}_0 . La peculiarità rispetto a un insieme V generico è che questi insiemi sono dei sottospazi lineari di \mathbb{R}^N (tra loro complementari).

Quello che segue è un risultato di algebra lineare. Notiamo che invece di una matrice $M \times N$ si potrebbe considerare un'applicazione lineare $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_1$ con $\dim(\mathbb{X}) = N$ e $\dim(\mathbb{X}_1) = M$. Ricordiamo che se $A \in \mathcal{M}(M, N)$ sono definiti il *nucleo* e l'*immagine*:

$$\text{Ker}(A) := \{ \vec{\mathbf{v}} : A\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \} \quad , \quad \text{Rank}(A) := A(\mathbb{R}^N) = \{ \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^M : \exists \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N \text{ con } A\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \}.$$

Ricordiamo anche che la trasposta A^\top di una matrice è caratterizzata dalla proprietà:

$$(A^\top \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot (A\vec{\mathbf{v}}) \quad \forall \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}.$$

3.6.6 Lemma. *Sia A una matrice $M \times N$. Allora:*

$$\text{Ker}(A)^\perp = \text{Rank}(A^\top). \tag{3.21}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\text{Rank}(A^\top) \subset \text{Ker}(A)^\perp$. Sia $\vec{w} \in \text{Rank}(A^\top)$, allora $\vec{w} = A^\top \vec{v}$ per un opportuno \vec{v} . Dato $\vec{v}_0 \in \text{Ker}(A)$ si ha:

$$\vec{w} \cdot \vec{v}_0 = (A^\top \vec{v}) \cdot \vec{v}_0 = \vec{v} \cdot (A \vec{v}_0) = \vec{v} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Dunque $\vec{w} \in \text{Ker}(A)^\perp$. Viceversa dimostriamo che $\text{Ker}(A)^\perp \subset \text{Rank}(A^\top)$. Prendiamo un \vec{w} tale che $\vec{w} \cdot \vec{v}_0 = 0$ per tutti i $\vec{v}_0 \in \text{Ker}(A)$. Definiamo la funzione $\varphi: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$\varphi(\vec{\lambda}) := \|A^\top \vec{\lambda} - \vec{w}\|^2 = \|A^\top \vec{\lambda}\|^2 - 2(A^\top \vec{\lambda}) \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = (AA^\top \vec{\lambda}) \cdot \vec{\lambda} - 2(A\vec{w}) \cdot \vec{\lambda} + \|\vec{w}\|^2.$$

Notiamo che AA^\top è una matrice $M \times M$ simmetrica. È chiaro che φ è differenziabile e

$$\nabla \varphi(\vec{\lambda}) = 2AA^\top \vec{\lambda} - 2A\vec{w} = 2A(A^\top \vec{\lambda} - \vec{w}).$$

Inoltre AA^\top è semidefinita positiva (dato che $(AA^\top \vec{\lambda}) \cdot \vec{\lambda} = \|A^\top \vec{\lambda}\|^2$). Per il Teorema Spettrale esiste una decomposizione $\mathbb{R}^M = \mathcal{X}^+ \oplus \mathcal{X}_0$ con \mathcal{X}^+ e \mathcal{X}_0 ortogonali, $\mathcal{X}_0 = \text{Ker}(AA^\top)$ e AA^\top definita positiva su \mathcal{X}^+ . Dunque per ogni $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M$ posso scrivere (in maniera univoca) $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^+ + \vec{\lambda}_0$ dove $\vec{\lambda}^+ \in \mathcal{X}^+$, $\vec{\lambda}_0 \in \mathcal{X}_0$ e $\vec{\lambda}^+ \cdot \vec{\lambda}_0 = 0$. Allora

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{\lambda}) &= AA^\top(\vec{\lambda}^+ + \vec{\lambda}_0) \cdot (\vec{\lambda}^+ + \vec{\lambda}_0) - 2(A\vec{w}) \cdot (\vec{\lambda}^+ + \vec{\lambda}_0) + \|\vec{w}\|^2 = \\ &= AA^\top(\vec{\lambda}^+) \cdot (\vec{\lambda}^+ + \vec{\lambda}_0) - 2(A\vec{w}) \cdot \vec{\lambda}^+ - 2(A^\top \vec{\lambda}_0) \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = \\ &= AA^\top(\vec{\lambda}^+) \cdot \vec{\lambda}^+ + (AA^\top \vec{\lambda}_0) \cdot \vec{\lambda} - 2(A\vec{w}) \cdot \vec{\lambda}^+ - 2(A^\top \vec{\lambda}_0) \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = \\ &= AA^\top(\vec{\lambda}^+) \cdot \vec{\lambda}^+ - 2(A\vec{w}) \cdot \vec{\lambda}^+ + \|\vec{w}\|^2 \geq \varepsilon \|\vec{\lambda}^+\|^2 - \|A\vec{w}\| \|\vec{\lambda}^+\| + \|\vec{w}\|^2 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\vec{w} \cdot (A^\top \vec{\lambda}_0) = 0$ perché $A(A^\top \vec{\lambda}_0) = AA^\top \vec{\lambda}_0 = 0$ e dove $\varepsilon > 0$ è il più piccolo autovalore positivo di AA^\top . Questo mostra che $\varphi(\vec{\lambda})$ dipende solo da $\vec{\lambda}^+$ e che

$$\lim_{\|\vec{\lambda}^+\| \rightarrow \infty} \varphi(\vec{\lambda}^+) = +\infty.$$

Da Weierstrass si deduce allora che φ ammette minimo in un $\vec{\lambda}^* \in \mathcal{X}^+$ che dunque è stazionario per φ ; questo significa:

$$A(A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) \in \text{Ker}(A).$$

Ma allora $\vec{w} \cdot (A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) = 0$; ne segue:

$$\varphi(\vec{\lambda}^*) = (A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) \cdot (A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) = (A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}) \cdot (A^\top \vec{\lambda}^*) = (A(A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w})) \cdot (A^\top \vec{\lambda}^*) \cdot \vec{\lambda}^* = 0.$$

Abbiamo dimostrato $\|A^\top \vec{\lambda}^* - \vec{w}\|^2 = 0$, da cui $\vec{w} = A^\top \vec{\lambda}^*$ e dunque $\vec{w} \in \text{Rank}(A^\top)$. \square

3.6.7 Proposizione. *Se V è un vincolo regolare di codimensione M e $\mathbf{x}_0 \in V$, lo spazio normale a V in \mathbf{x}_0 si caratterizza come:*

$$N_V(\mathbf{x}_0) = \text{Rank}(J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)^\top) = \{\lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_M \nabla g_M(\mathbf{x}_0) : \lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}\} \quad (3.22)$$

dove $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_M)$ è legata a V dalla (3.19).

Dimostrazione. La prima eguaglianza segue dalla definizione $N_V(\mathbf{x}_0) := T_V(\mathbf{x}_0)^\perp$, dalla proprietà (3.20) e dalla (3.21). Per quanto riguarda la seconda basta notare che

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)^\top = (\nabla g_1, \dots, \nabla g_M)$$

e quindi

$$\text{Rank}(J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)^\top) = \{J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_0)^\top \vec{\lambda} : \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^M\} = \{\lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_M \nabla g_M : \lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}\}.$$

\square

3.6.8 Osservazione. Ricordiamo che dati $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M \in \mathbb{R}^N$, si indica con $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M)$ il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$. Il risultato precedente stabilisce dunque che:

$$N_V(\mathbf{x}_0) = \text{span}(\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x}_0)).$$

3.6.9 Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N e V un vincolo regolare di codimensione M in Ω , individuato da una funzione $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$ verificante la (3.19). Sia $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ e sia $\mathbf{x}_0 \in V$ un punto di massimo o minimo relativo per f ristretta a V . Allora esistono M numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ tali che*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(\mathbf{x}_0) \quad (3.23)$$

($\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_M)$). I numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ sono detti moltiplicatori di Lagrange.

In altre parole (in virtù della Proposizione (3.6.7)), se \mathbf{x}_0 è di massimo o minimo locale per f su V , allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in N_V(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione. Sia $\vec{\mathbf{v}}$ una direzione tangente a V in \mathbf{x}_0 . Allora esiste una curva $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow V$, per $\varepsilon > 0$ opportuno, tale che $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma'(0) = \vec{\mathbf{v}}$.

Definiamo $\varphi : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\varphi(t) := f(\gamma(t))$; dato che \mathbf{x}_0 è di massimo (minimo) locale per f in V si ha che 0 è di massimo (minimo) locale in $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Dunque $\varphi'(0) = 0$. Ma $\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ e quindi

$$0 = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{\mathbf{v}}.$$

Per l'arbitrarietà di $\vec{\mathbf{v}}$ se ne ricava che $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ è ortogonale a ogni direzione tangente a V in \mathbf{x}_0 , cioè $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in N_V(\mathbf{x}_0)$. Per la Proposizione (3.6.7) si ha la tesi. \square

3.6.10 Osservazione. Supponiamo che V sia un vincolo regolare di codimensione M in Ω aperto di \mathbb{R}^N e sia $\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$ due funzioni verificanti (3.19). Allora se $i = 1, \dots, M$, applicando il teorema precedente con $f = \tilde{g}_i$ (che è costante su V) si ha:

$$\nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \lambda_{i,j}(\mathbf{x}) \nabla g_j(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

per opportuni $\lambda_{i,j}$ (dipendenti da \mathbf{x}). Dunque $\nabla \tilde{g}_i(\mathbf{x}) \in \text{span}(\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x}))$ per $i = 1, \dots, M$. Scambiando \mathbf{g} e $\tilde{\mathbf{g}}$ si ottiene:

$$\text{span}(\nabla \tilde{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla \tilde{g}_M(\mathbf{x})) = \text{span}(\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x})).$$

Dunque il sottospazio $\text{span}(\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x}))$ non dipende dalla \mathbf{g} utilizzata per descrivere V ma solo da V . Questo era già implicito nell'enunciato del Teorema (3.6.4), dato che nella definizione delle direzioni tangenti (e quindi delle normali) non si usa la \mathbf{g} .

Notiamo che nel caso \mathbf{g} scalare, cioè $M = 1$, lo spazio normale è dato da $N_V(\mathbf{x}) = \{\lambda \nabla g(\mathbf{x}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3.6.11 Definizione. Sia V un vincolo regolare di codimensione M in Ω aperto di \mathbb{R}^N e sia $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Un punto $\mathbf{x}_0 \in V$ si dice *punto critico vincolato per f su V* se $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in N_V(\mathbf{x}_0)$, cioè se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ in \mathbb{R} tali che valga (3.23) (dove \mathbf{g} è una funzione per cui vale (3.19)).

Il Teorema dei Moltiplicatori stabilisce dunque che i punti di massimo o minimo relativo per f su V sono punti critici vincolati per f su V .

Finora abbiamo considerato vincoli definiti mediante delle “condizioni di eguaglianza”. Possiamo anche considerare delle “condizioni di disequaglianza”.

3.6.12 Definizione. Diremo che V è un *vincolo regolare unilatero* in Ω se esiste una funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tale che

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ con } g(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.24)$$

3.6.13 Osservazione. Se V è come sopra, allora $\partial_\Omega V = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = 0\}$ (se $\Omega = \mathbb{R}^N$ $\partial V = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = 0\}$). Questo si può dedurre dal fatto che $\{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = 0\}$ è localmente l'epigrafico della "funzione implicita" che è continua (vedi la (1.5.8)).

Notiamo che un vincolo unilatero è necessariamente di codimensione 1 dato che le disuguaglianze hanno senso solo in \mathbb{R} .

3.6.14 Teorema. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N . Sia V un vincolo regolare unilatero individuato da una $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x}_0 \in V$. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Se \mathbf{x}_0 è punto di massimo o minimo relativo per f su V allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda g(\mathbf{x}_0), \quad g(\mathbf{x}_0) < 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Dimostrazione. Se $g(\mathbf{x}_0) < 0$, allora \mathbf{x}_0 è interno a V , dunque \mathbf{x}_0 è un punto stazionario libero, cioè $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$. Se $g(\mathbf{x}_0) = 0$, allora \mathbf{x}_0 è (in particolare) un punto di massimo (minimo) relativo per f su $V_0 = \partial_\Omega V = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = 0\}$. Per il teorema dei moltiplicatori (applicato a V_0) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda g(\mathbf{x}_0)$. In entrambi i casi vale la tesi. \square

Vediamo ora (senza dimostrarlo) il caso generale in cui sono presenti sia condizioni di eguaglianza che condizioni di disuguaglianza.

3.6.15 Teorema. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N . Siano $M \geq 0$ e $K \geq 0$ due interi e siano g_1, \dots, g_M e h_1, \dots, h_K delle funzioni $\mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ (se $M = 0$ non c'è nessuna g , se $K = 0$ non c'è nessuna h). Consideriamo:*

$$V := \{\mathbf{x} \in \Omega : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, M \text{ e } h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, K\}$$

(le g_i danno "vincoli di eguaglianza", le h_j "vincoli di diseguaglianza"). Supponiamo che:

$$\begin{aligned} &\text{se } \mathbf{x}_0 \in V \text{ e se } h_{j_1}(\mathbf{x}_0) = \dots = h_{j_R}(\mathbf{x}_0) = 0 \text{ allora} \\ &\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_M(\mathbf{x}_0), \nabla h_{j_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla h_{j_R}(\mathbf{x}_0) \text{ sono linearmente indipendenti.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nell'ipotesi "di regolarità" (o trasversalità) scritta sopra sono coinvolte tutte le g_i e solo le h_j che si annullano in \mathbf{x}_0 ; notiamo che (3.25) implica $M + R \leq N$.

Consideriamo una $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e supponiamo che \mathbf{x}_0 in V sia un punto di massimo (di minimo) relativo per f su V . Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ e μ_1, \dots, μ_K in \mathbb{R} tali che:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^K \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}_0), \quad \mu_j = 0 \text{ se } h_j(\mathbf{x}_0) < 0. \quad (3.26)$$

Questo equivale a dire che, dette h_{j_1}, \dots, h_{j_R} le h_j tali che $h_j(\mathbf{x}_0) = 0$ (eventualmente nessuna e allora $R = 0$) si ha:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(\mathbf{x}_0) + \mu_1 \nabla h_{j_1}(\mathbf{x}_0) + \dots + \mu_R \nabla h_{j_R}(\mathbf{x}_0).$$

Inoltre:

$$\mu_j \geq 0 \quad \text{nel caso del massimo} \quad \mu_j \leq 0 \quad \text{nel caso del minimo} \quad (3.27)$$

3.6.16 *Osservazione* (Lagrangiana). Introduciamo la *funzione lagrangiana* associata a f e ai vincoli (g_i) , (h_j) , definita da:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^K \mu_j (h_j(\mathbf{x}) + \delta_j^2),$$

che dipende oltre che da $\mathbf{x} \in \Omega$ dalle variabili ausiliarie $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_K)$ e $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_K)$ (dunque L è definita su $\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$).

Allora $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta})$ è critico per L se e solo se $\mathbf{x}_0 \in V$, vale la (3.26) e $\delta_j^2 = -h_j(\mathbf{x}_0)$

Se ne ricava che i massimi/minimi per f su V sono “la componente \mathbf{x} ” dei punti critici (liberi) di L (e si ha l’informazione sul segno dei μ_j (3.27)).

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^K \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}) &= (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_M(\mathbf{x})), \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}) &= (h_1(\mathbf{x}) + \delta_1^2, \dots, h_K(\mathbf{x}) + \delta_K^2), \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\delta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta}) &= (2\mu_1 \delta_1, \dots, 2\mu_K \delta_K). \end{aligned}$$

Supponiamo che $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\delta}_0)$ sia critico per L . Allora:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^M \lambda_{0,i} \nabla g_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^K \mu_{0,j} \nabla h_j(\mathbf{x}_0), \\ 0 &= g_1(\mathbf{x}_0) = \dots = g_M(\mathbf{x}_0), \\ 0 &= h_1(\mathbf{x}_0) + \delta_{1,0}^2 = \dots = h_K(\mathbf{x}_0) + \delta_{0,K}^2, \\ 0 &= 2\mu_{0,1} \delta_{0,1} = \dots = 2\mu_{0,K} \delta_{0,k}. \end{aligned}$$

La prima riga ci dà la parte sinistra della (3.26). La seconda riga implica che \mathbf{x}_0 verifica i vincoli di eguaglianza, la terza che \mathbf{x}_0 verifica i vincoli di disequaglianza; inoltre $h_j(\mathbf{x}_0) = 0$ se e solo se $\delta_j = 0$. Ma allora dalla quarta riga si ottiene $\mu_i = 0$ per tutti quegli indici j per cui $h(\mathbf{x}_0) < 0$; abbiamo in sostanza dimostrato la tesi. \square

3.7 Domini regolari

Introduciamo in questo paragrafo una classe di insiemi aperti “regolari” che saranno utili nel seguito.

3.7.1 Definizione (domini regolari). Sia $D \subset \mathbb{R}^N$ un insieme chiuso. Diremo che D è un *dominio regolare* se esistono un aperto Ω in \mathbb{R}^N , con $D \subset \Omega$ e una funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$D = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) \leq 0\}, \quad \nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \text{ con } g(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.28)$$

Come abbiamo già osservato si ha allora

$$\overset{\circ}{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \partial D = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = 0\} = \partial \overset{\circ}{D}, \quad \overline{\overset{\circ}{D}} = D.$$

In sostanza D è chiusura di un vincolo regolare unilatero su \mathbb{R}^N e la sua frontiera è un vincolo regolare di codimensione 1. Inoltre

$$N_{\partial D}(\mathbf{x}) = \{\lambda \nabla g(\mathbf{x}) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega$$

Per ogni $\mathbf{x} \in \partial D$ possiamo anche definire la *normale unitaria uscente* da Ω :

$$\hat{\nu}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}$$

che è un vettore di norma 1 in $N_{\partial \Omega}(\mathbf{x})$. Si può vedere che $\hat{\nu}$ non dipende dalla scelta di g . Infatti da quanto già visto si ha che se \tilde{g} è un'altra funzione che verifica le (3.28) allora $\nabla \tilde{g} = \lambda \nabla g$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Ma per la prima delle (3.28) deve essere $\lambda > 0$ e quindi i normalizzati dei due gradienti devono coincidere. Rimarchiamo che la possibilità di definire univocamente $\hat{\nu}$ dipende dal fatto che $\{g(\mathbf{x}) = 0\}$ è la frontiera di D e quindi sulla retta normale è possibile individuare un verso entrante e un verso uscente da D .

3.7.2 Esempio. La palla chiusa $D := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ è un dominio regolare. Infatti posto $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ si ha:

$$D = \{(x, y, z) : g(x, y, z) \leq 0\} \quad \text{e} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \text{se} \quad g(x, y, z) = 0.$$

La frontiera di D è $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ che è un vincolo regolare di codimensione uno (in \mathbb{R}^3 dunque S ha dimensione 2).

3.7.3 Osservazione. Non tutti gli aperti sono parti interne di domini regolari. Se per esempio consideriamo $\Omega := \{0 < \|\mathbf{x}\| < 1\}$ (la palla unitaria privata dell'origine) vediamo che Ω è aperto, ma la sua frontiera è costituita dalla sfera $S := \{\|\mathbf{x}\| = 1\}$ unita al singoletto $\{\mathbf{0}\}$. Questo non è un vincolo regolare di codimensione 1 (lo si deduce dal teorema delle funzioni implicite, applicato vicino a $\mathbf{0}$) e quindi non può esistere D regolare con $\overset{\circ}{D} = \Omega$ (perché se esistesse $\partial D = \partial \Omega$).

3.7.4 Definizione (domini regolari a tratti). Sia D un chiuso di \mathbb{R}^N . Diremo che D è un *dominio regolare a tratti* se esistono $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto con $D \subset \Omega$ e $g_1, \dots, g_K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tali che $D = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_K(\mathbf{x}) \leq 0\}$ e vale:

$$\begin{aligned} &\text{se } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ e se } g_{j_1}(\mathbf{x}_0) = \dots = g_{j_R}(\mathbf{x}_0) = 0 \text{ allora} \\ &\nabla g_{j_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_{j_R}(\mathbf{x}_0) \text{ sono linearmente indipendenti.} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Stavolta si ha:

$$\partial D = \underbrace{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g_1(\mathbf{x}) = 0\}}_{=: S_1} \cup \dots \cup \underbrace{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g_K(\mathbf{x}) = 0\}}_{=: S_K},$$

mentre

$$\overset{\circ}{D} = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_1(\mathbf{x}) < 0, \dots, g_K(\mathbf{x}) < 0\}$$

Dunque la frontiera di Ω è fatta dalle K "toppe" S_j , $j = 1, \dots, K$, definite sopra. In ogni S_j si può individuare un "interno":

$$S'_j := \{\mathbf{x} \in \Omega : g_j(\mathbf{x}) = 0, g_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ per } i \neq j\}.$$

Ognuno degli S'_j è un vincolo regolare di codimensione 1 (relativamente all'aperto $\Omega_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g_i(\mathbf{x}) < 0 \forall i \neq j\}$) per cui nei punti $\mathbf{x} \in S_j$ è ben definita il versore normale

uscite mediante $\hat{\nu}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla g_j(\mathbf{x})}{\|\nabla g_j(\mathbf{x})\|}$. Dunque nei punti della frontiera di D che si trovano in $S'_1 \cup \dots \cup S'_K$ la normale è ben definita. I rimanenti punti della frontiera sono quelli in cui più di una g_j si annulla e in questi punti non è in generale possibile definire la normale.

Se siamo in \mathbb{R}^3 potremmo classificare questi punti come “spigoli” se due condizioni di vincolo si annullano o “vertici” se se ne annullano tre (più di tre non è possibile a causa della (3.29)).

Si potrebbe dimostrare in generale che questi punti sono “pochi” (in un senso opportuno) tra i punti di frontiera, e che quindi, se Ω è regolare a tratti, “in quasi tutti i suoi punti di frontiera” esiste la normale uscente.

3.7.5 Esempio. L'aperto $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0\}$ è un vincolo regolare a tratti (“l'emisfero nord”). Ω risulta infatti definito mediante le due funzioni

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = -z.$$

Si vede facilmente che i gradienti

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono non nulli dove le rispettive g si annullano e sono linearmente indipendenti dove entrambe le g fanno zero (cioè in $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$). Dunque la condizione (3.29) sono verificate. Notiamo che la frontiera di Ω si può dividere in tre pezzi:

$$S'_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}, S'_2 := \{z = 0, x^2 + y^2 < 1\}, S^0 := \{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}.$$

I primi due sono la “parte regolare” della frontiera su cui è definita la normale:

$$\hat{\nu}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ su } S'_1, \quad \hat{\nu}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ su } S'_2$$

mentre in S_0 (“l'equatore”) Ω ha uno spigolo.

Vediamo in altro esempio ponendo:

$$\Omega_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}.$$

In questo caso abbiamo tre “funzioni di vincolo”:

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = -x, \quad g_3(x, y, z) := -z$$

i cui gradienti sono:

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Con un po' di pazienza si vede che l'ipotesi (3.29) è verificata. In questo caso la frontiera di Ω_1 ha tre “pezzi regolari”

$$S'_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, z > 0\}, \\ S'_2 := \{x = 0, x^2 + y^2 < 1, z > 0\}, \quad S'_3 := \{z = 0, x^2 + y^2 < 1, x > 0\},$$

su cui è definita la normale uscente (normalizzando i gradienti scritti sopra) e una “parte singolare” S^0 , che a sua volta si potrebbe suddividere in

$$S_1^0 := \{z = 0, x^2 + y^2 = 1, x > 0\} \cup \{x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0\} \cup \{x = 0, z = 0, y^2 < 1\}$$

(che è costituita da tre “spigoli”) più l’insieme (dei due “vertici”)

$$S_2^0 := \{x = 0, z = 0, y^2 = 1\} = \{(0, 1, 0), (0, -1, 0)\}.$$

Un altro esempio è il cubo aperto:

$$Q := \{(x, y, z) : |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$$

che come ci si può aspettare ha sei facce regolari su cui è definita la normale, dodici spigoli e otto vertici.

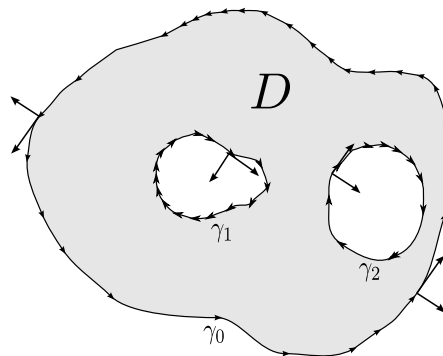
Il seguente risultato che riguarda il caso $N = 2$ ci sarà utile più avanti quando introdurremo le superfici.

3.7.6 Proposizione. *Supponiamo che D sia un dominio regolare (regolare a tratti) di \mathbb{R}^2 . Supponiamo anche che D limitato. Allora esiste un numero finito di curve $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$ tali che:*

- ogni γ_i è chiusa e regolare (regolare a tratti);
- i sostegni $\gamma_i([a_i, b_i])$ delle γ_i sono disgiunti tra loro e ogni γ_i è iniettiva in $[a_i, b_i[$;
- ∂D è l’unione dei sostegni delle γ_i : $\partial D = \gamma([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \gamma([a_k, b_k])$;
- se $P_0 \in \partial D$ e se $P_0 = \gamma_0(t_0)$ con $t_0 \in [a_i, b_i]$ (γ_i regolare in t_0), allora il vettore $\hat{\nu}(P_0)$ normale uscente a D in P_0 e il vettore tangente $\gamma'(t_0)$ si possono trasportare con un movimento rigido nei vettori \hat{e}_1, \hat{e}_2 : intuitivamente ogni curva γ_i “percorre ∂D tenendo D alla sinistra”.

Esprimeremo quanto scritto sopra dicendo che la frontiera di D si descrive coerentemente con la normale uscente a Ω mediante le curve $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Non dimostriamo la proposizione. È chiaro comunque dal teorema del Dini, che per ogni punto (regolare) P_0 di ∂D esiste un intorno U di P_0 tale che $\partial D \cap U$ è descritto da una curva (il cui verso si può scegliere in maniera da rispettare l’ultima condizione). Il resto della dimostrazione consisterà nel passare dal locale al globale (qui conta che D sia limitato).



Capitolo 4

Calcolo integrale

4.1 Misura degli insiemi e integrazione

Vogliamo introdurre la nozione di integrale per funzioni di più variabili. Questa nozione è legata al problema più generale di definire una “misura” (area, volume ecc.) per i sottoinsiemi di \mathbb{R}^N .

Le idee guida per costruire la misura sono abbastanza intuitive; per esempio in \mathbb{R}^2 : 1) si definisce l’area dei rettangoli come prodotto base per altezza, 2) si definisce l’area di un “plurirettangolo” P , cioè l’unione di rettangoli disgiunti, come la somma delle aree di tutti i rettangoli che compongono P , 3) si “approssima” un insieme generico E mediante dei plurirettangoli P_n e si definisce l’area di E facendo il “limite” delle misure dei P_n . In realtà mentre il passo 1) è chiaro lo stesso non si può dire per 2) e 3). In effetti sia la nozione di approssimazione sia la definizione di plurirettangoli sono suscettibili di variazioni che portano a risultati diversi.

Fermo restando che per gli insiemi concreti con cui si ha a che fare abitualmente tutte le varie definizioni portano allo stesso risultato, è comunque importante avere delle nozioni di misura che si “comportino bene rispetto alla nozione di limite” (questa esigenza si sente anche in alcuni argomenti, quali le serie di funzioni, di cui tratteremo più avanti). Ciò rende preferibile la costruzione della misura (e dell’integrale) mediante la teoria di Lebesgue rispetto alla più semplice costruzione di Riemann già vista in Analisi 1. In maniera analoga, quando si studia l’Analisi si usano i numeri reali invece dei razionali (che sono più che sufficienti per tutti gli usi pratici) per avere una teoria dei limiti più soddisfacente. Peraltro in queste note le proprietà della misura verranno enunciate senza darne quasi mai la dimostrazione, di solito piuttosto laboriose.

Ricordiamo che la parte positiva x^+ e la parte negativa x^- di un numero x sono :

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad x^- := (-x)^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

di modo che $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ e $|\mathbf{x}| = \mathbf{x}^+ + \mathbf{x}^-$. Nel seguito data una funzione f chiamiamo *supporto* di f , indicato con $\text{spt}(f)$, la chiusura dell’insieme $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$; in particolare una funzione è a supporto limitato se esiste un disco $B(\mathbf{x}_0, R)$ tale che $f(\mathbf{x}) = 0$ per \mathbf{x} fuori da $B(\mathbf{x}_0, R)$.

Data ancora una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subset \mathbb{R}^N$, con $f \geq 0$, chiamiamo *sottografico* di f l’insieme

$$G^-(f) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in A, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\}.$$

4.1.1 Definizione (limitata alla teoria dell’integrazione). Conveniamo che $\infty \cdot 0 = 0$. Questa convenzione sarà sottintesa nel seguito di questo capitolo quando si incontrerà il

prodotto di due numeri reali estesi. Non daremo invece significato alla differenza di due infiniti con lo stesso segno.

4.1.2 Definizione. Ricordiamo che un intervallo di \mathbb{R} è un insieme I delle forma:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : a \leq \mathbf{x} \leq b\}, \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : a \leq \mathbf{x} < b\}, \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : a < \mathbf{x} \leq b\}, \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : a < \mathbf{x} < b\}$$

con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Per ognuno degli intervalli scritti sopra la *lunghezza* del corrispondente intervallo è

$$\ell(I) = b - a \in [0, +\infty]$$

(ammettiamo anche lunghezze infinite). Dato $N \in \mathbb{N}$ chiamiamo *rettangolo* di \mathbb{R}^N un insieme R del tipo:

$$R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \quad \text{dove } I_1, \dots, I_N \text{ sono intervalli.}$$

Dato un rettangolo come sopra definiamo la *misura* di R come:

$$|R| := \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdots \ell(I_N) \in [0, +\infty].$$

Quindi se $N = 2$ la misura è l'area (base \times altezza), se $N = 3$ la misura è il volume. Notiamo che in virtù della convenzione $0 \cdot \infty = 0$ l'area di una retta orizzontale in \mathbb{R}^2 è eguale a zero: tale retta è infatti un rettangolo del tipo $\mathbb{R} \times \{a\}$ e la sua area è definita come $|\mathbb{R}| \cdot |\{a\}| = (+\infty - (-\infty)) \cdot (a - a) = +\infty \cdot 0 = 0$.

Vediamo per prima cosa la definizione di misura secondo Peano (Riemann). Notiamo che nel caso $N = 1$ la definizione seguente restituisce l'integrale studiato in Analisi 1.

4.1.3 Definizione. Chiamiamo *plurirettangolo finito* una unione finita di rettangoli disgiunti, cioè un insieme P di \mathbb{R}^N esprimibile come:

$$P = \bigcup_{j=1}^k R_j \quad R_j \text{ rettangoli, } R_j \cap R_h = \emptyset \text{ se } j \neq h.$$

Chiamiamo misura di P la somma delle misure di tutti i rettangoli che compongono P :

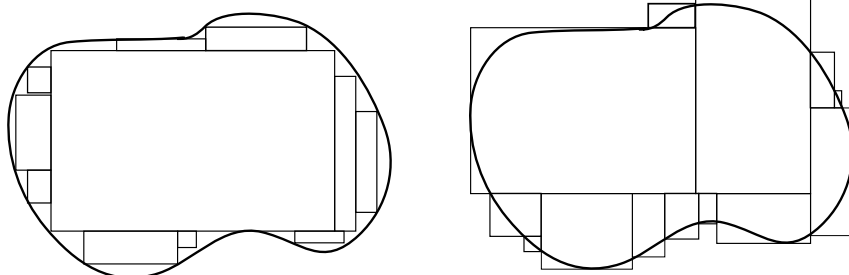
$$|P| = \sum_{j=1}^k |R_j|.$$

Si può dimostrare che $|P|$ è indipendente dal modo (che non è chiaramente unico) in cui P è scomposto in rettangoli disgiunti.

4.1.4 Definizione (misura e integrale di Riemann). Sia A un insieme **limitato** di \mathbb{R}^N . Poniamo:

$$m_R^*(A) := \inf \{|P| : P \text{ plurirettangolo finito } A \subset P\}$$

$$m_{R^*}(A) := \sup \{|P| : P \text{ plurirettangolo finito } P \subset A\}$$



$m_R^*(A)$ e $m_{R^*}(A)$ si dicono rispettivamente la misura esterna secondo Riemann (o secondo Peano) e la misura interna secondo Riemann dell'insieme A . Si dice che A è *misurabile secondo Riemann* se $m_R^*(A) = m_{R^*}(A)$, cioè se approssimando A con plurirettangoli inscritti o con plurirettangoli circoscritti si giunge al medesimo risultato. Se A è misurabile indichiamo con $m_R(A)$ il valore comune delle due misure (interna ed esterna).

Sia ora $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **limitata e a supporto limitato**. Diciamo che f è misurabile secondo Riemann se i sottografici $G^-(f^+)$ e $G^-(f^-)$ sono insiemi misurabili secondo Riemann. In questo caso chiamiamo *integrale di Riemann* di f il numero

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := m_R(G^-(f^+)) - m_R(G^-(f^-))$$

Infine se A è un insieme limitato e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata possiamo dire che f è integrabile su A se la funzione \tilde{f} che è eguale a f su A e vale zero fuori di A è misurabile e in questo caso si definisce l'integrale di f su A come

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Si potrebbero dimostrare una serie di proprietà per gli integrali di Riemann; per esempio che se A e B sono due insiemi misurabili disgiunti, allora la loro unione è misurabile e $m_R(A \cup B) = m_R(A) + m_R(B)$ (questo non è vero se A e B non sono misurabili). Oppure si potrebbe vedere che se f e g sono integrabili, allora la loro somma è integrabile e $\int_{\mathbb{R}^N} (f + g) = \int_{\mathbb{R}^N} f + \int_{\mathbb{R}^N} g$. Queste proprietà (e le varie altre che si possono dimostrare) fanno sì che la misura e l'integrale di Riemann siano un'ottimo modello matematico per l'idea di area o volume in questioni di geometria elementare. Un piccolo difetto è il fatto che si misurano solo insiemi limitati e si integrano funzioni limitate a supporto limitato. A questo però si potrebbe tentare di rimediare considerando gli integrali impropri (anche se in \mathbb{R}^N le cose non sono così chiare). Il grosso problema però è la *stabilità* degli insiemi misurabili e delle funzioni integrabili rispetto ad operazioni di limite. Non è per esempio vero (e invece servirebbe) che l'unione di una successione di insiemi misurabili è misurabile. Per questo siamo condotti a un'altra definizione.

4.1.5 Definizione. Chiamiamo *plurirettangolo numerabile* l'unione di una successione di rettangoli cioè un insieme P di \mathbb{R}^N esprimibile come:

$$P = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad R_j \text{ rettangoli.}$$

4.1.6 Proposizione. Se P è un plurirettangolo numerabile, allora esiste una famiglia $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di rettangoli disgiunti la cui unione è P , cioè

$$P = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad R_j \text{ rettangoli, } R_j \cap R_h = \emptyset \text{ se } j \neq h.$$

Inoltre se $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ed $(R'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sono due famiglie numerabili di rettangoli con la proprietà detta sopra, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |R'_n|.$$

Notiamo che non si ipotizza che P sia limitato per cui le serie sopra possono avere somma infinita ($+\infty$ dato che gli addendi sono positivi).

4.1.7 Definizione. Sia P un plurirettangolo. Chiamiamo misura di P la serie (eventualmente infinita):

$$|P| = \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|.$$

dove R_i sono rettangoli ($i \in \mathbb{N}$) e $R_j \cap R_h = \emptyset$ se $j \neq h$. Per quanto detto sopra $|P|$ è indipendente dal modo in cui P è scomposto in rettangoli disgiunti.

D'ora in poi sottintendiamo che i plurirettangoli siano numerabili.

È facile vedere dalla definizione che unione intersezione e differenza tra plurirettangoli è ancora un plurirettangolo (questo non si può dire dei rettangoli). La seguente proposizione (no dim) è alla base delle successive proprietà della misura.

4.1.8 Proposizione. *Siano P_1 e P_2 due plurirettangoli, allora:*

$$|P_1 \cup P_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_1| + |P_2|$$

(se sono disgiunti $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2|$). Se inoltre $P_1 \subset P_2$ se ne ricava:

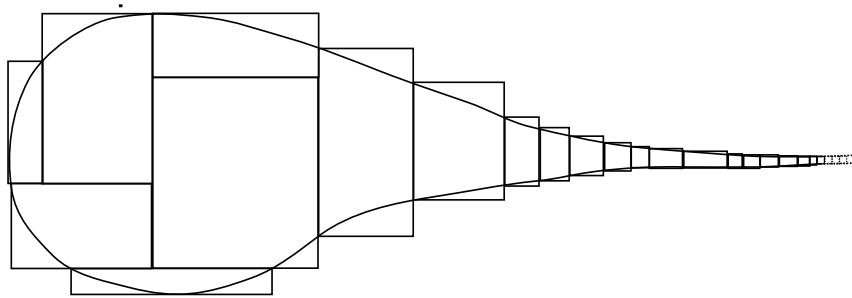
$$|P_2 \setminus P_1| = |P_2| - |P_1|$$

In particolare $P_1 \subset P_2 \Rightarrow |P_1| \leq |P_2|$.

4.1.9 Definizione (misura e integrale secondo Lebesgue). Sia $A \subset \mathbb{R}^N$. Poniamo:

$$m^*(A) := \inf \{ |P| : P \text{ plurirettangolo numerabile } A \subset P \}.$$

$m^*(A)$, che può essere finita o $+\infty$, è detta la misura esterna secondo Lebesgue di A .



4.1.10 Osservazione. Si ha in effetti:

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| : R_i \text{ sono rettangoli e } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}.$$

Questo si vede notando che se R_i sono rettangoli e $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, allora $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ è un plurirettangolo e $|P| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|$. D'altra parte possiamo prendere degli altri rettangoli

R'_i la cui unione è P che siano anche tra loro disgiunti. In questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} |R'_n| = |P|$. È chiaro allora che ai fini dell'estremo inferiore basta considerare le famiglie numerabili di rettangoli disgiunti, e in tal caso la serie che si considera coincide con $|P|$.

4.1.11 Corollario. *Se P è un plurirettangolo, allora $m^*(P) = |P|$.*

4.1.12 Proposizione. *La misura esterna è monotona cioè:*

$$A \subset B \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B).$$

Inoltre, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ A_n è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N , vale la subadditività numerabile:

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

Si potrebbe vedere che in generale non è detto che dati due insiemi disgiunti la misura esterna della loro unione sia la somma delle misure. Omettiamo di fornire un esempio che sarebbe molto complicato da costruire. Dato che la proprietà sopra (additività della misura tra insiemi disgiunti) è praticamente irrinunciabile, si rende necessario individuare gli insiemi “buoni” per cui questa proprietà vale.

4.1.13 Definizione. Diremo che A è *misurabile secondo Lebesgue* se

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(E \setminus A) \quad \text{per ogni sottoinsieme } E \text{ di } \mathbb{R}^N$$

Questa condizione dice che A *spezza bene* ogni altro sottoinsieme E - non è una proprietà intuitiva come quella usata per fare la misura di Riemann e per la verità non ne parleremo molto. L' importante è che questa proprietà individua una classe di insiemi abbastanza ricca che verificano delle buone proprietà.

Indicheremo con \mathcal{M} (o \mathcal{M}_N se si vuole esplitare la dimensione dello spazio) la classe degli insiemi misurabili. Se $A \in \mathcal{M}$, cioè se A è misurabile, scriviamo $m(A)$ invece di $m^*(A)$ e chiamiamo $m(A)$ la *misura* (secondo Lebesgue) di A .

Per fare capire l'utilità della misurabilità dimostriamo un paio di sue conseguenze.

4.1.14 Proposizione. *Se P è un plurirettangolo, allora P è misurabile.*

Dimostrazione. Sia P un plurirettangolo. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ e sia P' un plurirettangolo tale che $E \subset P'$. Per quanto detto sui plurirettangoli si ha che $P' \cap P$ e $P' \setminus P$ sono plurirettangoli e $|P'| = |P' \cap P| + |P' \setminus P|$. Dato che $E \cap P \subset P' \cap P$ e $E \setminus P \subset P' \setminus P$ si ha $m^*(E \cap P) \leq |P' \cap P|$, $m^*(E \setminus P) \leq |P' \setminus P|$. Dunque:

$$|P'| \geq m^*(E \cap P) + m^*(E \setminus P) \quad \forall P' \text{ con } P' \text{ plurirettangolo e } E \subset P'.$$

Per definizione di $m^*(E)$ e per le proprietà dell'inf si ricava:

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap P) + m^*(E \setminus P)$$

Essendo $E = (E \cap P) \cup (E \setminus P)$, usando la subadditività troviamo anche:

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap P) + m^*(E \setminus P)$$

Dunque vale l'eguale. Dato che E è arbitrario abbiamo dimostrato che P è misurabile. \square

4.1.15 Osservazione. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, allora

$$m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_2) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^N. \quad (4.1)$$

Per vederlo basta usare la definizione di misurabilità per A_1 (o di A_2).

4.1.16 Proposizione. *Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ (due insiemi misurabili in \mathbb{R}^N). Allora si ha che $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ e $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}$. Inoltre:*

$$m(A_1 \cup A_2) + m(A_1 \cap A_2) = m(A_1) + m(A_2). \quad (4.2)$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $A := A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. Per questo prendiamo $E \subset \mathbb{R}^N$. Usando la misurabilità di A_1 :

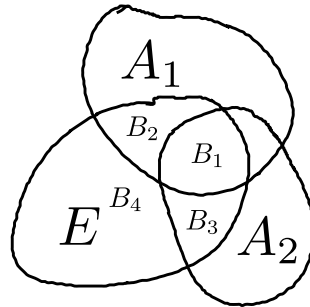
$$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \setminus A_1).$$

Usando la misurabilità di A_2 :

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A_1) &= m^*(\underbrace{E \cap A_1 \cap A_2}_{=:B_1}) + m^*(\underbrace{(E \cap A_1) \setminus A_2}_{=:B_2}), \\ m^*(E \setminus A_1) &= m^*(\underbrace{(E \setminus A_1) \cap A_2}_{=:B_3}) + m^*(\underbrace{(E \setminus A_1) \setminus A_2}_{=:B_4}). \end{aligned}$$

Per motivi insiemistici (vedi la figura) i quattro insiemi B_1, B_2, B_3 e B_4 sono disgiunti e

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = E \cap (A_1 \cup A_2), \quad B_4 = E \setminus (A_1 \cup A_2).$$



Usando di nuovo la misurabilità di A_2 si ha (vedi sempre la figura):

$$m^*(B_1 \cup B_2) = m^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + m^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) = m^*(B_1) + m^*(B_2).$$

da cui, usando di nuovo la misurabilità di A_1 :

$$\begin{aligned} m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) &= m^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \\ &= m^*((B_1 \cup B_2 \cup B_3) \cap A_1) + m^*((B_1 \cup B_2 \cup B_3) \setminus A_1) = \\ &= m^*(B_1 \cup B_2) + m^*(B_3) = m^*(B_1) + m^*(B_2) + m^*(B_3). \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme:

$$m^*(E) = m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + m^*(E \setminus (A_1 \cup A_2))$$

dunque $A_1 \cup A_2$ è misurabile. Vediamo ora che se $A \in \mathcal{M}$ allora il complementare $\mathcal{C}A$ è anche lui in \mathcal{M} . Questo è evidente perché, per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) = m^*(E \setminus \mathcal{C}A) + m^*(E \cap \mathcal{C}A).$$

Se ne deduce che intersezione e differenza di misurabili è misurabile, dato che:

$$A_1 \cap A_2 = \mathcal{C}(\mathcal{C}A_1 \cup \mathcal{C}A_2), \quad A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap \mathcal{C}A_1.$$

Consideriamo ora $E = A_2$ e usiamo la misurabilità di A_1 . Si ha:

$$m(A_2) = m(A_2 \cap A_1) + m(A_2 \setminus A_1).$$

Prendiamo $E = A_1 \cap A_2$ e usiamo la misurabilità di A_1 :

$$m(A_1 \cap A_2) = m((A_1 \cap A_2) \cap A_1) + m((A_1 \cap A_2) \setminus A_1) = m(A_1 \cap A_2) + m(A_2 \setminus A_1).$$

Sommando $m(A_1 \cap A_2)$ all'ultima eguaglianza e usando la penultima si ricava la (4.2). \square

4.1.17 Proposizione (additività numerabile). *Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili e poniamo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Allora A è misurabile. Se inoltre $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che (A_n) sia una successione di insiemi misurabili e poniamo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Supponiamo anche che gli A_n siano tra loro disgiunti – questo non sarebbe richiesto per la misurabilità di A , ma non è difficile ricondursi a questo caso modificando opportunamente gli A_n . Se $k \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$A^k := A_1 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{n=1}^k A_n.$$

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$. Usando (k volte) la (4.1) abbiamo $A_k \in \mathcal{M}$ e:

$$m^*(E \cap A^k) = m^*(E \cap A_1) + \dots + m^*(E \cap A_k) = \sum_{n=1}^k m^*(E \cap A_n).$$

Usando la monotonia della misura e la misurabilità degli A_n :

$$m^*(E) = m^*(E \cap A_k) + m^*(E \setminus A_k) \geq m^*(E \cap A_k) + m^*(E \setminus A) = \sum_{n=1}^k m^*(E \cap A_n) + m^*(E \setminus A).$$

Dato che questo è vero per ogni k è vero per il limite, quando $k \rightarrow +\infty$, dunque:

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + m^*(E \setminus A) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

dove, nel secondo passaggio, abbiamo usato la subadditività. Come già notato l'altra disuguaglianza è sempre vera per cui:

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^N$$

da cui la misurabilità di A . Per la formula notiamo che

$$m(A) \geq m(A_k) = \sum_{n=1}^k m(A_n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

e usando la subadditività si ottiene l'eguaglianza. \square

4.1.18 Proposizione (confronto con la misura di Riemann). *Se A è limitato ed è misurabile secondo Riemann, allora A è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$. Sia $\varepsilon > 0$ e siano P', P'' due plurirettangoli finiti tali che $P' \subset A \subset P''$ e $|P'' \setminus P'| < \varepsilon$. Per la misurabilità di P' :

$$m^*(E) = m^*(E \cap P') + m^*(E \setminus P') \geq m^*(E \cap P') + m^*(E \setminus A).$$

Dato che P'' e $P'' \setminus P'$ sono misurabili e disgiunti abbiamo (vedi la (4.1))

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A) &\leq m^*(E \cap P'') = m^*(E \cap (P'' \setminus P')) + m^*(E \cap P') \leq \\ & m^*(P'' \setminus P') + m^*(E \cap P') = |P'' \setminus P'| + m^*(E \cap P') < \varepsilon + m^*(E \cap P'). \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$m^*(E) > m^*(E \cap A) - \varepsilon + m^*(E \setminus A) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$ si può mettere 0 al posto di ε . Per l'arbitrarietà di E :

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^N.$$

Al solito la disuguaglianza opposta vale per la subadditività e quindi abbiamo dimostrato la misurabilità di A . \square

4.1.19 Definizione. Sia ora $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione (positiva a valori reali estesi). Diciamo che f è *misurabile* secondo Lebesgue se $G^-(f) (= \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\})$ è un insieme misurabile in \mathbb{R}^{N+1} . Se questo è vero chiamiamo *integrale* di f il numero:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := m(G^-(f))$$

Tale integrale può essere $+\infty$. Se invece si considera una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, \infty]$ diremo che essa è misurabile se le due funzioni parte positiva f^+ e parte negativa f^- sono entrambe misurabili. Diremo che f è *integrabile* se f è misurabile e se $\int_{\mathbb{R}^N} f^+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f^-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$; in tal caso chiameremo integrale di f l'espressione:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^N} f^+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Notiamo dunque che le funzioni misurabili positive hanno sempre integrale (eventualmente infinito) mentre le funzioni a segno variabile hanno integrale solo quando questo è finito.

4.1.20 Definizione. Se infine A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione possiamo dire che f è misurabile (integrabile) su A se posto:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A, \end{cases}$$

si ha che \tilde{f} è misurabile (integrabile). Si definisce allora l'integrale di f su A come

$$\int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

4.1.21 Osservazione. Nel caso in cui $f(\mathbf{x}) = 1$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ la costruzione di \tilde{f} porta alla "funzione caratteristica di A ", indicata con $\mathbb{1}_A$, cioè a $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^N \rightarrow \{0, 1\}$ definita da:

$$\mathbb{1}_A(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

È chiaro che $\mathbb{1}_A \geq 0$, A è misurabile se e solo se $\mathbb{1}_A$ è misurabile e $m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ (che può essere finita o infinita).

Vediamo ora le proprietà principali (alcune già viste) degli insiemi e delle funzioni misurabili.

4.1.22 Proposizione (proprietà degli insiemi misurabili).

1. Se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{M}$, allora $A \setminus B \in \mathcal{M}$. Inoltre, se $m(A \cap B) < +\infty$, allora $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$.
Se ne deduce in particolare che, se $B \subset A$, allora $m(B) \leq m(A)$.
2. I plurirettangoli sono misurabili e la loro misura coincide con quella di partenza: $m(R) = |R|$. In particolare $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$, $m(\mathbb{R}^N) = +\infty$, $\emptyset \in \mathcal{M}$, $m(\emptyset) = 0$.
3. Gli insiemi aperti e (di conseguenza) gli insiemi chiusi sono misurabili.
4. Se D è un dominio regolare D , $\overset{\circ}{D}$ e ∂D sono misurabili (segue dalla precedente).
Inoltre $m(\partial D) = 0$.
5. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^N , allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} \quad , \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

Inoltre si ha (varie forme di "additività numerabile"):

(a) Se gli A_n sono a due a due disgiunti: $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n).$$

(b) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente: $A_n \subset A_{n+1}$, allora

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

(c) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente: $A_{n+1} \subset A_n$, e se $m(A_1) < +\infty$ allora

$$m\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

4.1.23 *Osservazione.* Useremo anche la notazione $|E|$ per indicare $m(E)$. È chiaro che non c'è ambiguità dato che nel caso dei rettangoli le due notazioni coincidono.

4.1.24 **Definizione.** Diremo che un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N è trascurabile se $m^*(E) = 0$.

4.1.25 **Proposizione.** 1. Se E è trascurabile, allora E è misurabile e $m(E) = 0$.

2. Se E è trascurabile ed $E_1 \subset E$, allora E_1 è trascurabile.

3. Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi trascurabili, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ è trascurabile.

Ogni insieme fatto da un numero finito di punti è ovviamente trascurabile. Anche \mathbb{N} e \mathbb{Z} sono trascurabili in quanto $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}$ e $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n, -n\}$. Ma anche l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è trascurabile. È infatti noto che \mathbb{Q} è "numerabile", cioè che esiste una successione (q_n) , per cui $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{q_n\}$.

4.1.26 *Osservazione.* Ricordiamo che l'insieme $E := \{q \in [0, 1] : q \in \mathbb{Q}\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ non è misurabile secondo Peano (che è equivalente a dire che la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) := 1$, se $\mathbf{x} \in E$ e $f(\mathbf{x}) := 0$ se $\mathbf{x} \in [0, 1] \setminus E$, non è integrabile secondo Riemann). Invece E è misurabile secondo Lebesgue e $|E| = 0$ dato che $E \subset \mathbb{Q}$.

4.1.27 Definizione. Nel seguito diremo che una proprietà $P(\mathbf{x})$ è vera quasi ovunque in \mathbb{R}^N o per quasi ogni \mathbf{x} di \mathbb{R}^N , se l'insieme delle \mathbf{x} di \mathbb{R}^N per cui $P(\mathbf{x})$ è falsa è trascurabile. Per esempio diremo che una funzione f è quasi ovunque nulla o equivalentemente che $f(\mathbf{x}) = 0$ per quasi ogni \mathbf{x} , intendendo con questo che l'insieme $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$ ha misura zero. Analogamente diremo che due funzioni f e g sono eguali quasi ovunque se la loro differenza è quasi ovunque nulla.

4.1.28 Proposizione (proprietà delle funzioni misurabili). *Siano $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, \infty]$.*

1. *Supponiamo che sia $f = g$ quasi ovunque (cioè $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ è trascurabile). Allora:*
 - *f è misurabile se e solo se g è misurabile. Se ciò è vero e se $f \geq 0, g \geq 0$, allora f e g hanno lo stesso integrale.*
 - *f è integrabile se e solo se g è integrabile. Se ciò è vero f e g hanno lo stesso integrale.*
2. *Supponiamo che f sia integrabile. Allora $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |f(\mathbf{x})| = +\infty\}$ è trascurabile.*
3. *Se f è misurabile allora $|f|$ è misurabile (il viceversa non è vero).
Se f è misurabile allora f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.*
4. *Se f e g sono misurabili e se gli insiemi $E_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = +\infty, g(\mathbf{x}) = -\infty\}$ e $E_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : f(\mathbf{x}) = -\infty, g(\mathbf{x}) = +\infty\}$ sono trascurabili allora la funzione $h : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty + \infty]$ definita da*

$$h(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \notin E_1 \cup E_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

è misurabile. In sostanza $f + g$ è misurabile pur di definirla zero nell'insieme (ipotizzato trascurabile) dei punti in cui compare la differenza di due infiniti. In realtà potremmo definire h a piacere (invece che 0) in questi punti a causa della 1 sopra.

5. *Se f e g sono misurabili allora fg è misurabile. Per dare senso a fg conveniamo da ora in poi (**all'interno della teoria dell'integrazione**) che se $f(\mathbf{x}) = 0$ e $g(\mathbf{x}) = \pm\infty$ o viceversa, allora il prodotto $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ fa zero.*
6. *Se f e g sono integrabili allora $f + g$ è integrabile. Notiamo che $f + g$ ha senso quasi ovunque a causa della 2. Inoltre vale la formula:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

sia nel caso di f, g integrabili, che in quello di $f, g \geq 0$ misurabili.

7. *Se f è integrabile e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora λf è integrabile. Inoltre se f è misurabile e $\lambda, f \geq 0$ oppure se f è integrabile si ha:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(dove nel primo caso gli integrali possono essere $+\infty$).

8. Se f e g sono misurabili e $0 \leq f \leq g$ quasi ovunque, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Se f e g sono integrabili si può rimuovere l'ipotesi di positività.

9. Se f è misurabile, g è integrabile e $|f| \leq g$ quasi ovunque, allora f è integrabile e

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

10. Se f è integrabile e $f \geq 0$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) = 0 \text{ per quasi ogni } \mathbf{x} \quad (f = 0 \text{ quasi ovunque}).$$

11. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto, se $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è integrabile in Ω e se

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{per ogni funzione } \phi \in C^\infty(\Omega)$$

allora $f(\mathbf{x}) = 0$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in \Omega$.

12. Se f è misurabile (integrabile) su \mathbb{R}^N e se $A \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, allora f è misurabile (integrabile) su A .

Se A è trascurabile ed f è misurabile, allora f è integrabile su A e $\int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$.

13. f è misurabile se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^c := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ è misurabile. Passando a $-f$ si ottiene anche che f è misurabile se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^c := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq c\}$ è misurabile.

In particolare, se f è misurabile, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^c := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = c\}$ è misurabile.

14. Se (f_n) è una successione di funzioni misurabili e se $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ per quasi ogni \mathbf{x} (f_n "converge puntualmente" a f), allora f è misurabile.

15. Se f è misurabile e $f \geq 0$ e se (A_n) è una successione di insiemi misurabili tali che $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n ((A_n) è una successione crescente di insiemi misurabili), allora posto $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, si ha (che A è misurabile e):

$$\int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

4.1.29 Proposizione (confronto con Riemann). Valgono i fatti seguenti.

- Se A è un insieme limitato misurabile secondo Riemann, allora A è misurabile e $m_{\mathbb{R}}(A) = m(A)$.
- Se f è una funzione limitata con supporto compatto integrabile secondo Riemann, allora è integrabile e le due definizioni di integrale coincidono.
- Se f è assolutamente integrabile in senso improprio secondo Riemann (su un intervallo di \mathbb{R}) allora è integrabile e l'integrale improprio coincide con l'integrale.

In particolare le funzioni continue o continue a tratti sono certamente misurabili e sono integrabili sugli intervalli chiusi e limitati.

Invece le funzioni integrabili in senso improprio secondo Riemann che non siano assolutamente integrabili non sono integrabili secondo Lebesgue (perché parte positiva e parte negativa hanno entrambe integrale infinito). Per esempio $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ non è integrabile secondo Lebesgue su \mathbb{R} .

4.1.30 Definizione. Supponiamo che $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ e indichiamo con f_i le componenti di \mathbf{f} , per $i = 1 \dots, M$: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))$. Diciamo che \mathbf{f} è misurabile se tutte le f_i sono misurabili. Diciamo che \mathbf{f} è integrabile se tutte le f_i sono integrabili e in tal caso consideriamo l'integrale di \mathbf{f} su \mathbb{R}^N :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \dots, \int_{\mathbb{R}^N} f_M(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right)$$

(dunque l'integrale di \mathbf{f} è un elemento di \mathbb{R}^M). Analogamente si definisce l'integrale di \mathbf{f} su un insieme imitando quanto fatto nel caso scalare $M = 1$.

4.1.31 Proposizione. Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è integrabile su $A \subset \mathbb{R}^N$, allora $\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^M}$ è integrabile su A e vale:

$$\left\| \int_A \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\|_{\mathbb{R}^M} \leq \int_A \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M} \, d\mathbf{x}.$$

4.1.32 Osservazione. In particolare possiamo definire la misurabilità e l'integrale per funzioni a valori complessi identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 : se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ possiamo scrivere $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + if_2(\mathbf{x})$ con $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è misurabile (integrabile) se f_1, f_2 sono misurabili (integrabili) e, quando f è integrabile, definiamo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{\mathbb{R}^N} f_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + i \int_{\mathbb{R}^N} f_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

4.2 Integrali iterati

I seguenti teoremi stabiliscono che gli integrali in \mathbb{R}^N sono degli “integrali multipli”. È importante il fatto che il primo teorema (che riguarda funzioni positive) vale anche se gli integrali sono infiniti e può essere allora usato come criterio di integrabilità.

In questo paragrafo ci mettiamo in \mathbb{R}^{N+M} e conveniamo di scrivere i punti di \mathbb{R}^{N+M} come copie (\mathbf{x}, \mathbf{y}) con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ (cioè identifichiamo \mathbb{R}^{N+M} con $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$). Analogamente se $f : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow [-\infty, +\infty]$, scriveremo $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$.

4.2.1 Teorema (di Tonelli). *Supponiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow [0, +\infty]$ sia misurabile. Allora:*

- per quasi ogni \mathbf{y} in \mathbb{R}^M , la funzione $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è misurabile su \mathbb{R}^N ;
- se poniamo $F(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}$ (definendo $F(\mathbf{y})$ a piacere nelle \mathbf{y} per cui $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ non è misurabile), allora F è misurabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y}.$$

Notiamo che, in particolare, scambiando x e y , si vede che gli integrali fatti nell'ordine inverso portano allo stesso risultato.

4.2.2 Osservazione (principio di Cavalieri). Sia A un insieme misurabile di \mathbb{R}^{N+M} e per ogni \mathbf{y}_0 in \mathbb{R}^M indichiamo con $A_{\mathbf{y}_0}$ l'insieme $A \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = \mathbf{y}_0\}$ cioè la sezione di A fatta tramite l'iperpiano di equazione $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$. Allora (come si vede facilmente applicando il teorema di Tonelli alla funzione $\mathbb{1}_A$):

- per quasi ogni \mathbf{y} in \mathbb{R}^M si ha che $A_{\mathbf{y}}$ è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^N ;
- la funzione $\mathbf{y} \mapsto m(A_{\mathbf{y}})$, definita a piacere dove non ha senso, è misurabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha:

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^M} m(A_{\mathbf{y}}) \, d\mathbf{y}.$$

4.2.3 Osservazione. Si deduce dal teorema di Tonelli che tratti rettilinei sono trascurabili nel piano: per esempio l'asse \mathbf{x} è trascurabile in quanto la misura della sua sezione con una qualunque parallela all'asse \mathbf{y} è trascurabile (essendo fatta da un singolo punto).

4.2.4 Osservazione. Il teorema di Tonelli può essere usato come criterio di integrabilità: per verificare se una f è integrabile su \mathbb{R}^{N+M} basta controllare se

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y} < +\infty$$

dato che f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.

Nel prossimo teorema, a differenza di quanto fatto nel precedente, si suppone che f sia integrabile.

4.2.5 Teorema (di Fubini). *Sia $f : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora:*

- per quasi ogni \mathbf{y} in \mathbb{R}^M la funzione $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è integrabile su \mathbb{R}^N ;
- se poniamo $F(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}$ (definendola a piacere dove $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ non è integrabile), allora F è integrabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right) \, d\mathbf{y}.$$

Anche in questo caso (se vale l'ipotesi che ora è l'integrabilità di f) gli integrali iterati non dipendono dall'ordine in cui sono svolti.

4.2.6 Proposizione (integrazione su insiemi normali). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$. Diciamo che A è normale (o semplice) rispetto all'asse N -esimo se esiste un insieme misurabile $A' \in \mathbb{R}^{N-1}$ ed esistono due funzioni misurabili $\alpha, \beta : A' \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha \leq \beta$ e*

$$A = \{(\mathbf{x}', y) : \mathbf{x}' \in A', y \in \mathbb{R}, \alpha(\mathbf{x}') \leq y \leq \beta(\mathbf{x}')\}.$$

In maniera analoga si può definire un insieme normale rispetto all'asse k -esimo, $k \in \{1, \dots, N\}$. Si dimostra che se A è normale, allora A è misurabile.

Sia A come sopra e sia $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile ($f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrabile). Allora per quasi ogni $\mathbf{x}' \in A'$ la funzione $y \mapsto f(\mathbf{x}', y)$ è misurabile (è integrabile)

sull'intervallo $[\alpha(\mathbf{x}'), \beta(\mathbf{x}')] e la funzione $\mathbf{x}' \mapsto \int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{\beta(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', y) dy$ (definita quasi ovunque) è misurabile (integrabile) in A' . In entrambi i casi si ha:$

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{A'} \left(\int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{\beta(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', y) dy \right) d\mathbf{x}'.$$

Al solito nel caso di f misurabile, $f \geq 0$, gli integrali possono valere $+\infty$.

4.3 Cambio di variabile negli integrali multipli

4.3.1 Teorema (di cambio di variabile). *Supponiamo che Ω e Ω_1 siano due aperti di \mathbb{R}^N e che $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega_1$ sia una applicazione bigettiva e di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Allora si ha:

1. Se $f : \Omega_1 \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione misurabile ($f \geq 0$), allora $(f \circ \Phi) \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|$ è misurabile e vale:

$$\int_{\Omega_1} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} f(\Phi(\mathbf{x})) \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

In particolare se $E \subset \Omega_1$, E è misurabile, allora $\mathbb{1}_{\Phi^{-1}(E)} \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|$ è misurabile e:

$$\text{mis}(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}.$$

2. Se $f : \Omega_1 \rightarrow [-\infty, \infty]$ è integrabile su Ω_1 , allora $(f \circ \Phi) \left| \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|$ è integrabile su Ω e vale la (4.3)

4.3.2 Esempio (coordinate polari). Consideriamo $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. È immediato verificare che:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(\rho, \theta)}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\rho, \theta)}(\rho, \theta) \right) = \rho.$$

Peraltro Φ non è iniettiva come si vede subito, sia perché $\Phi(0, \theta) = (0, 0)$ per qualunque θ , sia perché $\Phi(\rho, \theta + 2\pi k) = \Phi(\rho, \theta)$ per k intero. Se prendiamo $A := \{\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ si vede facilmente che A è un aperto e che Φ è iniettiva su A ; peraltro l'immagine di A è $B := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [0, +\infty[$ che non esaurisce tutto \mathbb{R}^2 . Se invece prendiamo $A_1 := \{\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ($A_1 = \bar{A}$) allora l'immagine di A_1 è tutto \mathbb{R}^2 (ma A_1 non è aperto e Φ non è iniettiva su A_1). Notiamo però che $A_1 \setminus A$ è trascurabile in quanto formato da tratti rettilinei (anche se alcuni illimitati) e per lo stesso motivo è trascurabile $\mathbb{R}^2 \setminus B = \{0\} \times [0, +\infty[$.

A questo punto prendiamo un insieme misurabile F in \mathbb{R}^2 e una funzione $f : F \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrabile. Definiamo $E := \{(\rho, \theta) \in A_1 : \Phi(\rho, \theta) \in F\} = \Phi^{-1}(F) \cap A_1$; poniamo anche $F^* := F \setminus \{0\} \times [0, +\infty[= F \cap B$ ed $E^* := \{(\rho, \theta) \in A : \Phi(\rho, \theta) \in F^*\} = \Phi^{-1}(F) \cap A$. Dunque $\Phi(E) = F$ e $\Phi(E^*) = F^*$ e si ha:

$$\begin{aligned} \int_F f(x, y) dx dy &= \int_{F^*} f(x, y) dx dy = \int_{\Phi(E^*)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{E^*} f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta = \int_E f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta = \int_{\{(\rho, \theta) : \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \Phi(\rho, \theta) \in F\}} f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

(nel primo e nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la trascurabilità di $F \setminus F^* \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$ e di $E \setminus E^* \subset A_1 \setminus A$ mentre nel passaggio tra la prima riga e la seconda abbiamo usato il teorema di cambio di variabile).

4.3.3 Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Passando in coordinate polari (A_1 è quello di prima) e poi applicando Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{A_1} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \right) d\theta = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi [-e^{-t}]_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

Notiamo peraltro che (sempre per Fubini-Tonelli):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

4.3.4 Esempio. Sia $\alpha > 0$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty]$ definita da:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{\|(x, y)\|^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ +\infty & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vediamo per quali α la f è integrabile sul disco $D := B(\mathbf{0}, 1) = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Passando a coordinate polari si trova il seguente integrale:

$$\iint_R \frac{1}{\rho^\alpha} \rho d\rho d\theta = \iint_R \rho^{1-\alpha} d\rho d\theta,$$

dove $R = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho \geq 1\}$ – notiamo che essendo f misurabile (perché reciproco di una funzione continua) e positiva, le formule valgono, eventualmente con valori infiniti. Usando Tonelli e le proprietà di limite per gli integrali:

$$\iint_R \rho^{1-\alpha} d\rho d\theta = 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{1-\alpha} d\rho = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \rho^{1-\alpha} d\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2-\alpha} (k^{2-\alpha} - 1).$$

Il calcolo di sopra per la verità è corretto se $\alpha \neq 2$; se $\alpha = 2$ si ha invece:

$$\iint_R \rho^{1-\alpha} d\rho d\theta = 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{-1} d\rho = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \rho^{-1} d\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi \ln(k) = +\infty$$

e quindi per $\alpha = 2$ la funzione non è integrabile. Tornando ad $\alpha \neq 2$ abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2-\alpha} (k^{2-\alpha} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2, \\ \frac{2\pi}{\alpha-2} & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

In definitiva f è integrabile su D se e solo se $\alpha > 2$ e

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{\alpha - 2}.$$

Prendiamo la stessa funzione f e consideriamo l'insieme $C := \{(x, y) : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$. Ci chiediamo come prima per quali $\alpha > 0$ la f è integrabile su C . L'insieme C è normale rispetto all'asse y (dunque è misurabile) e allora:

$$\begin{aligned} \iint_C \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} &= \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{1/x} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \right) dx = \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \left(\int_0^{1/x} \frac{dy}{(1 + (y/x)^2)^{\alpha/2}} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \left(\int_0^{1/x^2} \frac{ds}{(1 + s^2)^{\alpha/2}} \right) dx. \end{aligned}$$

(si è usato il cambio di variabile $s = y/x$, da cui $dy = x ds$, nell'integrale interno). Purtroppo non riusciamo a calcolare esplicitamente l'integrale in s . Poniamo però

$$G(\xi) := \int_0^\xi \frac{ds}{(1 + s^2)^{\alpha/2}}$$

Chiaramente $G(0) = 0$ e per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale G è derivabile e $G'(\xi) = \frac{1}{(1 + s^2)^{\alpha/2}} \Big|_{s=0} = 1$. Ne segue che $G(\xi) = \xi + o(\xi)$ per $\xi \rightarrow 0$ o anche $G(\xi) = \xi(1 + \delta(\xi))$ dove $\delta(\xi) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow 0$. Allora l'integrale sopra si può scrivere

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} G(1/x^2) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \frac{1}{x^2} (1 + \delta(1/x^2)) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-3}} (1 + \delta(1/x^2)) dx.$$

Dato che l'integrando è positivo ed è asintotico a $x^{3-\alpha}$, usando i criteri di integrabilità in una variabile, abbiamo che l'integrale di f su C è finito se e solo se $\alpha - 3 > 1$, cioè $\alpha > 4$.

4.3.5 Esempio (coordinate sferiche). Consideriamo $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(\rho, \theta, \psi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\psi), \rho \sin(\theta) \sin(\psi), \rho \cos(\psi))$. Si ha::

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial(\rho, \theta, \psi)}(\rho, \theta, \psi) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\psi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\psi) & \rho \cos(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) & \rho \cos(\theta) \sin(\psi) & \rho \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \cos(\psi) & 0 & -\rho \sin(\psi) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\rho, \theta, \psi)}(\rho, \theta, \psi) \right) &= \rho^2 \sin(\psi). \end{aligned}$$

Anche questa Φ non è iniettiva; se però prendiamo $A := \{\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \psi < \pi\}$ si vede che A è un aperto e che Φ è iniettiva su A . Inoltre l'immagine di A è $B := \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$, cioè \mathbb{R}^3 privato del semipiano $\Pi := \{(x, y, z) : x \geq 0\}$, che è trascurabile in \mathbb{R}^3 . Se invece $A_1 := \{\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}$ ($A_1 = \bar{A}$) allora immagine di A_1 è tutto \mathbb{R}^3 (ma A_1 non è aperto e Φ non è iniettiva su A_1).

A questo punto prendiamo un insieme misurabile F in \mathbb{R}^3 e una funzione $f : F \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrabile. Definiamo $E := \{(\rho, \theta, \psi) \in A_1 : \Phi(\rho, \theta, \psi) \in F\} = \Phi^{-1}(F) \cap A_1$; poniamo anche $F^* := F \setminus \Pi = F \cap B$ ed $E^* := \{(\rho, \theta, \psi) \in A : \Phi(\rho, \theta, \psi) \in F^*\} = \Phi^{-1}(F) \cap A$. Dunque $\Phi(E) = F$ e $\Phi(E^*) = F^*$ e si ha:

$$\begin{aligned} \int_F f(x, y) dx dy &= \int_{F^*} f(x, y) dx dy = \int_{\Phi(E^*)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{E^*} f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta = \int_E f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

(nel primo e nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la trascurabilità di $F \setminus F^* \subset \Pi$ e di $E \setminus E^* \subset A_1 \setminus A$ mentre nel passaggio tra la prima riga e la seconda abbiamo usato il teorema di cambio di variabile).

4.4 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

4.4.1 Teorema (di Lebesgue o della convergenza dominata).

Sia (f_n) una successione di funzioni integrabili in un insieme misurabile A .

Supponiamo che esista g integrabile in \mathbb{R}^N con la proprietà $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ per ogni n in \mathbb{N} e per ogni (o per quasi ogni) \mathbf{x} in A . Supponiamo anche che per ogni (o per quasi ogni) \mathbf{x} esista $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x})$ che possiamo indicare con $f(\mathbf{x})$.

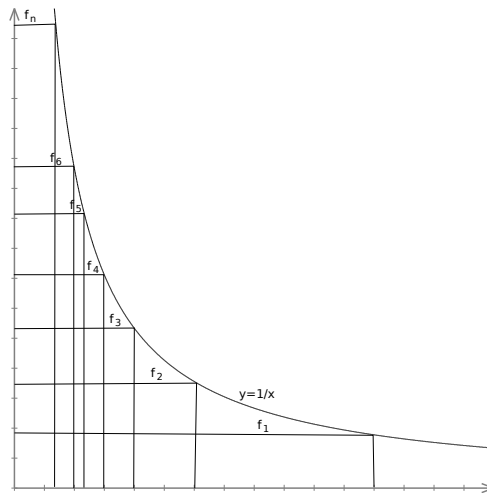
Allora la funzione f (definita arbitrariamente nelle \mathbf{x} in cui non esiste il limite) è integrabile e

$$\int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

4.4.2 Esempio. Vediamo un esempio in cui che la “convergenza puntuale” non implica la convergenza degli integrali. Consideriamo la seguente successione di funzioni su \mathbb{R} :

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_0^{1/n} n \, dx = \frac{1}{n}n = 1$ ma che per ogni x fissato $f_n(x) = 0$ se $x \leq 0$ o se $x > 0$ e $n > 1/x$; ne segue che $f_n(x) \rightarrow 0$ e dunque l'integrale non passa al limite. In effetti il teorema di convergenza dominata non può valere dato che “l'involuppo” delle f_n è la funzione $1/x$ che non è integrabile.



Dal teorema di Lebesgue si deducono i seguenti teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Notiamo che, tra le ipotesi scritte sotto, quella di misurabilità (che pure dobbiamo mettere) è verificata praticamente sempre - lo è per esempio non appena la funzione è continua (o continua a tratti). L'ipotesi cruciale è il fatto che gli integrandi siano **dominati** uniformemente rispetto al parametro.

4.4.3 Teorema. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N , $\mathbf{x}_0 \in A$ e $F : A \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- per ogni \mathbf{y} fissato in \mathbb{R}^M la funzione $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è continua in \mathbf{x}_0 ;
- per ogni \mathbf{x} fissato in A la funzione $\mathbf{y} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è misurabile;
- esistono $r > 0$ e $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che:

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq g(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \cap A, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M.$$

(la terza proprietà si può interpretare dicendo che la funzione $\mathbf{y} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è integrabile in \mathbf{y} “uniformemente rispetto a \mathbf{x} in $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A$ ”). Allora la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^M} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

è continua in \mathbf{x}_0 , cioè:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\mathbb{R}^M} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Supponiamo ora che oltre alle ipotesi precedenti si abbia $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} \subset A$ (dunque \mathbf{x}_0 è interno ad A), che k sia tra 1 ed N e che:

- per ogni \mathbf{y} fissato in \mathbb{R}^M $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ristretta a $B(\mathbf{x}_0, r)$ ha derivata parziale k -esima;
- per ogni \mathbf{x} fissato in $B(\mathbf{x}_0, r)$ la funzione $\mathbf{y} \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è misurabile;
- esiste $g_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che $\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| \leq g_1(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$.

Allora f è derivabile rispetto a x_k in \mathbf{x}_0 e si può derivare sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^M} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ e sia (\mathbf{x}_n) una successione di punti in $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A$ tali che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Definiamo $h_n, h : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$h_n(\mathbf{y}) := F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \quad , \quad h(\mathbf{y}) := F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}).$$

Per le ipotesi si ha che le h_n sono misurabili e che $h_n(\mathbf{y}) \rightarrow h(\mathbf{y})$, per ogni \mathbf{y} di \mathbb{R}^M e che $|h_n(\mathbf{y})| \leq g(\mathbf{y})$ per ogni n e per ogni \mathbf{y} . Dunque le h_n verificano le ipotesi del Teorema di Lebesgue per cui:

$$\int_{\mathbb{R}^M} h_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^M} h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

e cioè $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$. Dato che (\mathbf{x}_n) è una arbitraria successione che tende a \mathbf{x}_0 abbiamo dimostrato $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Vediamo la seconda parte del teorema. Siano $\mathbf{x}_0, r > 0$ e k come nelle ipotesi. Se $|t| < r$ si ha $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in B(\mathbf{x}_0, r) \subset A$, dunque possiamo definire il rapporto incrementale:

$$\Delta(t, \mathbf{y}) := \frac{F(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})}{t} \quad \text{se } 0 < |t| < r \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M.$$

È chiaro che $\Delta(t, \mathbf{y}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$, per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$. Estendiamo $\Delta(t, \mathbf{y})$ in $t = 0$ ponendo $\Delta(t, \mathbf{y}) := \frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$. In questo modo, per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, la funzione $t \mapsto \Delta(t, \mathbf{y})$ è continua in $t = 0$. Per le proprietà delle funzioni misurabili è anche chiaro che $\mathbf{y} \mapsto \Delta(t, \mathbf{y})$ è misurabile per ogni $t \in]-r, r[$.

Per il Teorema di Lagrange, dati $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ e $t \in]-r, r[$ esiste $\boldsymbol{\xi}_{t, \mathbf{y}}$ sul segmento tra x_0 e $0 \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k$ tale che:

$$\Delta(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial x_k} F(\boldsymbol{\xi}_{t, \mathbf{y}}, \mathbf{y}),$$

(notiamo che $\xi_{t,y} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ e che $\xi_{0,y} = \mathbf{x}_0$). Ne segue:

$$|\Delta(t, \mathbf{y})| = \left| \frac{\partial}{\partial x_k} F(\xi_{t,y}, \mathbf{y}) \right| \leq g_1(\mathbf{y}) \quad \forall t \in \{0 < |t| < r\} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M.$$

A questo punto possiamo applicare la prima parte del teorema con $] - r, r[$ al posto di A , t e 0 al posto di \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 , ottenendo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^M} \Delta(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^M} \frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

che dimostra la seconda proprietà enunciata nel teorema. \square

4.4.4 Osservazione. Nel teorema sopra si può integrare \mathbf{y} su un sottoinsieme misurabile E di \mathbb{R}^M , invece che su tutto \mathbb{R}^M . Per questo basta definire $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se $\mathbf{y} \notin E$ e usare il teorema originario.

4.4.5 Corollario. Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N e Ω_1 un aperto di \mathbb{R}^M . Sia $F : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) := \int_{\Omega_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ è continua.

Se inoltre supponiamo che per ogni \mathbf{y} di $\bar{\Omega}_1$ la $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia derivabile rispetto a \mathbf{x} nei punti di Ω e che $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (che sarebbe definita su $\Omega \times \bar{\Omega}_1$) sia continua e si prolunghi con continuità a tutto $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_1$, allora f è $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e vale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ (stiamo

indicando con $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ la matrice Jacobiana rispetto a \mathbf{x}).

4.4.6 Esempio. Consideriamo

$$f(x) := \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy.$$

La funzione scritta sopra ha senso se e solo se $x > 0$ (altrimenti l'integrale è infinito). Ci possiamo chiedere allora se f sia continua o derivabile in $]0, +\infty[$. Per provare la continuità, cercando di applicare la prima parte del teorema precedente, si è indotti a cercare una funzione integrabile g tale che

$$e^{-xy^2} \leq g(y) \quad \forall x > 0, \forall y \geq 0.$$

Si capisce facilmente che una tale g non si può trovare, perché in tal caso la $f(x)$ verrebbe finita anche in zero. Possiamo però fissare un numero $a > 0$ e ragionare su $[a, +\infty[$. È immediato che

$$0 \leq e^{-xy^2} \leq e^{-ay^2} \quad \forall x \geq a, \forall y \geq 0$$

da cui si deduce la continuità di f in $]a, +\infty[$ (essendo $g(y) := e^{-ay^2}$ integrabile su $[0, +\infty[$). Dato però che $a > 0$ è arbitrario se ne deduce che f è continua su tutto $]0, +\infty[$.

Per studiare la derivabilità si fissa ancora $a > 0$ e si nota che:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-xy^2} \right| = y^2 e^{-xy^2} \leq \underbrace{y^2 e^{-ay^2}}_{=: g_1(y)} \quad \forall x \geq a, \forall y \geq 0.$$

Dato che g_1 è integrabile, si ha che f è derivabile in $]a, +\infty[$ e per ogni $x > 0$:

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} y^2 e^{-xy^2} dy.$$

Per l'arbitrarietà di a tale risultato è valido per ogni $x > 0$.

Osserviamo che in realtà le proprietà della funzione sopra si possono trovare più facilmente mediante il cambio di variabile $s = \sqrt{xy}$ nell'integrale, da cui:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Un altro teorema di passaggio al limite, questa volta sotto il segno di serie, si ottiene dal teorema di Lebesgue ricordando che una serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ si può sempre vedere come l'integrale su $[0, +\infty[$ della funzione costante a tratti $f(x) := a_{[x]}$. Si ha allora:

4.4.7 Teorema (Teorema di Lebesgue per le serie). *Sia $(a_{n,m})$ una successione a due indici. Supponiamo che*

- per ogni n esiste $a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}$;
- esista una successione (b_n) tale che $b_n \geq 0$ e

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n < +\infty, \quad |a_{n,m}| \leq b_n \quad \forall n, m.$$

Allora (a_n) è sommabile e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Capitolo 5

Successioni e serie di funzioni

5.1 Convergenza puntuale e uniforme

Supponiamo che A sia un sottoinsieme di \mathbb{R}^N e supponiamo che per ogni intero n sia data una funzione $\mathbf{f}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Diremo in questo caso che (\mathbf{f}_n) è una successione di funzioni da A in \mathbb{R}^M . In quanto segue, per visualizzare le definizioni, si consiglia di pensare inizialmente al caso $N = M = 1$.

5.1.1 Definizione. Diciamo che la successione (\mathbf{f}_n) converge puntualmente in un punto \mathbf{x}_0 di A se esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_0)$. Diciamo che (\mathbf{f}_n) converge puntualmente su A se (\mathbf{f}_n) converge puntualmente in ogni \mathbf{x}_0 di A . È chiaro che in quest'ultimo caso siamo autorizzati a considerare la funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$$

e potremo quindi dire che (\mathbf{f}_n) converge puntualmente a \mathbf{f} (in forma abbreviata scriveremo “ $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f}$ puntualmente” o anche $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{punct}} \mathbf{f}$).

5.1.2 Definizione. Data la successione di funzioni (\mathbf{f}_n) e una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ diciamo che \mathbf{f}_n converge uniformemente su A a \mathbf{f} se si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in A} \|(\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))\|_{\mathbb{R}^M} = 0$$

Per indicare che \mathbf{f}_n converge uniformemente a \mathbf{f} , useremo la notazione $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f}$ uniformemente (su A), o anche $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$ (su A).

5.1.3 Definizione. Sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Conveniamo di chiamare *norma uniforme di \mathbf{f} su A* il numero (eventualmente infinito)

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty} = \|\mathbf{f}\|_{\infty, A} := \sup_{\mathbf{x} \in A} \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^M}$$

Dunque \mathbf{f}_n converge uniformemente a \mathbf{f} se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

In realtà il termine “norma” è appropriato solo quando $\|\mathbf{f}\|_{\infty}$ è finita, cioè se e solo se $\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{R}^M}$ è limitata su A . Questo è sempre vero se per esempio A è chiuso e limitato in \mathbb{R}^N e \mathbf{f} è continua (in tal caso il sup è anche il massimo). Vedremo la motivazione del termine “norma” nei prossimi paragrafi.

È in ogni caso vero che, se $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$, $\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|$ deve essere finito e tendere a zero.

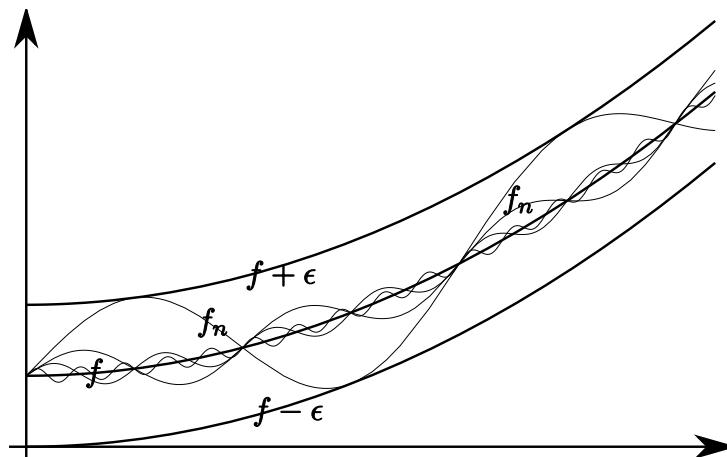


Figura 5.1: convergenza uniforme

5.1.4 Osservazione. Se $M = 1$, un modo di visualizzare la convergenza uniforme è di dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, il grafico delle f_n è *definitivamente* compreso tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ (vedi figura (5.1)).

La seguente proprietà è una semplice conseguenza delle definizioni.

5.1.5 Proposizione. *Se f_n converge uniformemente a f su A , allora f_n converge puntualmente su A .*

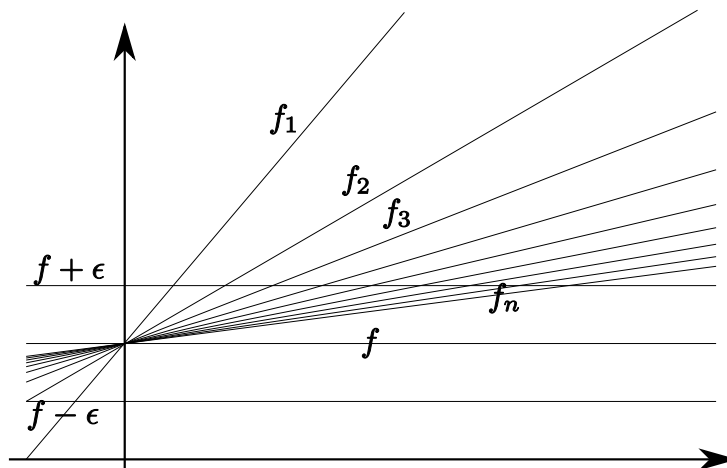
La proposizione precedente dice che se f_n converge uniformemente a qualcosa, questo qualcosa deve essere il limite puntuale delle f_n : il limite puntuale **individua** il candidato limite uniforme.

La proposizione non è invertibile come mostrano i vari esempi che seguono.

5.1.6 Esempio. Consideriamo $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$. Si vede subito che, dato x in \mathbb{R} , $f_n(x) \rightarrow 1$ e dunque f_n converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione f che vale costantemente 1. Si vede abbastanza facilmente però che f_n non converge uniformemente su \mathbb{R} a f . Se infatti si calcola:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} \right| = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si vede che $\|f_n - f\|_\infty$ non tende a zero. (5.2). Il problema è che, anche se a x fissato

Figura 5.2: $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

$f_n(x) \rightarrow 1$, la *velocità di convergenza* dipende da x (e peggiora tanto più x è grande) e non è quindi *uniforme* rispetto a x .

Notiamo che se invece di prendere le f_n su tutto \mathbb{R} consideriamo $A := [0, 1]$ (o un qualunque intervallo limitato), allora $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 1$ su A . Infatti

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| 1 + \frac{x}{n} - 1 \right| = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Dunque le f_n non convergono uniformemente a 1 su \mathbb{R} , ma convergono uniformemente a 1 su ogni intervallo $[a, b]$.

5.1.7 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := e^{-nx}$ definite su $A := [0, +\infty[$ (vedi la figura (5.3)).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

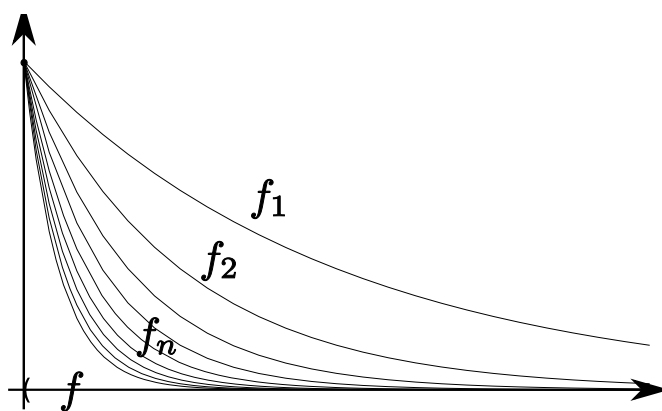


Figura 5.3: $f_n(x) = e^{-nx}$

cioè f_n converge puntualmente alla funzione f che vale zero su $]0, +\infty[$ e vale uno in zero. Però f_n non converge uniformemente a f in quanto, *per ogni* n

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \geq 0} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{x > 0} |e^{-nx}| = 1$$

che non tende a zero. Notiamo che le f_n sono tutte funzioni continue mentre il loro limite puntuale f non è continua in 0 dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Quindi in questo caso:

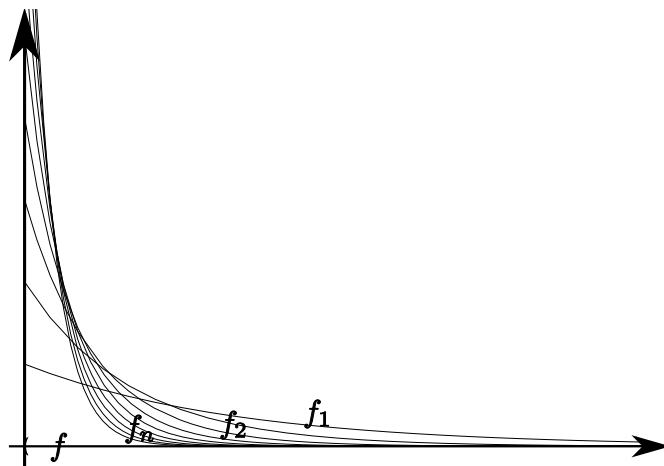
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) (= 0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 (= 1)$$

5.1.8 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := ne^{-nx}$ definite su $A :=]0, +\infty[$ (vedi la figura (5.4)). Anche in questo caso $f_n(x) \rightarrow 0$ per ogni $x > 0$ (anche se c'è un n a moltiplicare l'esponenziale e^{-nx} "vince"); notiamo che non abbiamo messo lo zero in A (altrimenti $f_n(0) \rightarrow +\infty$). Quindi le f_n tendono puntualmente a zero su A . Anche stavolta la convergenza non è uniforme, si vede infatti che, per ogni n

$$\|f_n - 0\|_{\infty} = \sup_{x > 0} |ne^{-nx}| = n$$

che addirittura tende all'infinito. Notiamo anche che:

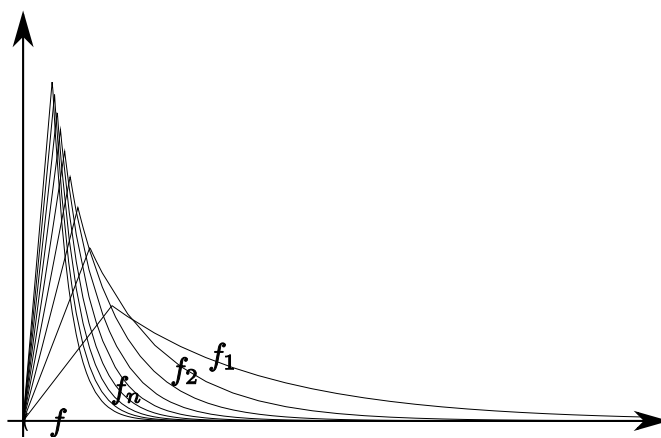
$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$$

Figura 5.4: $f_n(x) = ne^{-nx}$

e quindi l'integrale delle f_n non tende all'integrale della funzione limite (che sarebbe zero). Si potrebbe ritenere che questo dipenda dal fatto che A è un intervallo aperto, oppure che A non è limitato. In realtà, con un po' di pazienza, si può costruire un esempio analogo su $[0, 1]$; prendiamo infatti $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g_n(x) := \begin{cases} ne^{-nx} & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{n^2}{e}x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

(vedi la figura (5.5)).

Figura 5.5: $g_n(x)$

Come prima, per x fissato, $g_n(x) \rightarrow 0$. Infatti se $x = 0$ $g_n(0) = 0 \rightarrow 0$, mentre se $x > 0$ per n grande $g_n(x) = f_n(x) \rightarrow 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x) dx &= \int_0^{1/n} \frac{n^2 x}{e} dx + \int_{1/n}^1 ne^{-nx} dx = \\ &= \left[\frac{n^2 x^2}{2e} \right]_0^{1/n} + \left[n \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_{1/n}^1 = \frac{1}{2e} - e^{-n} + \frac{1}{e} \rightarrow \frac{3}{2e} \neq 0. \end{aligned}$$

Di nuovo l'integrale delle g_n non tende all'integrale del limite puntuale (che sarebbe zero).

Questi esempi mostrano che la convergenza puntuale *non va d'accordo* coi limiti e con gli integrali. Mostriamo ora che, al contrario, la convergenza uniforme si comporta bene.

5.1.9 Teorema. Siano $\mathbf{f}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ tali che $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f}$ uniformemente in A . Sia \mathbf{x}_0 di accumulazione per A e supponiamo che per ogni n esista $\ell_n := \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$. Allora:

$$(1) \text{ esiste } \ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n; \quad (2) \text{ si ha: } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell$$

In sostanza si può dire che $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che gli ℓ_n hanno limite facendo vedere che la successione (ℓ_n) verifica la proprietà di Cauchy. Fissiamo n e m . Dato che $\forall \mathbf{x}$ di A :

$$\|\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\|_{\infty}$$

facendo tendere \mathbf{x} a \mathbf{x}_0 si ottiene:

$$\|\ell_n - \ell_m\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\|_{\infty}.$$

Siccome $\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{\infty} \rightarrow 0$, è chiaro che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} tale che, se $n, m \geq \bar{n}$, si ha $\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\|_{\infty} \leq \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{\infty} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_m\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Dalla disuguaglianza sopra segue allora che (ℓ_n) è di Cauchy. Per la completezza di \mathbb{R}^M , esiste ℓ in \mathbb{R}^M tale che $\ell_n \rightarrow \ell$.

Mostriamo ora che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Sia $\varepsilon > 0$; esiste \bar{n} tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|\ell_n - \ell\|_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Dato che $\mathbf{f}_{\bar{n}}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell_{\bar{n}}$, possiamo trovare $\rho > 0$ tale che:

$$|\mathbf{f}_{\bar{n}}(\mathbf{x}) - \ell_{\bar{n}}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho) \cap A \setminus \{\mathbf{x}_0\}.$$

Mettendo tutto insieme abbiamo che, se $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$, $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, allora:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\|_{\mathbb{R}^M} &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_{\bar{n}}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M} + \|\mathbf{f}_{\bar{n}}(\mathbf{x}) - \ell_{\bar{n}}\|_{\mathbb{R}^M} + \|\ell_{\bar{n}} - \ell\|_{\mathbb{R}^M} \leq \\ &\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\bar{n}}\|_{\infty} + \|\mathbf{f}_{\bar{n}}(\mathbf{x}) - \ell_{\bar{n}}\|_{\mathbb{R}^M} + \|\ell_{\bar{n}} - \ell\|_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario abbiamo dimostrato che $f(x_k) \rightarrow l$, cioè la tesi. \square

5.1.10 Osservazione. Nella dimostrazione sopra $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\ell \in \mathbb{R}^M$. La dimostrazione si adatta facilmente ai casi infiniti, se la cosa ha senso. Per esempio ℓ può essere $\pm\infty$, se $M = 1$ oppure $\ell = \infty$ (nel senso introdotto in (1.3.7)). Stesso discorso per \mathbf{x}_0 .

5.1.11 Teorema. Siano (\mathbf{f}_n) ed \mathbf{f} tali che $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$ su A e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Se tutte le \mathbf{f}_n sono continue in \mathbf{x}_0 , allora \mathbf{f} è continua in \mathbf{x}_0 . Se ne ricava che se le \mathbf{f}_n sono continue su A , anche la \mathbf{f} è continua su A .

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente con $\ell_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_0)$. \square

5.1.12 Osservazione. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$ sia un aperto e che $\mathbf{f}_n : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^M$ siano continue. Supponiamo anche che $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$ su A , dove necessariamente $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ è continua. Allora \mathbf{f} si può prolungare con continuità a tutto \bar{A} ¹ e $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$ su \bar{A} .

5.1.13 Teorema. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile di misura finita: $|A| < +\infty$, siano $\mathbf{f}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ integrabili su A tali che $\mathbf{f}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{f}$ su A , dove $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Allora f è integrabile su A e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

¹esiste $\tilde{\mathbf{f}} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua con $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, \forall \mathbf{x} \in A$ - continuiamo a scrivere \mathbf{f} invece di $\tilde{\mathbf{f}}$

Dimostrazione. Consideriamo il caso scalare in cui $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Da $\|f_n - f\|_{\infty, A} \rightarrow 0$ deduciamo che $\|f_n - f\|_{\infty, A} \leq M$ per ogni n e per un'opportuna costante M . Ne segue:

$$|f(\mathbf{x})| \leq |f_1(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})| \leq |f_1(\mathbf{x})| + M \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Allora:

$$|f_n(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})| + |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq |f_1(\mathbf{x})| + 2M \quad \forall \mathbf{x} \in A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se definiamo $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(\mathbf{x}) := |f_1(\mathbf{x})| + 2M$ abbiamo che g è integrabile su A perché f_1 lo è e perché la costante $2M$ è integrabile su A , dato che $|A| < +\infty$. Inoltre è chiaro che $f_n \rightarrow f$ puntualmente: possiamo dunque applicare il Teorema della Convergenza Dominata e ottenere la tesi.

Il caso generale si fa ragionando componente per componente. \square

5.1.14 Osservazione. In realtà per la convergenza degli integrali la convergenza uniforme è spesso sovrabbondante e la condizione giusta per passare al limite sotto il segno di integrale è il Teorema di Lebesgue. Comunque il risultato sopra ci dice che la convergenza uniforme è sufficiente ad avere tale proprietà **se A è di misura finita**. Nel caso di insiemi di misura infinita si vede facilmente che la convergenza uniforme non assicura che l'integrale del limite sia il limite degli integrali. Si prenda ad esempio $A = \mathbb{R}$ e $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := \frac{n}{n^2 + x^2}$. Da un rapido studio di funzione si vede che:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \max_{n \in \mathbb{R}} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che $f_n \rightarrow 0$ uniformemente. Però:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + x^2} dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + s^2} ds = \pi.$$

Dunque gli integrali delle f_n non tendono a zero (= integrale del limite delle f_n).

5.1.15 Esempio. Contrariamente all'integrazione la derivazione **non va d'accordo** con la convergenza uniforme. Per esempio se consideriamo $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(vedi la figura (5.6)) si vede che f_n è derivabile e che

$$f'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

Non è difficile verificare che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, dove $f(x) = |x|$ ed è chiaro che f non è derivabile in zero. Quindi è possibile che funzioni derivabili convergano uniformemente a una non derivabile. Vale però il seguente risultato.

5.1.16 Teorema. *Supponiamo che I sia un intervallo in \mathbb{R} e che $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sia una successione di funzioni derivabili su I con derivata f'_n continua su I . Supponiamo che ci siano due funzioni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ per cui:*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{puntualmente} \quad f'_n \rightarrow g \quad \text{uniformemente}$$

(ne segue che g è continua). Allora f è derivabile e $f' = g$.

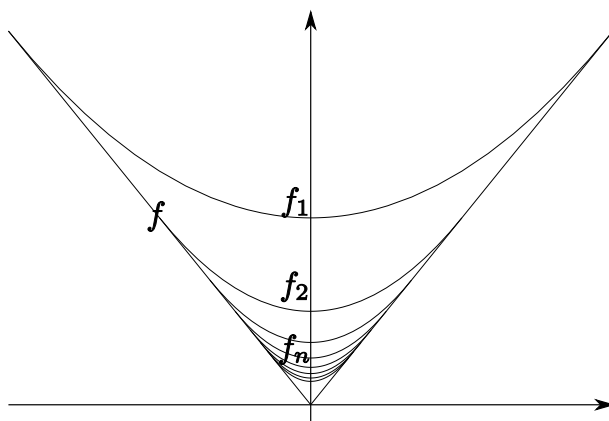


Figura 5.6: approssimazioni derivabili di $|x|$

Dimostrazione. Siano x_0 e x due punti in I . Allora per il teorema del calcolo integrale:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Se $n \rightarrow \infty$ si ha $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, per la convergenza puntuale di f_n a f . D'altra parte per la convergenza uniforme delle f'_n a g e per il teorema (5.1.13) abbiamo:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$$

e quindi l'eguaglianza sopra passa al limite:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \forall x \text{ in } I$$

Di nuovo per il teorema fondamentale del calcolo questo implica $f' = g$. \square

Vediamo ora che la norma uniforme è effettivamente una norma se si definiscono degli opportuni spazi (di funzioni).

5.1.17 Definizione. Se A è un (qualunque) sottoinsieme di \mathbb{R}^N consideriamo lo spazio delle funzioni limitate da A in \mathbb{R}^M :

$$\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M) := \left\{ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M : \sup_{\mathbf{x} \in A} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M} < +\infty \right\}.$$

Indichiamo anche $\mathcal{B}(A) := \mathcal{B}(A; \mathbb{R})$. Analogamente introduciamo lo spazio delle funzioni continue limitate da A in \mathbb{R}^M :

$$\mathcal{C}_b^0(A; \mathbb{R}^M) := \{ \mathbf{f} \in \mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M) : \mathbf{f} \text{ è continua in } A \}$$

e scriviamo $\mathcal{C}_b^0(A)$ se $M = 1$. Nel caso in cui A è chiuso e limitato ogni funzione continua è limitata (per Weierstrass), quindi $\mathcal{C}_b^0(A; \mathbb{R}^M) = \mathcal{C}^0(A; \mathbb{R}^M) = \{ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M, \mathbf{f} \text{ continua} \}$.

È chiaro che $\mathcal{C}_b^0(A; \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$. Inoltre sia $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$ che $\mathcal{C}_b^0(A; \mathbb{R}^M)$ sono spazi vettoriali dato che una combinazione lineare di funzioni limitate (e continue) è una funzione limitata (e continua).

Chiaramente se $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(K; \mathbb{R}^M)$ si ha $\|\mathbf{f}\|_{\infty, A} < +\infty$. Inoltre è facile vedere che $\|\cdot\|_{\infty, A}$ verifica tutte le proprietà di una norma, elencate in (1.2.1). Dunque la norma uniforme induce una distanza e una nozione di limite tra le funzioni limitate. In questo senso, se (\mathbf{f}_n) ed \mathbf{f} sono in $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f} \quad (\text{in } \mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \quad \text{uniformemente.}$$

Possiamo inoltre precisare l'inclusione scritta sopra dicendo che $\mathcal{C}_b^0(A; \mathbb{R}^M)$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$: la linearità è ovvia, la chiusura segue dal Teorema (5.1.11).

Il seguente Teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) stabilisce una proprietà molto importante per questi spazi.

5.1.18 Teorema. *Gli spazi normati $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$ e $\mathcal{C}_b^0(K; \mathbb{R}^M)$ (e quindi $\mathcal{C}^0(K; \mathbb{R}^M)$) nel caso di K chiuso e limitato) dotati della norma uniforme sono completi.*

5.2 Serie di funzioni

Come abbiamo considerato le successioni di funzioni possiamo considerare le serie. Per questo basterebbe applicare la definizione generale di serie a valori in spazi vettoriali - ripetiamo però tale definizione nel caso in cui gli elementi da sommare siano delle funzioni. Consideriamo ancora delle $\mathbf{f}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, con $A \subset \mathbb{R}^N$, anche se nella pratica considereremo quasi sempre $N = M = 1$, cioè $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ (tipicamente $A (= I)$ un intervallo).

5.2.1 Definizione. Supponiamo che $\mathbf{f}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ formino una successione di funzioni. Per ogni intero n chiamiamo somma parziale n -esima relativa a (\mathbf{f}_n) la funzione $\mathbf{F}_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita da:

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Chiamiamo *serie* di funzioni associata a (\mathbf{f}_n) la successione delle somme parziali (\mathbf{F}_n) . Diciamo che la serie delle \mathbf{f}_n è uniformemente convergente su A se esiste una funzione $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ a cui le \mathbf{F}_n convergono uniformemente: $\mathbf{F}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{F}$. In questo caso chiamiamo \mathbf{F} *somma* della serie e la indichiamo con

$$\mathbf{F} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n \quad \left(\text{e quindi } \mathbf{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A \right).$$

Molto spesso si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ la serie (cioè la successione) oltre che la sua somma.

Quindi si usa dire, con un leggero abuso, che la “serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ ” è (o non è) uniformemente convergente. Conviene tenere presente la differenza tra $\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ che è una funzione (ottenuta come somma di una serie di funzioni) e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ è un punto di \mathbb{R}^N (ottenuto come somma di una serie di punti di \mathbb{R}^N) e che coincide con il valore che \mathbf{F} assume in \mathbf{x} .

Rimarchiamo anche in questo caso che se la serie converge uniformemente ($\mathbf{F}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{F}$), allora essa converge puntualmente ($\mathbf{F}_n \xrightarrow{\text{punct}} \mathbf{F}$), cioè per ogni \mathbf{x} di A la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ è convergente. Si può dire in questo caso che la serie converge puntualmente.

Come già detto nel paragrafo precedente, se le \mathbf{f}_n sono limitate, allora la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non è altro che la convergenza della serie nello spazio normato $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$. Dato che tale spazio è completo (vedi il Teorema (5.1.18)), utilizzando il teorema (1.7.7) si deduce il seguente risultato.

5.2.2 Teorema (criterio della convergenza totale). *Sia (\mathbf{f}_n) una successione di funzioni limitate su A . Se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{x} \in A} \|\mathbf{f}_n(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M}$ è convergente, allora la serie delle \mathbf{f}_n converge uniformemente su A ad una funzione limitata.*

5.2.3 Osservazione. La proprietà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{x} \in A} \|\mathbf{f}_n(x)\|_{\mathbb{R}^M} < +\infty$$

(cioè la convergenza assoluta rispetto alla norma uniforme) viene anche detta *convergenza totale* della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$. Il teorema precedente afferma quindi che una serie di funzioni limitate che sia totalmente convergente è uniformemente convergente. Rimarchiamo che la convergenza totale riguarda una **serie numerica a termini positivi**.

Combinando il teorema precedente con le proprietà viste nel paragrafo (5.1) otteniamo i seguenti risultati.

5.2.4 Corollario. *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ limitate su A . Supponiamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{x} \in A} \|\mathbf{f}_n(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^M}$ sia convergente. Allora*

1. $\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ è ben definita per ogni $\mathbf{x} \in A$ ed è una funzione limitata su A .

2. Se tutte le \mathbf{f}_n sono continue in un punto $\mathbf{x}_0 \in A$, anche \mathbf{F} è continua in \mathbf{x}_0 .

Più in generale se \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A e se per ogni n si ha $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \rightarrow \ell_n$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$ è (assolutamente) convergente e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}).$$

3. Se $|A| < +\infty$, \mathbf{f}_n sono integrabili su A , allora \mathbf{F} è integrabile su A e

$$\int_A \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

4. Se $A = [a, b]$ è un intervallo, se $M = 1$, se le f_n sono tutte $\mathcal{C}^1([a, b])$ e se anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} |f'_n(x)|$ è convergente allora F è $\mathcal{C}^1([a, b])$ e si ha:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \text{ in } [a, b].$$

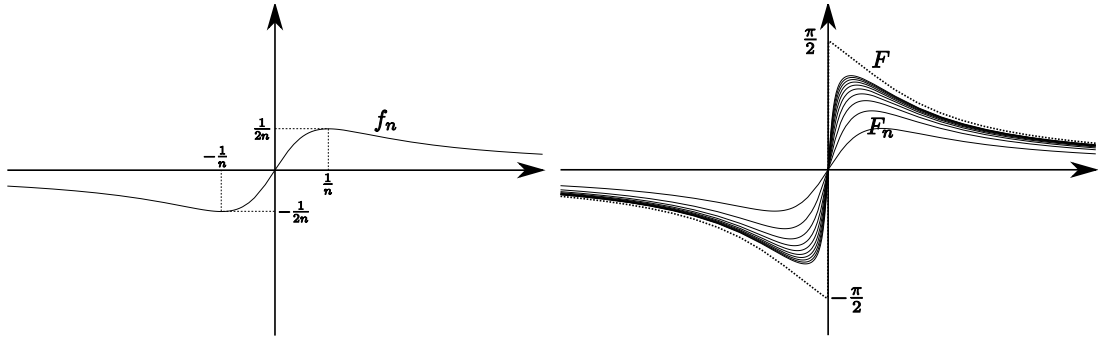


Figura 5.7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

Dimostrazione. Per il teorema (5.2.2) la successione delle somme parziali (\mathbf{F}_n) converge uniformemente a una funzione limitata \mathbf{F} : in particolare $\mathbf{F}_n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x})$ per ogni \mathbf{x} in A .

Questo corrisponde a dire che per ogni \mathbf{x} in A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ è convergente e la sua somma vale $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Dunque vale la prima proprietà. Se le \mathbf{f}_n sono continue anche le \mathbf{F}_n sono continue, dunque \mathbf{F} è continua (dal teorema (5.1.9)), cioè vale la seconda proprietà (il caso del limite in un punto di accumulazione si fa in modo analogo).

Se le \mathbf{f}_n sono integrabili su A , anche \mathbf{F}_n lo sono e applicando il teorema (5.1.13)

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{F}(x) \, d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_A \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

(l'ultima eguaglianza esprime solo la definizione della serie degli integrali).

Infine l'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty}$ implica, sempre per il teorema (5.2.2), che la serie delle f'_n è uniformemente convergente. Questo significa che le sue somme parziali $F'_n = \sum_{k=1}^n f'_k$ convergono uniformemente ad una funzione continua G . Per il teorema (5.1.16), ciò implica che F è derivabile e $F' = G$, dunque vale l'ultima affermazione. \square

5.2.5 Esempio. Consideriamo la seguente successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da

$$f_n(x) := \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0, \quad f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Quindi il grafico di ogni f_n è quello rappresentato in figura (5.7).

In particolare f_n raggiunge il suo massimo in $x = \frac{1}{n}$ e il massimo di f_n vale $f_n(1/n) = 1/2n$. Dunque

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

e quindi $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ (su tutto \mathbb{R}). Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Studiamone la convergenza puntuale: fissato x in \mathbb{R} vediamo se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

è convergente. Questo è vero per ogni x dato che, se $x = 0$ la serie ha tutti i suoi termini nulli, mentre se $x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2|x|}$$

e quindi la serie converge (dato che la serie $\frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge). Dunque ha senso scrivere

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

(x per x). Notiamo che $F(0) = 0$. Ci possiamo chiedere se F sia continua su tutto \mathbb{R} . Ciò sarebbe sicuramente vero se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$; sfortunatamente tale serie diverge

essendo eguale a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ e quindi con questo ragionamento non si perviene a nulla.

Se però fissiamo un qualunque $a > 0$ e consideriamo $A := [a, +\infty[$, si ha

$$\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \quad \text{se } n \geq 1/a.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A} &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} f_n(a) = \\ &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} \frac{a}{1+n^2a^2} \leq \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \frac{1}{a} \sum_{n > 1/a} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Applicando il corollario (5.2.4) (in A) otteniamo che la serie converge uniformemente su A e la sua somma F risulta continua su A . Dato che il numero $a > 0$ è arbitrario ne deduciamo che f è continua su $]0, +\infty[$. Analogamente si dimostra che F è continua su $] -\infty, 0[$.

In maniera analoga possiamo dimostrare che F è derivabile su A e quindi è derivabile in ogni $x \neq 0$. Infatti consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n, \quad \text{dove } f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha

$$\|f'_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} \left| \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \right| \leq \sup_{x \geq a} \frac{1+n^2x^2}{n^4x^4} \leq \frac{1}{n^4a^4} + \frac{1}{n^2a^2}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4a^4} + \frac{1}{n^2a^2} < +\infty$ la serie delle derivate è uniformemente convergente su A e quindi tale serie è la derivata di F .

Vediamo che invece F non è continua in zero. Infatti se $0 < x < 1$ si ha ²

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1+1} = \frac{1}{2}x [1/x] \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

²ricordiamo che $[t]$ indica la parte intera di un numero t , definita da $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$; ne segue allora che $[t]$ è un intero e che $[t] \leq t < [t] + 1$

Questa disuguaglianza rende impossibile che $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$ per $x \rightarrow 0^+$ e quindi F non è continua in zero (almeno da destra - si può anche ripetere lo stesso ragionamento per $x \rightarrow 0^-$). In verità possiamo essere più precisi. Usando la caratterizzazione delle serie come integrali su $[1, +\infty[$ della corrispondente “funzione a scalini” possiamo scrivere

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + [y]^2 x^2} dy \text{ da cui:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + (y-1)^2 x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy.$$

Sostituendo $t = xy$ si ricava

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^2} dt$$

e facendo tendere x a zero si ricava

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La figura (5.7) rappresenta le somme parziali fino all'ordine 10 delle f_n e, con linea tratteggiata, la somma della serie (in realtà la somma di ordine $n = 5000$).

5.3 Serie di potenze

In questo paragrafo useremo il risultati precedenti per studiare serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Per motivi che saranno chiari nei prossimi paragrafi risulta conveniente ambientare il problema nei numeri complessi, quindi, almeno all'inizio, i coefficienti a_k saranno dei numeri complessi, $z_0 \in \mathbb{C}$ e faremo variare la z in \mathbb{C} . Ad un certo punto però (quando entreranno in gioco le derivate) ci metteremo in \mathbb{R} , supponendo $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}$; utilizzeremo allora, per “ragioni estetiche” x_0 e x al posto di z_0 e z .

Per applicare i risultati dei paragrafi precedenti notiamo che in \mathbb{C} si usa la norma $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$. Dunque lo studio di serie come quella scritta sopra si riduce di fatto allo studio di una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, dove $f_n(x + iy) = a_n (x + iy)^n$ può essere vista come una funzione da $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. In realtà poi conterà anche il fatto che in \mathbb{C} si può fare il prodotto (e che le f_n sono definite tramite il prodotto complesso).

Nel resto del paragrafo z_0 sarà un numero fissato. Per $R > 0$ consideriamo il disco aperto di centro z_0 e raggio R :

$$B(R) = B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

e il corrispondente disco chiuso

$$\bar{B}(R) = \bar{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Fatte queste premesse possiamo scrivere subito il seguente enunciato:

5.3.1 Teorema. Siano (a_n) una successione in \mathbb{C} e poniamo:

$$M := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(per esempio supponiamo che esista il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ e chiamiamolo M). In generale $M \in [0, +\infty]$. Se definiamo $\bar{R} := 1/M$, più precisamente:

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } M = 0, \\ \frac{1}{M} & \text{se } M \in]0, \infty[, \\ 0 & \text{se } M = +\infty, \end{cases}$$

allora si ha:

1. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge puntualmente su $B_{z_0}(\bar{R})$;
2. per ogni R con $0 < R < \bar{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente su $\bar{B}_{z_0}(R)$;
3. per ogni z fuori da $\bar{B}_{z_0}(\bar{R})$ la serie non converge in z .

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda sulla "buccia" $S_{z_0}(\bar{R}) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \bar{R}\}$.

Dimostrazione. Sia $R < \bar{R}$. Vogliamo usare il criterio delle convergenza totale (teorema (5.2.2)) per la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sull'insieme $A = \bar{B}(R)$. Si ha:

$$\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)} = \sup_{z \in \bar{B}(R)} |a_n(z - z_0)^n| = |a_n|R^n.$$

Se applichiamo alla serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)}$ il criterio della radice troviamo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}R = MR = \frac{R}{\bar{R}} < 1$$

e dunque la serie converge (questo funziona se $\bar{R} \neq 0, \infty$, ma è chiaro che se $\bar{R} = 0$ il teorema non dice nulla dato che non ci sono R ammissibili, mentre se $\bar{R} = \infty$, cioè se $M = 0$, tutti gli $R > 0$ vanno bene perchè $MR = 0$). Abbiamo dunque dimostrato che la serie converge totalmente su $\bar{B}(R)$. Se ne deduce la convergenza uniforme della serie di funzioni su $\bar{B}(R)$.

In particolare, se $z \in B(\bar{R})$ (disco aperto) si può prendere un raggio R con $|z - z_0| < R < \bar{R}$; dato che la serie converge uniformemente su $\bar{B}(R)$ deve convergere in z .

Infine se $|z - z_0| > \bar{R}$ si ha:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| = M|z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{\bar{R}} > 1$$

che, sempre per il criterio della radice, implica che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ non converge. \square

5.3.2 Definizione. Data la successione (a_n) in \mathbb{C} chiamiamo *raggio di convergenza* della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ il numero \bar{R} (in $[0, +\infty]$) ottenuto nel teorema (5.3.1).

Risulta quindi definita la funzione $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per ogni z in $B(\bar{R})$ (se $\bar{R} = 0$ $B(\bar{R}) = \emptyset$; se $\bar{R} = +\infty$ $B(\bar{R}) = \mathbb{C}$).

5.3.3 Proposizione. Sia (a_n) una successione in \mathbb{C} e sia \bar{R} il raggio di convergenza definito in (5.3.2). Se $R > 0$ la funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

è (ben definita e) continua nel disco aperto $B_{z_0}(\bar{R})$.

Dimostrazione. Sia $z' \in B(\bar{R})$. Possiamo prendere R tale che $|z' - z_0| < R < \bar{R}$. Per quanto visto sopra la serie converge uniformemente su $\bar{B}(R)$. D'altra parte gli addendi della serie (cioè le funzioni $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$) sono funzioni continue e quindi, per il teorema (5.1.11) la somma della serie (cioè la f) è continua su $\bar{B}(R)$. In particolare f è continua in z' . Dato che z' è un punto arbitrario di $B(\bar{R})$, f è continua su $B(\bar{R})$. \square

D'ora in poi consideriamo il caso a coefficienti reali. In realtà tutto quanto stiamo per dire vale allo stesso modo nel caso generale, ma sarebbe necessario introdurre le derivate in senso complesso, cosa che rinunciamo a fare. Quindi ora $a_n \in \mathbb{R}$ e $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$; naturalmente il raggio di convergenza \bar{R} è definito come prima, però se ci limitiamo a $z = x \in \mathbb{R}$ la somma della serie sarà definita sull'intervallo aperto $x \in]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$.

5.3.4 Proposizione. Sia (a_n) una successione in \mathbb{R} e sia \bar{R} il raggio di convergenza associato ad (a_n) . Supponiamo $\bar{R} > 0$, Allora $f :]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

è di classe \mathcal{C}^∞ , cioè ha derivata k -esima continua per ogni $k \in \mathbb{N}$, e si ha:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(x - x_0)^{n-k} \quad \forall x \in]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\quad (5.1)$$

Inoltre ognuna delle serie (delle derivate) in (5.1) ha ancora raggio di convergenza \bar{R} .

Dimostrazione. Calcoliamo il raggio di convergenza della serie delle derivate prime ($k = 1$ in (5.1)). Per questo ricordiamo che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Dunque se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = M$ si ha:

$$M_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n} = M.$$

Passando ai reciproci otteniamo che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}$ ha raggio di convergenza \bar{R} . Sia ora $x' \in]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$. Possiamo prendere R con $|x' - x_0| < R < \bar{R}$; per il teorema (5.1.11) entrambe le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}$ convergono uniformemente su $[x_0 - R, x_0 + R]$. A questo punto per il corollario (5.2.4) (sulla derivazione per serie) abbiamo che f è derivabile in $[x_0 - R, x_0 + R]$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}$ per ogni $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$. In particolare la formula vale per $x = x'$.

Iterando il ragionamento si dimostra la tesi per ogni $k \geq 1$. \square

5.3.5 Osservazione. Se mettiamo $x = x_0$ nella formula (5.1), otteniamo:

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

cioè f (in $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$) è eguale alla sua serie di Taylor.

5.3.6 Esempio. Consideriamo la serie $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Allora il raggio di convergenza è 1 dato che $\sqrt[n]{1} \rightarrow 1$. Peraltro si sa che:

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z} \quad \text{se } |z| < 1$$

e quindi $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ per ogni z del disco aperto $\{|z| < 1\}$ (in particolare $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ se $-1 < x < 1$).

Consideriamo ora un'altra serie $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Anche questa serie ha raggio di convergenza 1 dato che $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$. Notiamo che $\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = x^{n-1}$ e dunque

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x) \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

In altre parole g è una primitiva di f , cioè $g(x) = -\ln(1 - x) + c$ per c costante. Ma calcolando tutto in $x = 0$ si trova $0 = g(0) = c$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x) \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

Consideriamo ancora una terza serie: $h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \left(= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)$. Anch'essa ha raggio di convergenza 1 perché $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Si ha:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = x f'(x).$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1 - x)^2} \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

5.3.7 Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Questa serie ha raggio di convergenza

1. In questo caso in verità non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ perché si ha:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}$$

però il massimo limite fa 1, come si vede passando alla sottosuccessione $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$. Si vede facilmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1 + z^2} \quad \text{se } |z| < 1.$$

Quindi la serie converge a $\frac{1}{1+z^2}$ per le z in $\{|z| < 1\}$. Guardando la cosa dal punto di vista di \mathbb{R} la cosa è abbastanza strana, dato che non si capisce come c'entri il numero 1 con la funzione $\frac{1}{1+x^2}$, che è ben definita su tutto \mathbb{R} . Dal punto di vista complesso invece è chiaro che il raggio di convergenza non può essere più di 1 dato che i e $-i$, che hanno modulo uno, sono delle singolarità per $\frac{1}{1+z^2}$.

Abbiamo visto prima che data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ essa definisce una funzione f sull'intervallo $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$ ed f è somma della sua serie di Taylor. Procediamo a rovescia e assegnamo una funzione f di classe \mathcal{C}^∞ , definita per esempio su $]x_0 - r, x_0 + r[$, e poniamo $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. È spontaneo chiedersi se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (costruita a partire da f) sia convergente in $]x_0 - r, x_0 + r[$ e soprattutto se converga a f . Il seguente esempio mostra che, in generale, ciò non è vero.

5.3.8 Esempio. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È chiaro che f è continua in zero, dato che $e^{-x^{-2}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$. Per $x \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{-3}e^{-x^{-2}} \\ f''(x) &= (-6x^{-4} + 4x^{-6})e^{-x^{-2}} \\ f^{(3)}(x) &= (24x^{-5} - 24x^{-7} - 12x^{-7} + 8x^{-9})e^{-x^{-2}} = (24x^{-5} - 36x^{-7} + 8x^{-9})e^{-x^{-2}} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= P_k(x^{-1})e^{-x^{-2}} \end{aligned}$$

per un opportuno polinomio P_k (andrebbe precisato ragionando per induzione). Dato che l'esponenziale "vince" su ogni polinomio si trova

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$$

qualunque sia k intero. Quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k.$$

In altri termini f si annulla in zero più rapidamente di qualunque potenza. Tutto questo implica che la serie di Taylor associata a f nel punto zero ha tutti i coefficienti nulli e dunque converge uniformemente ovunque alla funzione zero. Dato che $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ si ha che $f(x)$ non è eguale alla somma della sua serie di Taylor in nessuna $x \neq 0$.

In realtà il problema è sempre legato al fatto che stiamo ragionando in \mathbb{R} , se infatti guardassimo la funzione in \mathbb{C} essa non sarebbe \mathcal{C}^1 in nessun intorno di zero.

Nel seguente enunciato si dà un criterio (sufficiente ma non necessario) per far funzionare le cose.

5.3.9 Proposizione. *Supponiamo che $f :]x_0 - r, x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ sia di classe \mathcal{C}^∞ e supponiamo che esistano due costanti M e K tali che:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq MK^n \quad \text{per tutte le } x \text{ in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Dimostrazione. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_{n,x}$ è un opportuno punto, che dipende da n e da x , che si trova sul segmento tra x_0 e x . Facendo tendere n all'infinito:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{K^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

($n!$ va all'infinito più velocemente di $(Kr)^n$) e dunque la serie converge a $f(x)$. \square

5.3.10 Esempio. La funzione $f(x) := e^x$ è somma della sua serie di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

per tutti gli x in \mathbb{R} . Infatti, fissato $R > 0$

$$\max_{x \in [-R, R]} |f^{(k)}(x)| = \max_{x \in [-R, R]} |e^x| = e^R$$

(che è una costante indipendente da n). Per (5.3.9) la tesi vale su $[-R, R]$ e per l'arbitrarietà di R la tesi è vera ovunque.

Nello stesso modo si può verificare che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

per tutti gli x in \mathbb{R} .

Notiamo che, da quanto fatto in precedenza, si deduce che tutte tre le serie scritte sopra hanno raggio di convergenza infinito e quindi definiscono delle funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C} (mettendo $z \in \mathbb{C}$ al posto di $x \in \mathbb{R}$). In particolare

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

è ben definita per ogni z in \mathbb{C} . Facciamo vedere che $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$. Per questo usiamo il risultato sul prodotto alla Cauchy tra due serie (5.3.11) che ricordiamo immediatamente nel seguito. Usando quel teorema si ha:

$$\begin{aligned} f(z_1)f(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^n}{n!} = f(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Quindi, se $x, y \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= f(x)f(iy) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\ &= e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \end{aligned}$$

e dunque, con la definizione tradizionale di e^z per z in \mathbb{C} , troviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z.$$

Si potrebbe in realtà *definire* le funzioni e^z , $\sin(z)$ e $\cos(z)$ mediante le serie scritte sopra, e *dimostrare* che la formula $e^{x+iy} := e^x (\cos(y) + i \sin(y))$ è una conseguenza di tali definizioni.

5.3.11 Teorema. *Siano (a_n) e (b_n) due successioni in \mathbb{C} e poniamo:*

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Allora se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono assolutamente (in \mathbb{C}) anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

5.4 Serie trigonometriche e serie di Fourier

Sia $T > 0$ assegnato e per il resto di questo paragrafo poniamo $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ (T è un *periodo* assegnato e ω_0 è la corrispondente *frequenza angolare*).

5.4.1 Definizione. Sia $(c_n) = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una successione definita per $n \in \mathbb{Z}$.

Questo significa che per ogni n intero relativo è definito un numero complesso c_n . Possiamo anche pensare che a $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sia definita mediante le due successioni (in senso tradizionale) $(c_n)_{n \geq 0}$ e $(c_{-n})_{n \geq 1}$ (o, per rendere tutto simmetrico, mediante la terna $c_0, (c_n)_{n \geq 1}, (c_{-n})_{n \geq 1}$). Indicheremo con $\mathbf{e}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ le funzioni

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{in\omega_0 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chiameremo *serie trigonometrica complessa* la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$. Anche qui non abbiamo una serie in senso tradizionale e dobbiamo precisare cosa intendiamo. Dato $k \in \mathbb{N}$ si pone:

$$S_k(t) := \sum_{n=-k}^k c_n \mathbf{e}_n(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente $S_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è ben definita, essendo somma di un numero finito ($= 2k+1$) di termini. Diremo che la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ converge (puntualmente/uniformemente/qualche

altro senso) se le funzioni (S_n) convergono (puntualmente/uniformemente/qualche altro senso) a una funzione $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se ciò avviene diciamo che S è la somma della serie e indichiamo:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al solito c'è l'ambiguità del simbolo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$ che indica sia “la serie” (cioè la successione delle S_n) sia la sua somma.

5.4.2 Osservazione. Le funzioni \mathbf{e}_n sono tutte periodiche di periodo T , cioè $\mathbf{e}_n(t+T) = \mathbf{e}_n(t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi se la serie trigonometrica converge puntualmente, la sua somma è periodica di periodo T .

5.4.3 Proposizione. *Si ha: (la sovralineatura indica il coniugato)*

$$\int_0^T \mathbf{e}_n(t) \overline{\mathbf{e}_m(t)} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ T & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $n \neq m$ si ha:

$$\int_0^T \mathbf{e}_n(t) \overline{\mathbf{e}_m(t)} dt = \int_0^T e^{in\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega_0 t}}{i(n-m)\omega_0} \right]_0^T = 0$$

(perché $t \mapsto e^{i(n-m)\omega_0 t}$ è periodica di periodo T). Se $n = m$:

$$\int_0^T \mathbf{e}_n(t) \overline{\mathbf{e}_m(t)} dt = \int_0^T e^{i(n-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T.$$

□

Vediamo ora che la convergenza della serie trigonometrica e la regolarità della sua somma sono legate al grado di “sommabilità” dei coefficienti.

5.4.4 Proposizione. *Sia $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una successione di numeri complessi.*

- Se si ha $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, la serie trigonometrica converge uniformemente (in particolare puntualmente). Ne segue che detta S la somma della serie (definita da $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$) S è continua e T -periodica su \mathbb{R} .
- Se in aggiunta $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$, allora S è \mathcal{C}^1 , f ed f' sono T -periodiche su \mathbb{R} e
$$S' \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}'_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i\omega_0 n \mathbf{e}_n.$$
- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$, allora S è di classe \mathcal{C}^h , $S^{(j)}$ è T -periodica per $j = 0, \dots, h$ e
$$S^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (i\omega_0 n)^j \mathbf{e}_n$$
 per $j = 0, \dots, h$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$. Allora, dato che le funzioni \mathbf{e}_n hanno modulo costantemente eguale a 1, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}_n\|_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

(la norma uniforme essendo fatta su \mathbb{R}) e quindi la tesi segue dal teorema (5.2.2).

Supponiamo ora che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$; notiamo che $\mathbf{e}'_n = i\omega_0 n \mathbf{e}_n$ e allora:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}'_n\|_{\infty} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty.$$

e quindi la tesi segue dal corollario (5.2.4) (seconda affermazione). Il caso generale si fa in modo analogo. \square

5.4.5 Proposizione. *consideriamo la serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ e supponiamo che*

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$. Per quanto visto sopra la serie è (uniformemente) sommabile e possiamo

dunque considerare $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora si ha:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Dimostrazione. Sia $k \in \mathbb{Z}$. Nell'ipotesi fatta possiamo scambiare integrale e serie e scrivere:

$$\int_0^T f(t) \overline{\mathbf{e}_k(t)} dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n(t) \overline{\mathbf{e}_k(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T \mathbf{e}_n(t) \overline{\mathbf{e}_k(t)} dt.$$

Per (5.4.3) gli addendi della serie sono tutti nulli eccetto il k -esimo che fa T . Dunque

$$\int_0^T f(t) \overline{\mathbf{e}_k(t)} dt = c_k T$$

che ci dà la tesi. \square

5.4.6 Osservazione. Per la proprietà sopra è servito poter effettuare lo scambio tra integrale e serie. L'ipotesi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ è sufficiente per aver questa proprietà ma non è affatto necessaria. In realtà per avere la formula (5.2) basta molto di meno, per esempio basterebbe che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$.

5.4.7 Definizione. Ricordiamo che una funzione f definita su \mathbb{R} si dice T -periodica se $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Poniamo:

$$L_T^1(\mathbb{R}^M) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M : f \text{ misurabile e } T\text{-periodica, } \int_0^T |f(t)| dt < +\infty \right\}.$$

Ammettiamo anche di scrivere $L_T^1(\mathbb{C})$ (con la stessa definizione).

5.4.8 Osservazione. Sia $\mathbf{f} \in L_T^1(\mathbb{R}^M)$. È immediato verificare che $f(t + kT) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre:

$$\int_a^{a+T} \mathbf{f}(t) dt = \int_0^T \mathbf{f}(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Infatti se $a \in \mathbb{R}$ possiamo trovare $k \in \mathbb{Z}$ tale che $kT \leq a < (k+1)T$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} \mathbf{f}(t) dt &= \int_a^{kT} \mathbf{f}(t) dt + \int_{kT}^{a+T} \mathbf{f}(t) dt = \int_a^{kT} \mathbf{f}(t) dt + \int_{(k-1)T}^a \mathbf{f}(\tau + T) d\tau = \\ &= \int_a^{kT} \mathbf{f}(t) dt + \int_{(k-1)T}^a \mathbf{f}(t) dt = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{f}(t) dt = \int_0^T \mathbf{f}(\tau + (k-1)T) d\tau = \int_0^T \mathbf{f}(t) dt. \end{aligned}$$

5.4.9 Definizione. Sia $f \in L_T^1$. per ogni $n \in \mathbb{Z}$ definiamo l' n -esimo coefficiente di Fourier complesso di f :

$$c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{\mathbf{e}_n(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Consideriamo anche la serie di Fourier complessa associata ad f la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

In realtà la scrittura sopra va intesa come (nota che $\mathbf{e}_0 = 1$):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n := c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \mathbf{e}_{-n},$$

e quindi la convergenza (puntuale o uniforme) della serie a sinistra si definisce come la **contemporanea** convergenza (puntuale o uniforme) delle due serie scritte a destra.

La definizione data sopra è legata ovviamente alla proposizione (5.4.5). È naturale chiedersi se l'esistenza dei coefficienti c_n di f sia sufficiente ad aver che f è somma della sua serie di Fourier. Questo purtroppo può essere falso anche se f è continua: è possibile dimostrare che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge alla funzione in molti punti (per esempio sui razionali). La questione è piuttosto delicata: riportiamo di seguito, senza dimostrazione, un teorema che ci dà la convergenza puntuale della serie di Fourier.

5.4.10 Teorema. Supponiamo che $f \in L_T^1$ e che esistano $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ tali che per ogni $i = 0, \dots, k-1$ si abbia:

- f è continua e derivabile su $]t_i, t_{i+1}[$;
- f' è limitata su $]t_i, t_{i+1}[$ cioè $\sup_{t_i < t < t_{i+1}} |f'(t)| < +\infty$.

Allora la serie di Fourier associata a f converge puntualmente in \mathbb{R} e :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

dove

$$f(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t), \quad f(t_0^+) := \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

tenendo conto del fatto che il limiti destro e sinistro scritti sopra esistono per ogni t_0 come conseguenza delle ipotesi su f . Dunque la serie di Fourier converge puntualmente a f tranne (eventualmente) che nei "punti di salto" $t_i + mT$ ($i = 0, \dots, k, m \in \mathbb{Z}$).

5.4.11 Teorema. Se $f \in L_T^1$ è di classe $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ allora la serie di Fourier associata a f converge uniformemente su \mathbb{R} alla funzione f .

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \underbrace{\left[\frac{f(t) e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_0^T}_{=0} + \frac{1}{in\omega_0 T} \int_0^T f'(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{in\omega_0 T} \underbrace{\left[\frac{f'(t) e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} \right]_0^T}_{=0} + \frac{1}{(in\omega_0)^2 T} \int_0^T f''(t) e^{-in\omega_0 t} dt = -\frac{1}{n^2 \omega_0^2 T} \int_0^T f''(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \end{aligned}$$

Nei passaggi svolti abbiamo integrato per parti; dato che sia f che f' sono \mathcal{C}^1 su $[0, T]$ e hanno lo stesso valore agli estremi (per l'ipotesi di periodicità) abbiamo potuto cancellare i due termini sopra. Si ha:

$$\left| \int_0^T f''(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right| \leq \|f''\|_\infty \int_0^T \underbrace{|e^{-in\omega_0 t}|}_{=1} dt = \|f''\|_\infty T$$

e dunque:

$$|c_n| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{\omega_0^2} \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Per la (5.4.4) la serie di Fourier converge uniformemente. Per il teorema (5.4.10) la serie converge puntualmente a f . Dunque la serie converge uniformemente a f . \square

Ricordiamo anche che i coefficienti di Fourier si possono calcolare integrando, invece che tra 0 e T , su un qualunque intervallo $[a, a + T]$, di ampiezza T .

5.4.12 Proposizione. Sia f in $L_T^2(\mathbb{C})$. Allora

1. f è reale se e solo se $c_{-k} = \overline{c_k}$ per ogni k ;
2. f è pari se e solo se $c_{-k} = c_k$ per ogni k ;
3. f è dispari se e solo se $c_{-k} = -c_k$ per ogni k ;
4. f è reale pari se e solo se $c_{-k} = c_k \in \mathbb{R}$ per ogni k ;
5. f è reale dispari se e solo se $c_{-k} = -c_k \in i\mathbb{R}$ per ogni k (cioè i c_k sono immaginari puri);

Dimostrazione. La prima proprietà è già stata vista prima. Dimostriamo la seconda supponendo f pari. Usando il cambio di variabile $s = -t$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{i\omega_0 ks} ds$$

da cui $c_k = c_{-k}$. In modo analogo si ragiona se f è dispari. \square

5.4.13 Definizione. Se f è una funzione e $t_0 \in \mathbb{R}$ indichiamo con f_{t_0} la funzione translata di t_0 $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$.

5.4.14 Proposizione. Siano f in $L_{per}^2(T)$ e t_0 in $[0, T]$, e chiamiamo c_k^* i coefficienti di Fourier di f_{t_0} . Allora $c_k^* = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k$.

Dimostrazione. Con un semplice cambio di variabile nell'integrale

$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t_0) e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(\tau) e^{-i\omega_0 k(\tau+t_0)} dt =$$

$$\frac{e^{-i\omega_0 kt_0}}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 k\tau} dt = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k.$$

□

Vediamo ora la versione in \mathbb{R} dei risultati precedenti. Supponiamo che f sia in $L_T^1(\mathbb{R})$ (f a valori reali). Siano c_k i coefficienti di Fourier di f . Allora

$$c_{-k} = \langle f, \mathbf{e}_{-k} \rangle = \langle f, \overline{\mathbf{e}_k} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, \overline{f} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, f \rangle = \overline{\langle f, \mathbf{e}_k \rangle} = \overline{c_k}$$

(notiamo che vale anche il viceversa: $c_{-k} = \overline{c_k} \Rightarrow f$ reale). Quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + c_{-n} \mathbf{e}_{-n}) = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + \overline{c_n} \mathbf{e}_n) =$$

$$c_0 \mathbf{e}_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n \mathbf{e}_n) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n) \cos(\omega_0 kt) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Im(c_n) \sin(\omega_0 kt) =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 kt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega_0 kt)$$

dove:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e per } k \geq 1:$$

$$a_k = 2\Re(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 kt) dt$$

$$b_k = -2\Im(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 kt) dt$$
(5.4)

5.4.15 Osservazione. Un altro modo di vedere le cose nel caso di f a valori reali, è il seguente. Sia $k \neq 0$ e scriviamo $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$. Per le (5.4) si ha $a_k = 2\rho_k \cos(\theta_k)$ e $b_k = -2\rho_k \sin(\theta_k)$ e dunque

$$a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt) = 2\rho_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k).$$

In sostanza il modulo del coefficiente c_k è legato all'*ampiezza* della componente (sinusoidale) $a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)$ mentre l'argomento di c_k è legato alla sua *fase*.

5.4.16 Definizione. Se (a_n) e (b_n) sono due successioni di numeri reali la serie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

è detta *serie trigonometrica reale*. Se $f \in L_T^1(\mathbb{R})$ chiamiamo *coefficienti di Fourier reali* di f i numeri a_n e b_n definiti da (5.4). La serie trigonometrica reale corrispondente ai coefficienti di Fourier di f è detta la *serie di Fourier di f* .

Ricordiamo anche che i coefficienti di Fourier si possono calcolare integrando, invece che tra 0 e T , su un qualunque intervallo $[a, a + T]$, di ampiezza T .

5.4.17 Osservazione. Sia f in $L_T^2(\mathbb{R})$. Come conseguenza delle proprietà dei c_k si ha:

1. f è pari se e solo se $b_k = 0$ per ogni k .
2. f è dispari se e solo se $a_k = 0$ per ogni k .

Si possono allora ritrovare gli stessi risultati di convergenza trovati nel caso complesso.

5.4.18 Proposizione. Siano (a_n) e (b_n) due successione di numeri reali.

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty$, allora la serie trigonometrica reale associata a (a_n) , (b_n) converge uniformemente a una funzione continua (e T -periodica) f ;
- Se si ha anche $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} n|b_n| < +\infty$, allora f è C^1 , si può derivare per serie e la serie delle derivate converge uniformemente alla derivata di f ; la serie trigonometrica reale associata agli (a_n) (b_n) converge uniformemente.
- Se, più in generale, $\sum_{n=0}^{\infty} n^h |a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} n^h |b_n| < +\infty$, allora f è C^h , e il risultato precedente vale per tutte le derivate $f^{(j)}$ per $j = 1, \dots, h$.

5.5 Alcuni esempi

5.5.1 Esempio (onda quadra). Sia

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

ed eventualmente estesa per periodicità (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier di f . Applicando le formule si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 0;$$

e per $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 kt} dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{\frac{T}{2}}^T = \\ &= \frac{i}{2\pi k} (e^{-ik\pi} - 1) - \frac{i}{2\pi k} (1 - e^{-ik\pi}) = \frac{i}{\pi k} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{\pi k}$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\omega_0 kt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

Nelle figure 5.8, 5.9, 5.10 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Si noti come l'approssimazione (che come abbiamo visto è in energia) diventi *cattiva* vicino ai punti di salto anche per n grande.

5.5.2 Esempio (dente di sega). Sia

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ t - T & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

estesa per periodicità (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Per calcolare i coefficienti di Fourier possiamo usare l'intervallo $[-T/2, T/2]$ invece di $[0, T]$, notando che $f(t) = t$ in tale intervallo. Si ha allora:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt = 0;$$

e per $k \neq 0$ (integrando per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\frac{T}{2} e^{-i\omega_0 k \frac{T}{2}} + \frac{T}{2} e^{i\omega_0 k \frac{T}{2}}}{k} + 0 = \frac{iT}{4\pi k} (e^{-\pi k i} + e^{\pi k i}) = (-1)^k \frac{iT}{2\pi k} = (-1)^k \frac{i}{\omega_0 k}. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale si ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = -(-1)^k \frac{T}{\pi k} = -(-1)^k \frac{2}{\omega_0 k}.$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} -\frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

Nelle figure 5.11, 5.12, 5.13 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Anche in questo caso l'approssimazione non è molto buona vicino al punto di salto.

5.5.3 Esempio (onda triangolare). Sia $f(t) := |t| - \frac{T}{4}$ se $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, estesa per periodicità (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{Tt}{4} \right]_0^{\frac{T}{2}} = 0;$$

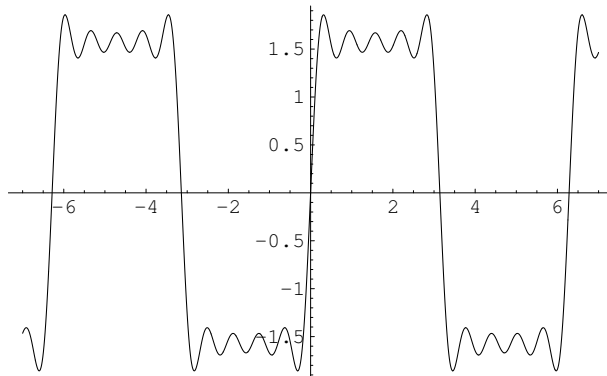


Figura 5.8: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

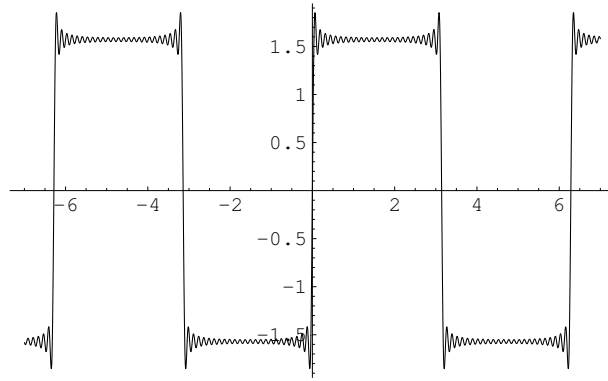


Figura 5.9: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

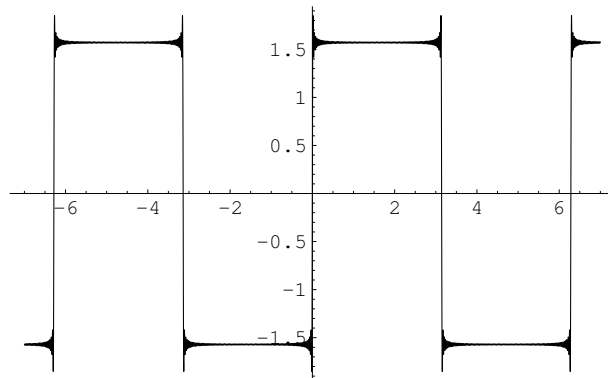


Figura 5.10: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 200$

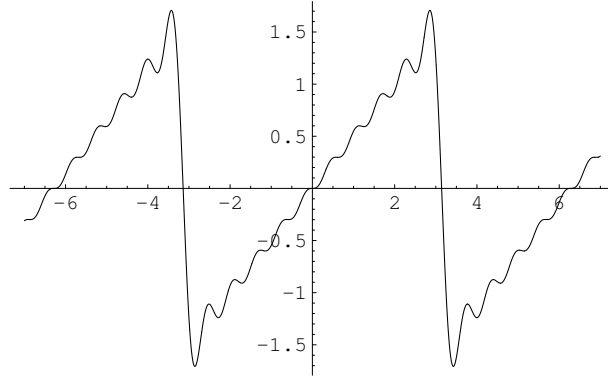


Figura 5.11: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

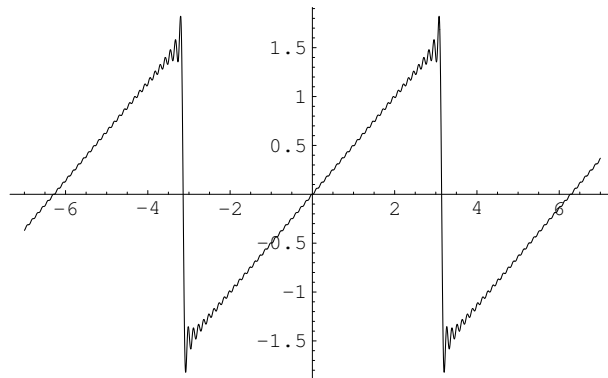


Figura 5.12: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

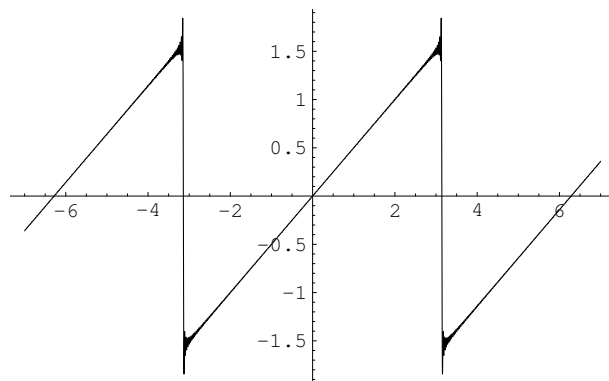


Figura 5.13: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 200$

e per $k \neq 0$ (si usa l'integrazione per parti):

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(|t| - \frac{T}{4} \right) e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{(|t| - \frac{T}{4}) e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-T/2}^{T/2} + \\
 &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) e^{-i\omega_0 k t} dt - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_0^{\frac{T}{2}} (+1) e^{-i\omega_0 k t} dt = 0 + \\
 &\quad \frac{i}{2\pi k} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-i\omega_0 k t} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} dt \right\} = \frac{i}{2\pi k} \left\{ \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right\} = \\
 &\quad \frac{1}{2\pi\omega_0 k^2} (-1 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 1) = \frac{1}{\pi\omega_0 k^2} ((-1)^k - 1) = \frac{T}{2\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1)
 \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1), \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\omega_0 t) = -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t).$$

Dato però che la serie dei moduli dei coefficienti $\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ è convergente si può dire che

$$f(t) \underset{unif.}{=} -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

e in particolare la serie sopra converge a $f(t)$ in ogni t . Nelle figure 5.14, 5.15, 5.16 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Stavolta l'approssimazione è nettamente migliore (per ordini n anche più bassi dei precedenti). A cercare il pelo nell'uovo c'è qualche problema nell'approssimare gli spigoli, che sono sempre un po' tondi nelle approssimanti. Si può anche notare che la serie delle derivate è

$$-\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [-(2k+1)\omega_0 \sin((2k+1)\omega_0 t)] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t),$$

che è la serie di Fourier dell'onda quadra esaminata nel primo esempio. Dunque l'onda quadra è la derivata in senso di L^2 dell'onda triangolare. Osserviamo che quest'ultima non è \mathcal{C}^1 dato che non è derivabile in zero.

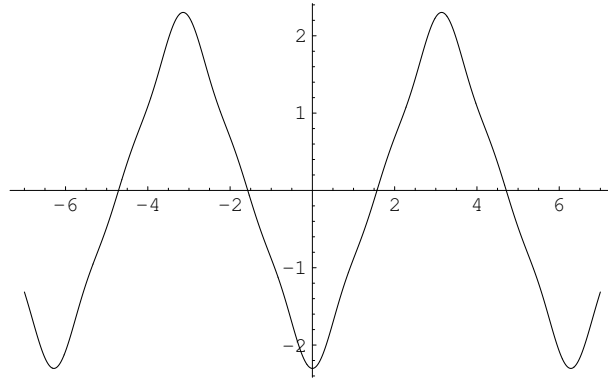


Figura 5.14: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 5$

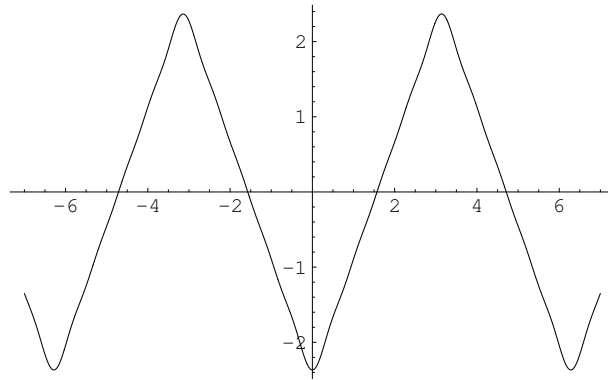


Figura 5.15: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

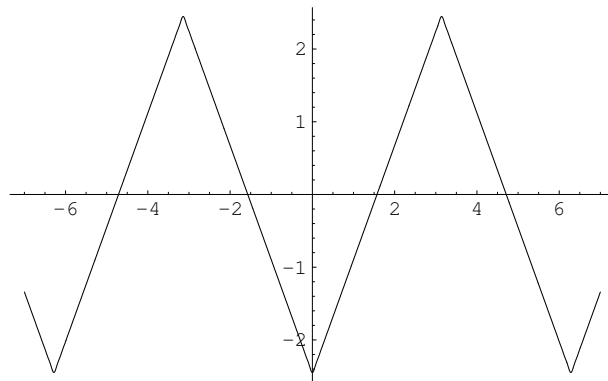


Figura 5.16: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

5.5.4 Esempio. Sia $f(t) = t^2$ per $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ (estesa per periodicità su tutto \mathbb{R}). Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12};$$

e per $k \neq 0$ (integrando due volte per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t^2 e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2t e^{-i\omega_0 k t} dt = \\ &= 0 + \frac{1}{T} \left[\frac{2t e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} dt = \frac{1}{T\omega_0^2 k^2} \left(2\frac{T}{2} e^{-ik\pi} + 2\frac{T}{2} e^{ik\pi} \right) + 0 = \\ &= \frac{2}{\omega_0^2 k^2} (-1)^k = \frac{T^2}{2\pi^2 k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_0 = \frac{T^2}{12}, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T^2}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

Dato che $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$ si deduce

$$f(t) \underset{unif.}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

(e in particolare la serie converge puntualmente a f). Se $T = 2\pi$ si ha allora:

$$t^2 \underset{unif.}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

Calcolando il tutto in $t = 0$ e rispettivamente in $t = \pi$ si ritrovano le formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riportiamo anche per questo esempio (vedi figure 5.17, 5.18, 5.19) i grafici di alcuni polinomi di Fourier approssimanti - la situazione è simile a quella dell'onda triangolare. In effetti la funzione f che stiamo esaminando non è \mathcal{C}^1 (anche se la formula $f(t) = t^2$ potrebbe suggerire che lo sia). Per capirlo dobbiamo ricordare che la f è definita su tutto \mathbb{R} e vale t^2 solo in $[-T/2, T/2]$, mentre fuori da questo intervallo è estesa in modo da risultare periodica di periodo T (come è chiaro dai grafici delle approssimanti). Vista così è chiaro che f non è derivabile nei punti $\pm T/2$. In effetti se calcoliamo la serie delle derivate troviamo

$$\frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} [-k\omega_0 \sin(k\omega_0 t)] = -\frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

I coefficienti di quest'ultima serie sono solo a quadrato sommabile (mentre non sono sommabili) e quindi la derivata c'è solo nel senso di L^2 .

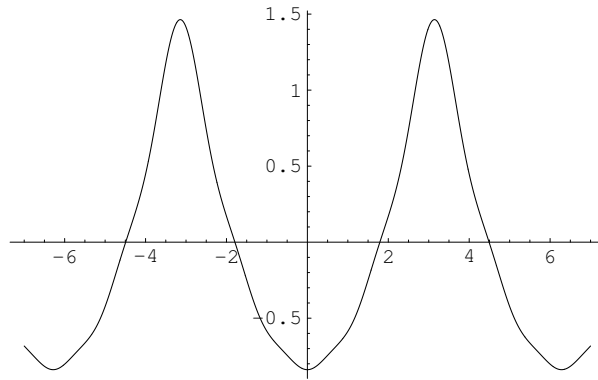


Figura 5.17: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 5$

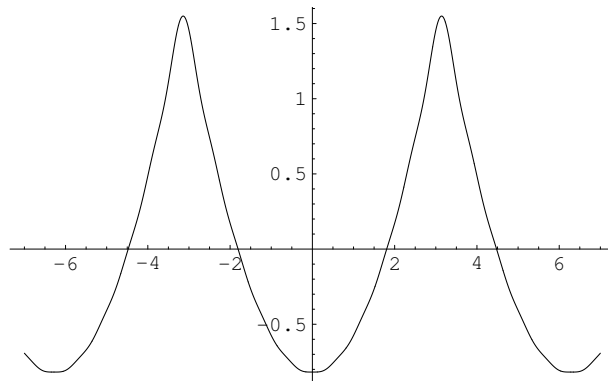


Figura 5.18: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

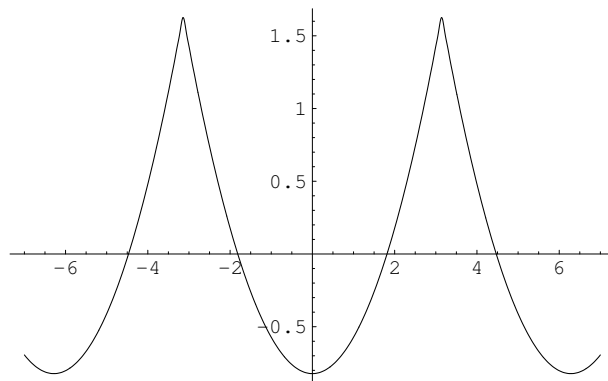


Figura 5.19: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

5.6 Serie di Fourier per funzioni a energia finita

5.6.1 Definizione. Poniamo:

$$L_T^2(\mathbb{R}^M) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M : f \text{ è } T\text{-periodica, misurabile e } \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

Analogamente consideriamo $L_T^2(\mathbb{C})$. Se $f \in L_T^2$ chiamiamo *norma* L^2 :

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Chiamiamo anche *energia* di f il quadrato della norma: $\|f\|_2^2$. Date $f, g \in L_T^2(\mathbb{C})$ chiamiamo *prodotto scalare* L^2 l'integrale:

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Il fatto che $\langle f, g \rangle_2$ abbia senso per ogni $f, g \in L_T^2(\mathbb{C})$ segue dalla disuguaglianza:

$$|f(t) \overline{g(t)}| \leq \frac{1}{2} (|f(t)|^2 + |g(t)|^2).$$

Diremo che una successione di funzioni (f_n) in L_T^2 tende a f in L_T^2 se $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

5.6.2 Osservazione. Si verifica abbastanza facilmente che $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ è una funzione bilineare non negativa e che $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle_2$. L'unico problema per considerare $\|\cdot\|_2$ una norma è che $\|f\|_2 = 0$ non implica f identicamente nulla ma solo $f(t) = 0$ per quasi ogni t . Per ovviare a questo inconveniente si considera una "relazione di equivalenza \simeq " tra le funzioni per cui $f \simeq g$ se e solo se $f(t) = g(t)$ per quasi ogni t e si considerano equali le funzioni equivalenti. Continuiamo a chiamare L_T^2 lo spazio delle funzioni a energia finita con questa relazione di equivalenza (per cui ad esempio la funzione identicamente nulla e la funzione nulla sugli irrazionali e $+\infty$ sui razionali sono lo stesso oggetto). In questo spazio la norma L^2 è effettivamente una norma che misura la distanza tra due funzioni f e g guardando l'integrale del quadrato delle differenze $|f - g|$.

5.6.3 Osservazione. È facile vedere che $L_T^2 \subset L_T^1$.

5.6.4 Osservazione. Le funzioni \mathbf{e}_n introdotte all'inizio sono tra loro *ortogonali*, cioè $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle_2 = 0$. Inoltre $\|\mathbf{e}_n\|_2 = \sqrt{T}$.

5.6.5 Teorema. Lo spazio $L_T^2(\mathbb{C})$ dotato della norma $\|\cdot\|_2$ è completo.

5.6.6 Definizione. Per n in \mathbb{N} poniamo

$$E_n := \left\{ \sum_{k=-n}^n \lambda_k \mathbf{e}_k : \lambda_k \in \mathbb{C}, k = -n, \dots, n \right\};$$

E_n è il sottospazio di dimensione finita (pari a $2n + 1$) generato da $\mathbf{e}_{-n}, \dots, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$. Inoltre data una funzione f in $L_T^2(\mathbb{C})$ poniamo:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k(t)$$

dove c_n sono i coefficienti di Fourier complessi di f . Chiameremo f_n *l'approssimante di Fourier* di f di ordine n .

5.6.7 Proposizione. *La funzione f_n sopra introdotta ha le seguenti proprietà:*

- $f_n \in E_n$;
- per ogni g in E_n si ha $\langle f - f_n, g \rangle = 0$;
- per ogni g in E_n si ha:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \quad (5.5)$$

e quindi f_n è l'elemento in E_n che ha minima distanza (L^2) da f ;

- si ha inoltre

$$\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$$

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Per dimostrare la seconda basta notare che per ogni j tra $-n$ ed n :

$$\langle f_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n \langle c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = c_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dunque $\langle f - f_n, \mathbf{e}_j \rangle = 0$; ne segue che se $g = \sum_{j=-n}^n \lambda_j \mathbf{e}_j$ si ha $\langle f - f_n, g \rangle = 0$.

Dimostriamo (5.5); presa una g in E_n :

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2^2 = \langle (f - f_n) + (f_n - g), (f - f_n) + (f_n - g) \rangle = \\ &= \|f - f_n\|_2^2 + 2\Re \langle f - f_n, f_n - g \rangle + \|f_n - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \end{aligned}$$

perché $(f_n - g) \in E_n$ e quindi è ortogonale a $(f - f_n)$. Ne segue che $\|f - g\|_2^2 \geq \|f - f_n\|_2^2$ e l'eguaglianza vale esattamente quando $g = f_n$; dunque f_n è il punto in E_n di minima distanza da f . Per dimostrare l'ultima relazione basta prendere $g = 0$ in (5.5). \square

5.6.8 Osservazione. Si ha $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$; inoltre

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \Leftrightarrow \|f\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Dimostrazione. Notiamo che, per la 5.4.3 si ha

$$\|f_n\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{k,h=-n}^n c_k \bar{c}_h \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h \rangle = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 T$$

Quindi dall'ultima delle 5.6.7 si ricava

$$T \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2$$

da cui seguono entrambe le tesi. \square

Vediamo ora che le f_n “a qualcosa convergono”.

5.6.9 Proposizione. Sia assegnata una successione $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi tali che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Allora esiste una funzione g di $L_T^2(\mathbb{C})$ tale che $g_n := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre:

$$c_k = \frac{1}{T} \langle g, \mathbf{e}_k \rangle \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}, \quad \|g\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (g_n) è una successione di Cauchy in $L_T^2(\mathbb{C})$. Siano $n > m$ interi, allora, per l'ortonormalità degli \mathbf{e}_j :

$$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k - \sum_{k=-m}^m c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=-n}^{-m-1} c_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=-m-1}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{-m-1} |c_k|^2 + \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

Dire che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ significa che $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_{-n}|^2 < +\infty$ e dunque, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un \bar{n} intero tale che, se $n > m \geq \bar{n}$:

$$\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \sum_{k=-m-1}^{-n} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

e quindi per $n > m \geq \bar{n}$:

$$\|g_n - g_m\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon$$

Quindi (g_n) è di Cauchy e per la completezza di $L^2([0, T])$ essa ammette limite g in $L_T^2(\mathbb{C})$. A questo punto abbiamo trovato che $g_n \xrightarrow{L^2} g$. Preso un j intero si ha

$$\langle g_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j \quad \forall n \geq j$$

da cui al limite $\langle g, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j$. Per l'altra proprietà si ragiona allo stesso modo. \square

5.6.10 Osservazione. D'ora in poi scriveremo $g = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ per indicare g è somma della serie in $L_T^2(\mathbb{C})$ cioè che $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$, per $n \rightarrow +\infty$. In maniera analoga scriveremo

$g = \sum_{unif. n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ per indicare g è somma della serie uniformemente su un qualunque intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} , cioè che $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{unif} g$ (su $[a, b]$), per $n \rightarrow +\infty$.

5.6.11 Teorema (completezza dei polinomi trigonometrici). Se f è in $L_T^2(\mathbb{C})$ allora la successione f_n converge in L^2 a f :

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k, \quad \text{dove } c_n = \frac{1}{T} \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau.$$

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Dimostrazione. Per la proposizione 5.6.9 esiste g tale che $f_n \xrightarrow{L^2} g$ e tale g ha la proprietà $\langle g, \mathbf{e}_k \rangle = Tc_k$. Dato che vale anche $\langle f, \mathbf{e}_k \rangle = Tc_k$ (per definizione di c_k) si ottiene $\langle f - g, \mathbf{e}_k \rangle = 0$ per qualunque k intero. Ne segue che $f - g$ è ortogonale a tutti gli E_n . Prendiamo ora una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^1 e siano ϕ_n le approssimanti di Fourier di ϕ . Per il teorema (5.4.10) si ha che $\phi_n \rightarrow \phi$ puntualmente e inoltre, per un'opportuna costante C , si ha $|\phi_n(t)| \leq C$ per ogni m e ogni t . Allora $(f - g)\bar{\phi}_n \rightarrow (f - g)\bar{\phi}$ e $|(f - g)\bar{\phi}_n| \leq C|f - g| \in L^1$. Applicando il teorema di Lebesgue si ottiene allora:

$$0 = \langle f - g, \phi_n \rangle = \int_0^T (f(t) - g(t))\overline{\phi_n(t)} dt \rightarrow \int_0^T (f(t) - g(t))\overline{\phi(t)} dt$$

Ne segue in particolare

$$\int_0^T (f(t) - g(t))\overline{\phi(t)} dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[).$$

Per la (11) della proposizione (4.1.28) si ha $f = g$ quasi ovunque su $]0, T[$ da cui $f = g$ in $L_T^2(\mathbb{C})$ e cioè la tesi. \square

Il teorema sopra dice che l'insieme delle funzioni \mathbf{e}_k con k in \mathbb{Z} è una "base ortogonale" per $L_T^2(\mathbb{C})$ che genera ogni elemento di $L_T^2(\mathbb{C})$. I numeri c_k si possono quindi pensare come le "componenti" di f rispetto a tale base.

C'è quindi una perfetta corrispondenza tra le funzioni f di L^2 (funzioni di energia finita) e le successioni $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ con $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Vediamo il corrispondente reale del risultato sopra.

5.6.12 Proposizione. *Sia f una funzione in $L_T^2(\mathbb{R})$ e siano $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ definiti in (5.4). Poniamo*

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega_0 kt). \quad (5.6)$$

Allora f_n converge a f in $L_T^2(\mathbb{R})$ (in energia) e si ha

$$\|f\|_2^2 = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2. \quad (5.7)$$

Viceversa supponiamo che $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ siano due successioni di numeri reali tali che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < +\infty.$$

Allora, definendo f_n come in (5.6), esiste una funzione f in $L_T^2(\mathbb{R})$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Inoltre sviluppando tale f in serie di Fourier si ha che i coefficienti dati da (5.4) coincidono con gli $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ di partenza e vale (5.7).

5.7 Serie di Fourier in soli seni

In questo paragrafo fissiamo $L > 0$ e poniamo $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{L} \left(\text{non } \frac{2\pi}{L} \right)$. Poniamo anche:

$$L^1(0, L) := \left\{ f : [0, L] \rightarrow [-\infty, \infty], \text{ misurabile, } \int_0^L |f(x)| dx < +\infty \right\},$$

$$L^2(0, L) := \left\{ f : [0, L] \rightarrow [-\infty, \infty], \text{ misurabile, } \int_0^L |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

A differenza dei paragrafi precedenti le f saranno definite solo su $[0, L]$. Inoltre trattiamo solo funzioni a valori reali.

5.7.1 Definizione. Chiameremo *serie trigonometriche di soli seni – di soli coseni* delle serie del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n,$$

dove $(u_n)_{n \geq 1}$ e $(v_n)_{n \geq 0}$ sono successioni in \mathbb{R} e dove $\mathbf{s}_n, \mathbf{c}_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ sono definite da:

$$\mathbf{s}_n(x) := \sin(n\tilde{\omega}x), \quad \mathbf{c}_n(x) := \cos(n\tilde{\omega}x)$$

dunque stiamo considerando $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\tilde{\omega}x)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\tilde{\omega}x)$.

È chiaro che le serie di funzioni scritte sopra si possono estendere a tutto \mathbb{R} come funzioni periodiche di periodo $L = 2L$ (rispettivamente dispari e pari). Si tratta dunque di particolari serie trigonometriche (di periodo L) in cui mancano gli a_n o i b_n . Ricaviamo dunque da quanto già detto i seguenti risultati.

5.7.2 Proposizione. Sia $(u_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ converge uniformemente a una f continua tale che $f(0) = f(L) = 0$.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$, allora f è \mathcal{C}^1 e si ha $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n \mathbf{c}_n$. Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n \mathbf{c}_n$ converge uniformemente a f' .
- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$, allora f è derivabile h volte e le derivate di ordine minore o eguale ad h sono continue. Di tali derivate quelle con h pari (compreso $h = 0$) sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine $f_n^{(j)} \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(h)}$ (che è una serie di seni o di coseni a seconda che h sia pari o dispari).
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ converge nel senso di L^2 (in energia) a una funzione $f \in L^2(0, L)$ e valgono

$$u_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\tilde{\omega}nx) dx \quad \text{per } n \geq 1, \quad (5.8)$$

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2. \quad (5.9)$$

5.7.3 Proposizione. Sia $(v_n)_{n \geq 0}$ una successione di numeri reali.

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ converge uniformemente a una f continua.
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} n|v_n| < +\infty$, allora f è \mathcal{C}^1 , $f' = -\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}v_n \mathbf{s}_n$ e $f'(0) = f'(L) = 0$. Inoltre la serie $-\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}v_n \mathbf{s}_n$ converge uniformemente a f' .

- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |v_n| < +\infty$, allora f è derivabile h volte e le derivate di ordine minore o eguale ad h sono continue. Di tali derivate quelle con h dispari sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine $f_n^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(h)}$ (che è una serie di coseni o di seni a seconda che h sia pari o dispari).
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ converge nel senso di L^2 (in energia) a una funzione $f \in L^2(0, L)$ e valgono

$$v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad v_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\tilde{\omega} n x) dx \quad \text{per } n \geq 1, \quad (5.10)$$

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \frac{v_0^2}{L} + \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2. \quad (5.11)$$

5.7.4 Teorema. Sia f una funzione in $L^2([0, L])$ a valori reali. Siano u_k definiti come in (5.8). Allora

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$$

(cioè, come al solito, $\sum_{k=1}^n u_k \mathbf{s}_k \xrightarrow{L^2} f$ per $n \rightarrow \infty$) e vale (5.9).

Viceversa se $(u_n)_{n \geq 1}$ è una successione di numeri reali tali che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, allora esiste un' unica f in $L^2([0, L])$ tale che $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ e vale la relazione (5.8).

Dimostrazione. Estendiamo f a $[-L, L]$ in modo che sia dispari, ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } t \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{se } t \in [-L, 0] \end{cases}$$

Per i risultati del paragrafo precedente

$$\tilde{f}(x) \underset{L_2}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cos(\tilde{\omega} k x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\tilde{\omega} k x)$$

ma essendo \tilde{f} dispari tutti gli a_k sono eguali a zero, mentre

$$b_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin(\tilde{\omega} k x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin(\tilde{\omega} k x) dx = u_k$$

Allora, per quanto detto nel paragrafo precedente, $\tilde{f} \underset{L_2}{=} \sum_{k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$ in $[-L, L]$. In particolare, restringendo tutto a $[0, L]$ si ha che $f \underset{L_2}{=} \sum_{k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$ in $[0, L]$. Inoltre

$$L \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \frac{2L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \int_{-L}^L \tilde{f}^2(x) dx = 2 \int_0^L f^2(x) dx$$

da cui la formula con l'energia per gli u_k . Per il viceversa basta applicare il viceversa di 5.6.12 sull'intervallo $[-L, L]$ e restringersi a $[0, L]$. \square

Nello stesso modo si può sviluppare rispetto ai coseni. Per $t \in [0, L]$ indichiamo con $\mathbf{c}_k(x) := \cos(\tilde{\omega}kx)$ (notiamo che $\mathbf{c}'_k(0) = \mathbf{c}'_k(L) = 0$); allora vale anche il teorema seguente.

5.7.5 Teorema. *Sia f una funzione in $L^2([0, L])$ a valori reali. Siano v_k definiti come in (5.10). Allora*

$$f \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n.$$

Inoltre vale (5.11).

$$\frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 + Lv_0^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^L f(x)^2 dx$$

Viceversa se $(v_n)_{n \geq 1}$ è una successione in \mathbb{R} con $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$ allora esiste una funzione in $L^2([0, L])$ tale che $f \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ e vale la relazione (5.10).

Dimostrazione. Basta prolungare f a \tilde{f} definita su $[-L, L]$ in modo che \tilde{f} sia pari e imitare la dimostrazione precedente. \square

5.8 Equazione del calore su un intervallo

Vediamo ora alcuni esempi in cui le tecniche introdotte sono utili per risolvere dei problemi alle derivate parziali. Cominciamo con l'*equazione del calore*.

Sia $L > 0$ fissata, $c > 0$ e sia anche assegnata una $f(t, x)$. Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, x \in [0, L]. \quad (5.12)$$

L'incognita u rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante t nel punto x di una sbarra (omogenea) di lunghezza L ; la funzione f introduce una eventuale sorgente esterna di calore (variabile nel tempo e nello spazio). Come è ragionevole per motivi fisici, e come si verificherà matematicamente, per risolvere l'equazione sarà necessario:

- indicare la distribuzione u_0 della temperatura ad un istante iniziale (che per semplicità sarà $t = 0$);
- descrivere gli scambi di calore che avvengono all'estremità della sbarra, indicando delle opportune *condizioni al bordo*.

Nel seguito normalizzeremo ad uno il coefficiente c (legato alle proprietà del materiale di cui la fatta la sbarra). Come vedremo l'equazione si risolverà *per tempi positivi*.

Cominciamo con delle condizioni al bordo di tipo periodico.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t, x) \text{ è } L\text{-periodica in } x & \text{per ogni } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

In questo caso conviene pensare la funzione u come una funzione da $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ in \mathbb{R} (cioè definita per tutte le $t \geq 0$ e tutte le x) ed L -periodica in x . Allora l'equazione rappresenta il caso di una sbarra con gli estremi saldati tra loro (questo spiega la condizione di periodicità), cioè in un anello. La funzione u_0 rappresenta la distribuzione iniziale della

temperatura – anch'essa viene presa come definita per ogni x reale ed L -periodica in x così come $f(x, t)$ che è la fonte di riscaldamento (o raffreddamento) proveniente dall'esterno.

Consideriamo il caso $f \equiv 0$ (senza sorgenti esterne) e supponiamo che $u_0 \in L^2_L$ (quindi ammettiamo che la distribuzione iniziale possa essere abbastanza "irregolare"). Cerchiamo la soluzione come sviluppo t per t dalla sua serie di Fourier in x (questo è consistente con il fatto che cerchiamo soluzioni periodiche in x), cioè cerchiamo u della forma:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(t) e^{i\omega_0 k x}, \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{2\pi}{L}$$

Supponendo di poter derivare per serie si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k(t) e^{i\omega_0 k x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(t) (-\omega_0^2 k^2) e^{i\omega_0 k x}$$

e quindi scrivendo l'equazione componente per componente si trova

$$c'_k(t) = -\omega_0^2 k^2 c_k(t) \Leftrightarrow c_k(t) = c_k(0) e^{-\omega_0^2 k^2 t} = c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t},$$

dove c_k^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0 : $u_0(x) = \sum_{L^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 e^{i\omega_0 k x}$, cioè

$$c_k^0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) e^{-i\omega_0 k \xi} d\xi.$$

Si trova quindi:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x}. \quad (5.14)$$

Questi calcoli dicono che, se si vuole trovare u col metodo sopra la u è univocamente determinata dalla formula (5.14). Vediamo ora che la u definita da tale formula risolve effettivamente il problema (in un qualche senso).

1. Per ogni $t \geq 0$ la formula (5.14) definisce una funzione in $L^2_{per}(T)$. Infatti

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t}|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0|^2 = \frac{1}{L} \|u_0\|_2^2 < +\infty$$

Dato $t \geq 0$ indicheremo con u_t la funzione $x \mapsto u(t, x)$ (quella che abbiamo appena dimostrato essere in L^2).

2. Sia $t_0 > 0$ e poniamo $\Omega_{t_0} := [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Allora la funzione u è infinitamente derivabile nelle due variabili in ogni punto di Ω_{t_0} ed è L -periodica in x . Inoltre si può derivare per serie e quindi, rifacendo all'indietro i calcoli di prima, si ottiene che la u verifica l'equazione in ogni $t > 0$ e in ogni x .

Per far vedere questo basta far vedere che la serie delle derivate è totalmente convergente su Ω_{t_0} ; infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \frac{\partial^{h+m}}{\partial t^h \partial x^m} c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x} \right\|_{\infty} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| c_k^0 (-\omega_0^2 k^2)^h e^{-\omega_0^2 k^2 t} (-i\omega_0 k)^m e^{i\omega_0 k x} \right\|_{\infty} = \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0| \omega_0^{2h+m} k^{2h+m} \left\| e^{-\omega_0^2 k^2 t + i\omega_0 k x} \right\|_{\infty} &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2h+m} e^{-\omega_0^2 k^2 t_0} < +\infty \end{aligned}$$

per un'opportuna costante C . Si è sfruttato il fatto che essendo c_k a quadrato sommabile c_k deve tendere a zero e quindi è limitata e inoltre il fatto che, nell'ultima

serie, l'esponenziale di $-\omega_0^2 t_0 k^2$ "vince" sulla potenza k^{2h+m} . Applicando i soliti criteri si deduce

$$\frac{\partial^{h+m}}{\partial t^h \partial x^m} u(t, x) \stackrel{unif.}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\partial^{h+m}}{\partial t^h \partial x^m} c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x}$$

da cui seguono tutte le affermazioni fatte.

Notiamo in particolare che, anche se il dato iniziale è solo L^2 la soluzione diventa immediatamente regolarissima a qualunque tempo positivo.

3. Per t tendente a zero si ha $u_t \xrightarrow{L^2} u_0$, cioè $\|u_t - u_0\|_2 \rightarrow 0$. Quindi $u(x, t)$ tende al suo valore iniziale solo nel senso di L^2 . Questo è comprensibile poichè il dato iniziale u_0 è solo L^2 . Per vedere ciò osserviamo che, per l'uguaglianza di Parseval:

$$\|u_t - u_0\|_2^2 = L \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0 (e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1)|^2 = L \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0|^2 (e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1)^2$$

e che per ogni k intero relativo

$$\lim_{t \rightarrow 0} |c_k^0|^2 (e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1)^2 = 0, \quad |c_k^0 (e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1)|^2 \leq |c_k^0|^2.$$

Dato che $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0|^2 < +\infty$ possiamo applicare il teorema di Lebesgue nella versione per le serie (al posto di $m \rightarrow \infty$ abbiamo qui $t \rightarrow 0$ ma la situazione è la stessa) ottenendo $\lim_{t \rightarrow 0} \|u_t - u_0\|_2^2 = 0$.

4. Se il dato iniziale u_0 verifica la condizione $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$, allora, per $t \rightarrow 0^+$, si ha $u_t \xrightarrow{unif.} u$. In particolare

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = u(0, x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

e dunque il dato iniziale viene assunto in senso tradizionale. Infatti

$$\|u_t - u_0\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \max_{x \in \mathbb{R}} |c_k^0 (e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1) e^{i\omega_0 k x}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^0| |e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1|$$

e per ogni k si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} |c_k^0| |e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1| = 0, \quad |c_k^0| |e^{-\omega_0^2 k^2 t} - 1| \leq |c_k^0|.$$

da cui, essendo $\sum_k |c_k^0| < +\infty$, la tesi segue ragionando come nel punto precedente.

5. Per t tendente all'infinito u_t converge uniformemente alla costante c_0^0 . Infatti se $t_0 > 0$ e se C è tale che $|c_k^0| \leq C$, si ha:

$$\begin{aligned} \|u_t - c_0^0\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x} \right\|_{\infty} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \left\| c_k^0 e^{-\omega_0^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x} \right\|_{\infty} \leq \\ &C \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} e^{-\omega_0^2 k^2 t} = C \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} e^{-\omega_0^2 k^2 (t-t_0)} e^{-\omega_0^2 k^2 t_0} \leq \\ &C e^{-\omega_0^2 (t-t_0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} e^{-\omega_0^2 k^2 t_0} \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

In particolare

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = c_0^0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi la temperatura tende a disporsi in maniera uniforme nell'anello.

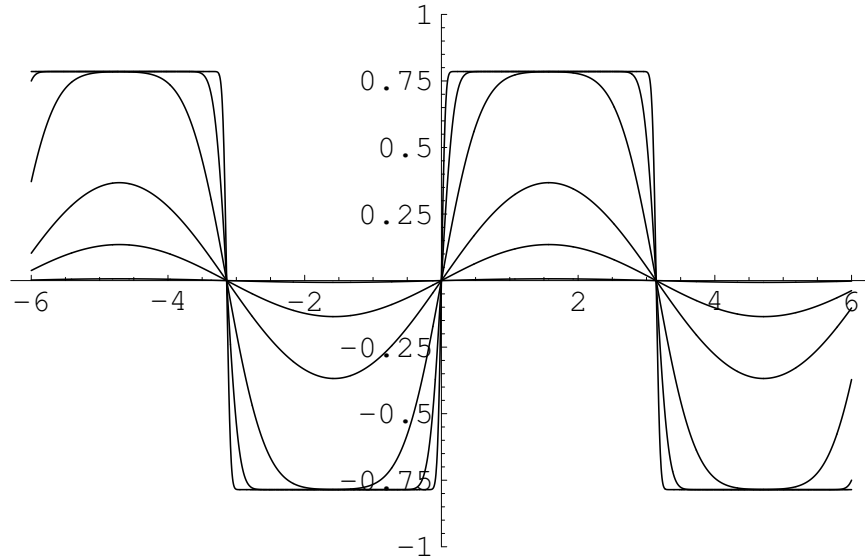


Figura 5.20: Soluzioni dell'equazione del calore periodica a partire dall'onda quadra

Nella figura 5.20 si vede l'evoluzione della temperatura in alcuni istanti, a partire da una condizione iniziale di onda quadra, cioè una situazione in cui metà dell'anello è a -1 e l'altra metà è a $+1$.

Facciamo qualche altra considerazione su quanto abbiamo trovato; vediamo innanzi tutto come si può scrivere in modo più esplicito la soluzione u in termini della configurazione iniziale u_0 . Ricordiamo che i coefficienti di Fourier relativi a u_0 sono dati da $c_k^0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) e^{-i\omega_0 k \xi} d\xi$ e allora da (5.14) si ha

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) e^{-i\omega_0 k \xi} d\xi \right) e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x} = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k(x-\xi)} \right) d\xi$$

per ogni x e per ogni t . Ma, se $t > 0$, possiamo scambiare integrale e serie perché:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \int_0^L |u_0(\xi) e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k(x-\xi)}| d\xi \leq \left(\frac{1}{L} \int_0^L |u_0(\xi)| d\xi \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega^2 k^2 t} < +\infty$$

e quindi, fissati x e $t > 0$, la serie di funzioni nella variabile ξ converge in $L^1([0, L])$ da cui l'integrale della serie è eguale alla serie degli integrali. Allora, se $x \in [0, L]$ e $t > 0$:

$$u(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k(x-\xi)} \right) d\xi = \int_0^L u_0(\xi) K_L(t, x - \xi) d\xi \quad (5.15)$$

dove "il nucleo" $K_L : \mathbb{R} \times [0, L]$ è definito da:

$$K_L(t, x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega^2 k^2 t} e^{i\omega_0 k x}. \quad (5.16)$$

Consideriamo ora brevemente il caso con f diverso da zero; supponiamo in questo caso che per ogni t si possa scrivere $f(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(t) e^{i\omega_0 k x}$. Cercando come prima la soluzione come $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(t) e^{i\omega_0 k x}$ si trova

$$c'_k(t) = -\omega_0^2 k^2 c_k(t) + f_k(t) \Leftrightarrow c_k(t) = e^{-\omega_0^2 k^2 t} \left(c_k^0 + \int_0^t e^{\omega_0^2 k^2 \tau} f_k(\tau) d\tau \right)$$

e quindi $u(t, x) = u_0(t, x) + \bar{u}(t, x)$ dove u_0 è la soluzione dell'omogenea provata precedentemente, mentre \bar{u} è data da

$$\bar{u}(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega_0^2 k^2 t} \int_0^t e^{\omega_0^2 k^2 \tau} f_k(\tau) d\tau e^{i\omega_0 k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^t f_k(\tau) e^{-\omega_0^2 k^2 (t-\tau)} e^{i\omega_0 k x} d\tau.$$

È chiaro che \bar{u} è la soluzione dell'equazione completa con dato iniziale $u_0 = 0$. Si possono ripetere per \bar{u} i ragionamenti fatti per la soluzione dell'omogenea ritrovando risultati analoghi (in cui bisognerà però tenere conto della regolarità di f). In particolare, ricordando che $f_k(t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(t, \xi) e^{-i\omega_0 \xi} d\xi$ si ha:

$$\bar{u}(t, x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^t \int_0^L f(\tau, \xi) e^{-\omega_0^2 k^2 (t-\tau)} e^{i\omega_0 k (x-\xi)} d\tau d\xi$$

e scambiando serie con integrali (si può, si può...) per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x) &= \int_0^t \int_0^L f(\tau, \xi) \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\omega_0^2 k^2 (t-\tau)} e^{i\omega_0 k (x-\xi)} \right) d\tau d\xi = \\ & \int_0^t \int_0^L f(\tau, \xi) K_L(t - \tau, x - \xi) d\tau d\xi \end{aligned}$$

e quindi anche qui il nucleo K_L permette di rappresentare la soluzione.

5.8.1 Osservazione. In modo analogo si può trattare il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(t, x), & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

utilizzando gli sviluppi rispetto ai soli seni. Il problema sopra modella la diffusione del calore in una sbarra tenuta (forzatamente) a temperatura zero agli estremi. Non è difficile convincersi che l'esempio precedente (rappresentato nella figura 5.20) rappresenta anche l'evoluzione della temperatura nella sbarra tenuta a zero agli estremi con distribuzione iniziale della temperatura pari a uno su mezza sbarra e a meno uno sull'altra metà e senza sorgenti esterne di calore (pur di restringersi a $[0, L]$ nelle x).

Un altro problema che si può studiare è quello in cui la sbarra sia isolata dall'esterno, cioè non ci sia passaggio di calore attraverso gli estremi. Si può vedere che tale problema corrisponde a una condizione di derivata rispetto a x nulla agli estremi:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(t, x), & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, L) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Quest'ultimo problema si può trattare sviluppando considerando l'incognita u come serie di Fourier in x di soli coseni e ripetendo i ragionamenti fatti prima.

Capitolo 6

Campi vettoriali

6.1 Campi conservativi

Ricordiamo la definizione già vista.

6.1.1 Definizione. Chiamiamo campo vettoriale una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ dove Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N . Useremo la notazione \vec{f} in luogo di f per rimarcare il fatto che, se $\mathbf{x} \in \Omega$ il valore $\vec{f}(\mathbf{x})$ è un vettore in \mathbb{R}^N . È chiaro cosa significa dire che \vec{f} è continuo, differenziabile, di classe \mathcal{C}^h (per $h \geq 0$ intero), ecc.

Se \vec{f} è un campo, indichiamo con f_1, \dots, f_N le sue componenti, che sono dunque N funzioni da Ω in \mathbb{R} .

In tutto quanto segue $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sarà un aperto e i campi saranno sempre supposti continui (ed eventualmente più regolari).

6.1.2 Definizione. Diciamo che $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è *conservativo* (in Ω) se esiste una funzione (scalare) $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tale che $\vec{f} = \nabla F$. In altri termini deve essere:

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Una tale F si dice *potenziale* per \vec{f} (in Ω).

6.1.3 Notazione. Se $N = 3$ indichiamo con $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ i versori della base canonica (altrove denotati con $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$). In questo modo un campo di vettori tridimensionale si può scrivere $\vec{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\vec{\mathbf{i}} + f_2(\mathbf{x})\vec{\mathbf{j}} + f_3(\mathbf{x})\vec{\mathbf{k}}$ (lo stesso si può fare con un campo bidimensionale, mettendo $f_3 = 0$).

6.1.4 Esempio. Il campo $\vec{f}(x, y) = (x + y)\vec{\mathbf{i}} + (x - y)\vec{\mathbf{j}}$ è conservativo. Per vederlo basta verificare che $F(x, y) := \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x - y)^2$ è un potenziale.

Il campo $\vec{f}(x, y) = (x + y)\vec{\mathbf{i}} - (x - y)\vec{\mathbf{j}}$ non è conservativo. Se esistesse un potenziale F avrei:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = x + y \Rightarrow F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + c(y)$$

dove c dipende solo da y . Derivando rispetto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = x + c'(y)$$

Che dovrebbe risultare eguale a $-x + y$. Dunque:

$$-2x = y + c'(y) \quad \forall x, \forall y.$$

Questo è chiaramente impossibile.

6.1.5 Osservazione. È semplice vedere che il potenziale F se esiste non è unico in quanto $F + c$ è ancora un potenziale se c è una costante. Se Ω è connesso vale anche il viceversa:

$$\nabla F_1 = \nabla F_2 = \vec{f} \Rightarrow F_1 = F_2 + \text{costante.}$$

dato che in questo caso $\nabla(F_1 - F_2) = 0$ e si può applicare il teorema (3.1.26).

6.1.6 Teorema. Sia Ω un aperto connesso di \mathbb{R}^N e sia $\vec{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuo in $\bar{\Omega}$. Sono equivalenti i tre fatti seguenti.

(a) \vec{f} è un campo conservativo.

(b) Date due curve \mathcal{C}^1 a tratti $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ aventi gli stessi estremi, l'integrale di \vec{f} sulle due curve è lo stesso:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad \gamma_1(b) = \gamma_2(b) \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

(c) Data una curva chiusa in $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, \mathcal{C}^1 a tratti, il lavoro di f su γ è nullo:

$$\gamma(a) = \gamma(b) \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Inoltre se il campo è conservativo ed F è un potenziale si ha:

(d) dati $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ e una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$, \mathcal{C}^1 a tratti con $\gamma(a) = \mathbf{x}_0$, $\gamma(b) = \mathbf{x}$, allora:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}. \quad (6.1)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima di tutto la (d). Supponiamo dunque che $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sia tale che $\nabla F(\mathbf{x}) = \vec{f}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$. Siano $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ di classe \mathcal{C}^1 che congiunge \mathbf{x}_0 a $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = c \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right) dt = [F(\gamma(t))]_{t=a}^{t=b} \end{aligned}$$

(il primo passaggio è la definizione di integrale curvilineo, il secondo segue dal fatto che F è un potenziale per \vec{f} e il terzo dalla formula di derivazione della funzione composta). Dunque abbiamo dimostrato (d) in Ω . Usando la continuità si passa facilmente a $\bar{\Omega}$.

Mostriamo che (a) \Rightarrow (c). Dato che vale (a) esiste un potenziale F . Usando la formula (6.1) si deduce immediatamente (c).

Mostriamo che (c) \Rightarrow (b). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ chiusa, cioè $\gamma(a) = \gamma(b) =: \bar{\mathbf{x}}$. Consideriamo la curva costante $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$, definita da $\bar{\gamma}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ per ogni $t \in [a, b]$. Chiaramente γ e $\bar{\gamma}$ hanno gli stessi estremi dunque, per (c) danno luogo allo stesso integrale di \vec{f} . Ma è facile vedere che l'integrale su $\bar{\gamma}$ vale zero (perché $\bar{\gamma}' \equiv 0$). Dunque la (b) è dimostrata.

Mostriamo che (b) \Rightarrow (c). Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ due curve aventi gli stessi estremi, cioè $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Ricordiamo che $\tilde{\gamma}_2$ è la curva γ_2 percorsa nel senso contrario a γ_2 . Allora γ_1 e $\tilde{\gamma}_2$ sono consecutive e quindi ha senso considerare

$\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2$ ed è chiaro che γ è una curva chiusa (i suoi estremi coincidono con $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$). Per (b) si ha:

$$0 = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Abbiamo dunque dimostrato la (c).

Mostriamo che (c) \Rightarrow (a). Fissiamo un punto \mathbf{x}_0 in Ω . Dato che vale (c) possiamo definire $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

dove γ è una qualunque curva \mathcal{C}^1 a tratti che abbia \mathbf{x}_0 come primo estremo e \mathbf{x} come secondo – naturalmente questa è una buona definizione di F dato che vale (c). Se verifichiamo che F è un potenziale, allora la (a) sarà dimostrata. Sia dunque $\mathbf{x} \in \Omega$ e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva \mathcal{C}^1 a tratti che congiunga \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} . Fissiamo una direzione i tra 1 ed N . Possiamo costruire una curva γ_t che congiunga \mathbf{x}_0 a $\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{e}}_i$ ponendo $\gamma_t := \gamma \vee \hat{\gamma}_{i,t}$, dove $\hat{\gamma}_{i,t}(s) := \mathbf{x} + s\hat{\mathbf{e}}_i$, per $s \in [0, t]$ (che percorre il segmento tra \mathbf{x} e $\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{e}}_i$ – questa curva è in Ω se t è abbastanza piccolo). Allora:

$$\frac{F(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{e}}_i) - F(\mathbf{x})}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_t} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right) = \frac{1}{t} \int_{\hat{\gamma}_t} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{t} \int_0^t \vec{f}(\mathbf{x} + s\hat{\mathbf{e}}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i ds.$$

Se facciamo tendere t a zero, usando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{e}}_i) - F(\mathbf{x})}{t} = \vec{f}(\mathbf{x} + s\hat{\mathbf{e}}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \Big|_{s=0} = \vec{f}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = f_i(\mathbf{x}).$$

Dato che questo è vero per ogni $i = 1, \dots, N$ si ha $\nabla F(\mathbf{x}) = \vec{f}(\mathbf{x})$, cioè la tesi. \square

6.2 Campi irrotazionali

6.2.1 Definizione. Se $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ introduciamo la *divergenza* di f :

$$\operatorname{div}(\vec{f}) \left(= \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \right) := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}.$$

Se $N = 3$ (o anche $N = 2$ considerando $R^2 \subset \mathbb{R}^3$) consideriamo il *rotore* di \vec{f} :

$$\operatorname{rot}(\vec{f}) \left(= \vec{\nabla} \otimes \vec{f} \right) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{j}} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{k}}.$$

Formalmente di può vedere il rotore come:

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \det \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \vec{\mathbf{j}} & \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \vec{\mathbf{k}} & \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{pmatrix}.$$

6.2.2 Definizione. Dato un campo $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe \mathcal{C}^1 diremo che \vec{f} è *irrotazionale* in Ω se per ogni \mathbf{x} in Ω si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{x}) \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Nel caso $N = 3$ il campo \vec{f} è irrotazionale se e solo se $\operatorname{rot}(\vec{f}) = \vec{\mathbf{0}}$.

6.2.3 Proposizione. Se \vec{f} è conservativo in Ω ed è di classe \mathcal{C}^1 , allora \vec{f} è irrotazionale in Ω .

Dimostrazione. Dato che \vec{f} è conservativo esiste un potenziale per \vec{f} e cioè una $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$, per $i = 1, \dots, N$. Dato che \vec{f} è \mathcal{C}^1 si ha che F è \mathcal{C}^2 e

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

dove la seconda eguaglianza è conseguenza del teorema di Schwartz. \square

Il viceversa della proposizione sopra non vale come mostra l'esempio

$$\vec{f}(x_1, x_2) := \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \vec{\mathbf{j}}.$$

Tale campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dato che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1, x_2) &= \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) - x_1 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

ma se consideriamo la curva $\gamma(t) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$, per $t \in [0, 2\pi]$ e per $\rho > 0$ fissato è chiaro che γ è una curva chiusa e che $\gamma'(t) = -\rho \sin(t) \vec{\mathbf{i}} + \rho \cos(t) \vec{\mathbf{j}}$ (γ descrive la circonferenza di raggio ρ percorsa una volta in senso antiorario). Allora:

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho \sin(t))(-\rho \sin(t)) + \rho \cos(t) \rho \cos(t)}{\rho^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} dt = 2\pi$$

e quindi \vec{f} non può essere conservativo.

6.2.4 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ due curve in Ω aventi gli stessi estremi: $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \mathbf{A}$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \mathbf{B}$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope a estremi fissi* in Ω se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ (detta *omotopia a estremi fissi* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= \mathbf{A}, H(b, s) = \mathbf{B} & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$), tutte con primo estremo in \mathbf{A} e secondo estremo in \mathbf{B} (vedi la figura 6.1).

6.2.5 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ due curve chiuse in Ω $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope come curve chiuse* in Ω se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ (detta *omotopia di curve chiuse* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= H(b, s) & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve chiuse in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$) (vedi la figura 6.2).

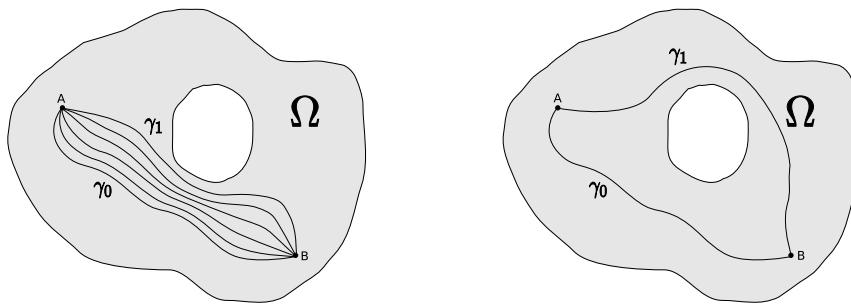


Figura 6.1: Curve omotope e non omotope a estremi fissi

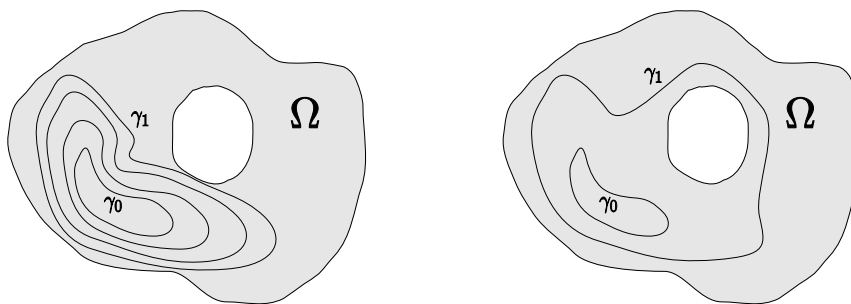


Figura 6.2: curve chiuse omotope e non omotope

6.2.6 Teorema. Sia $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo C^1 in Ω con \vec{f} irrotazionale.

1. Allora se due curve γ_0 e γ_1 in Ω aventi gli stessi estremi sono omotope in Ω (a estremi fissi) si ha che:

$$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

2. Analogamente se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse in Ω tra di loro omotope in Ω (come curve chiuse) si ha che:

$$\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione aggiungendo delle ipotesi di regolarità. Supporremo che l'omotopia H sia di classe \mathcal{C}^2 . Supporremo inoltre che le curve γ_s definite da $\gamma_s(t) := H(t, s)$ oltre ad essere chiuse abbiano la stessa derivata agli estremi: $\gamma'_s(a) = \gamma'_s(b)$ per ogni s tra 0 e 1 (dunque sono lisce anche nel “punto finale” in cui gli estremi si incollano). È chiaro che per $s = 0$ e $s = 1$ riotteniamo γ_0 e γ_1 . Per dimostrare la tesi proveremo che la funzione

$$\varphi(s) := \int_{\gamma_s} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

ha derivata nulla e quindi è costante. Si ha:

$$\varphi'(s) = \frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{ds} \int_a^b \vec{f}(\gamma_s(t)) \cdot \gamma'_s(t) dt = \frac{d}{ds} \int_a^b \vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) dt.$$

Notiamo che l'integrando verifica le ipotesi del Corollario (4.4.5) e dunque si può derivare sotto il segno di integrale ottenendo:

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left(\vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) \right) dt. = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\vec{f}(H(t, s)) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) + \vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t, s) \right) dt. = \\ &= \int_a^b \left(\left(J_{\vec{f}}(H(t, s)) \frac{\partial}{\partial s} H(t, s) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) + \vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t, s) \right) dt.\end{aligned}$$

Dato che \vec{f} è irrotazionale abbiamo che la matrice jacobiana di \vec{f} è simmetrica e dunque possiamo scambiare tra loro $\frac{\partial H(t, s)}{\partial s}$ e $\frac{\partial H(t, s)}{\partial t}$ ottenendo:

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int_a^b \left(\left(J_{\vec{f}}(H(t, s)) \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t, s) + \vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t, s) \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) \right) dt = \left[\vec{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) \right]_{t=a}^{t=b} = \\ &= \vec{f}(H(b, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(b, s) - \vec{f}(H(a, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(a, s) = \vec{f}(\gamma_s(b)) \cdot \gamma'_s(b) - \vec{f}(\gamma_s(a)) \cdot \gamma'_s(a)\end{aligned}$$

– abbiamo rifatto a rovescio i calcoli iniziali e usato il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Ma l'ultima espressione scritta fa zero per ipotesi fatte. Dunque $\varphi(s)$ è costante per $0 \leq s \leq 1$ da cui $\varphi(0) = \varphi(1)$ che è la tesi. \square

6.2.7 Definizione. Diciamo che Ω è *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa γ in $\bar{\Omega}$ è omotopa (tra le curve chiuse) ad una curva costante (è chiaro che $\gamma_0(t) = \text{costante}$ è una curva chiusa). Questa che si è definita è una proprietà di Ω che si può interpretare dicendo che Ω non ha buchi - vedi la figura 6.3.

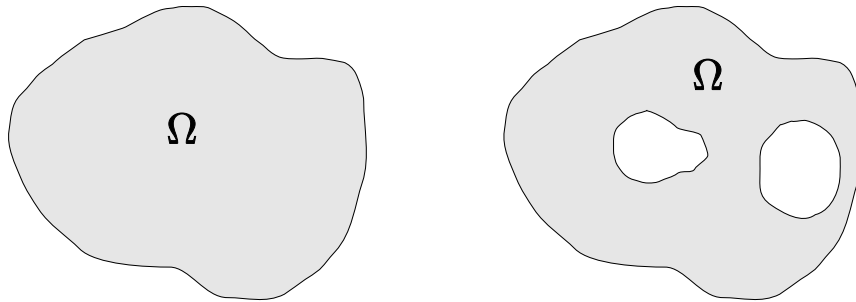


Figura 6.3: un aperto semplicemente connesso e uno non semplicemente connesso

Dato che è ovvio verificare che $\int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ se γ_0 è una curva costante si deduce subito il seguente risultato

6.2.8 Teorema.] Se Ω è semplicemente connesso allora ogni campo irrotazionale in Ω è conservativo in Ω .

6.2.9 Esempio. Supponiamo che Ω sia *stellato* rispetto a un suo punto, cioè che esista un \mathbf{x}_0 in Ω tale che per ogni altro punto \mathbf{x} di Ω il segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} sia completamente

contenuto in Ω (da \mathbf{x}_0 si “vedono” tutti i punti di Ω). Allora Ω è semplicemente connesso dato che presa una qualunque curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ si può definire

$$H(t, s) := s\gamma(t) + (1 - s)\mathbf{x}_0$$

che è un'omotopia tra γ e la curva costante $\gamma_0(t) = \mathbf{x}_0$.

In questo modo si può vedere che $\Omega = \mathbb{R}^N$ oppure $\Omega = B(\mathbf{x}_0, R)$ sono semplicemente connessi.

Viceversa l'esempio considerato in precedenza mostra che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso in quanto si è trovato un campo irrotazionale in \mathbb{R}^2 che non è conservativo.

Dimostrazione del teorema (6.2.8) nel caso di Ω stellato. Supponiamo che Ω sia stellato rispetto a un suo punto \mathbf{x}_0 . Per semplicità supponiamo che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{x} \in \Omega$ indichiamo con $s_{\mathbf{x}}$ il segmento tra $\mathbf{0}$ e \mathbf{x} , cioè la curva $s_{\mathbf{x}}(t) = t\mathbf{x}$, definita per $t \in [0, 1]$; si ha $s'_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$.

Sia \vec{f} irrotazionale su Ω e definiamo

$$F(\mathbf{x}) := \int_{s_{\mathbf{x}}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt.$$

Dico che l'integrando $h(t, \mathbf{x}) := \vec{f}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ verifica le ipotesi del teorema (4.4.3) per poter derivare sotto il segno di integrale. Infatti $h(t, \mathbf{x})$ e $\frac{\partial h}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = t \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \vec{f}(t\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ sono continue in (t, \mathbf{x}) e dunque, se $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e $R > 0$ è tale che $\overline{B(\mathbf{x}_0, R)} \subset \Omega$ si ha:

$$|h(t, \mathbf{x})| \leq C, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) \right| \leq C \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R)$$

per un'opportuna costante C (si usa Weierstrass); si noti che la costante C è una funzione integrabile su $[0, 1]$. Applicando il teorema (4.4.3) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) dt = \int_0^1 \left(t \frac{\partial f_i(t\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \cdot \mathbf{x}_0 + \vec{f}(t\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(t \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j(t\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} x_j + f_i(t\mathbf{x}_0) \right) dt = \int_0^1 \left(t \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j(t\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} x_j + f_i(t\mathbf{x}_0) \right) dt = \\ &= \int_0^1 (t \nabla f_i(t\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0 + f_i(t\mathbf{x}_0)) dt = \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f_i(t\mathbf{x}_0) + f_i(t\mathbf{x}_0) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_i(t\mathbf{x}_0)) dt = [t f_i(t\mathbf{x}_0)]_0^1 = f_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

(abbiamo usato l'irrotazionalità di \vec{f} e integrato per parti). Dunque $\nabla F = \vec{f}$, per cui \vec{f} è irrotazionale. \square

Capitolo 7

Superfici

7.1 Superfici parametriche

7.1.1 Definizione. Supponiamo che $\Gamma : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia un'applicazione con le seguenti proprietà:

1. $W \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare a tratti (vedi (3.7.4)), limitato;
2. Γ è continua su W ed è di classe \mathcal{C}^1 in $\overset{\circ}{W}$;
3. Γ è iniettiva;
4. per ogni punto (u, v) di $\overset{\circ}{W}$ i due vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v)$ sono linearmente indipendenti.

Notiamo che la condizione (4) si può dire in maniera equivalente:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0} \quad \forall (u, v) \in \overset{\circ}{W}.$$

Diremo in questo caso che Γ è una *parametrizzazione*. Chiameremo *sostegno della parametrizzazione* Γ l'insieme

$$S = S_{\Gamma} := \Gamma(W) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\exists (u, v) \in W : \Gamma(u, v) = (x, y, z))\}.$$

Chiamiamo *bordo* di Γ l'insieme:

$$\Sigma_{\Gamma} := \Gamma(\partial W) = \{(x, y, z) : (\exists (u, v) \in \partial W : \Gamma(u, v) = (x, y, z))\}.$$

Vedremo fra poco che Σ_{Γ} non dipende da Γ ma solo dal sostegno di Γ . Dato $(u, v) \in \overset{\circ}{W}$ consideriamo il vettore:

$$\vec{N}_{\Gamma}(u, v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v).$$

Notiamo che $\vec{N}_{\Gamma}(u, v) \neq \mathbf{0}$ per ogni $(u, v) \in \overset{\circ}{W}$, a causa della proprietà (4).

7.1.2 Osservazione. Il bordo di Γ è **diverso** dal bordo topologico (o frontiera) del sostegno di Γ : $\Sigma_{\Gamma} \neq \partial S_{\Gamma}$. In effetti si vede facilmente che se Γ è una parametrizzazione, allora il sostegno S_{Γ} ha sempre parte interna vuota, dunque $S_{\Gamma} = \partial S_{\Gamma}$, mentre è chiaro che $\Sigma_{\Gamma} \neq S_{\Gamma}$.

Nel seguito W e W_1 saranno sempre dei domini limitati e regolari a tratti in \mathbb{R}^2 .

7.1.3 Esempio. Consideriamo $W := \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ (il quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$) e $\Gamma : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\Gamma(u, v) := (u, v, u^2 - v^2)$. Allora Γ è $\mathcal{C}^1(\overset{\circ}{W})$ e continua su W (dato che Γ risulta definita su tutto \mathbb{R}^2 e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$). È anche chiaro che $(u', v') \neq (u'', v'') \Rightarrow \Gamma(u', v') \neq \Gamma(u'', v'')$, dunque Γ è iniettiva. Inoltre dato $(u, v) \in \overset{\circ}{W}$ si ha:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N}_{\Gamma}(u, v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

$$\|\vec{N}(P_0)\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

quindi $\vec{N}_{\Gamma} \neq \vec{0}$ per cui Γ è una parametrizzazione. Il sostegno S_{Γ} è dato da:

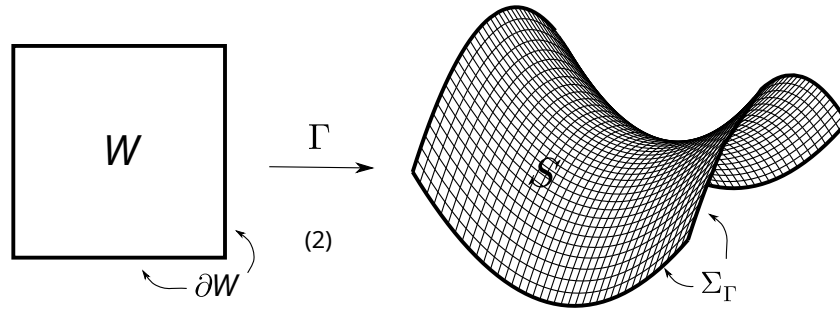
$$S_{\Gamma} = \{(x, y, z) : (x, y) \in W, z = x^2 - y^2\} = \{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = x^2 - y^2\},$$

mentre il bordo è

$$\Sigma_{\Gamma} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial W, z = x^2 - y^2\}$$

ed è quindi fatto di quattro pezzi (in corrispondenza di lati del quadrato)

$$\Sigma_{\Gamma} = \{(x, -1, x^2 - 1) : |x| \leq 1\} \cup \{(x, 1, x^2 - 1) : |x| \leq 1\} \cup \\ \cup \{(-1, y, 1 - y^2) : |y| \leq 1\} \cup \{(1, y, 1 - y^2) : |y| \leq 1\}.$$



7.1.4 Esempio. Consideriamo $W := \{u^2 + v^2 \leq 1\}$ di modo che $\overset{\circ}{W} = \{u^2 + v^2 < 1\}$ e $\partial W := \{u^2 + v^2 = 1\}$. Se $(u, v) \in W$ poniamo $\Gamma(u, v) := (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Si vede che Γ è continua su W , Γ ammette derivate parziali su $\overset{\circ}{W}$ e si ha:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix} \quad \forall (u, v) \in \overset{\circ}{W}$$

che sono continue in $\overset{\circ}{W}$ e quindi, per il Teorema del Differenziale Totale, $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{W})$.

La normale in (u, v) è:

$$\vec{N}_{\Gamma}(u, v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

che ha norma:

$$\|\vec{N}_{\Gamma}(u, v)\| = \sqrt{1 + \frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \neq 0.$$

Come nell'esempio precedente si vede facilmente che Γ è iniettiva, dunque è una parametrizzazione. Il sostegno di Γ è "l'emisfero nord" della sfera di \mathbb{R}^3 :

$$S_{\Gamma} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

come si verifica facilmente. Il bordo Σ_{Γ} è l'immagine tramite Γ di $\partial\dot{W}$:

$$\Sigma_{\Gamma} = \{(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) : u^2 + v^2 = 1\} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\} \quad (\subset \mathbb{R}^3)$$

e cioè "l'equatore".

In entrambi gli esempi sopra il sostegno è il grafico di una funzione. Questo è un caso particolare che conviene mettere in evidenza.

7.1.5 Osservazione (Parametrizzazione di un grafico). Supponiamo $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^0(W)$ e $\mathcal{C}^1(\dot{W})$. Definiamo $\Gamma_f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo $\Gamma_f(u, v) := (u, v, f(u, v))$. La Γ_f è una parametrizzazione il cui sostegno è il grafico di f . Infatti $(u', v') \neq (u'', v'') \Rightarrow \Gamma_f(u', v') \neq \Gamma_f(u'', v'')$ e

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

da cui segue:

$$\vec{N}_{\Gamma_f} := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

e quindi:

$$\|\vec{N}_{\Gamma_f}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f(u, v)\|^2} \neq \vec{0}. \quad (7.2)$$

È chiaro che il sostegno S_{Γ_f} coincide con il grafico di f .

7.1.6 Esempio. Consideriamo $W := [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ e se $(\theta, \psi) \in W$ poniamo $\Gamma(\theta, \psi) := (\cos(\theta) \sin(\psi), \sin(\theta) \sin(\psi), \cos(\psi))$. È abbastanza facile verificare che:

$$S := \Gamma(W) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(la sfera unitaria). È chiaro anche che $\Gamma \in \mathcal{C}^0(W) \cap \mathcal{C}(\dot{W})$ e che:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\theta) \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\vec{N}(\theta, \psi) := \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, \psi) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin^2(\psi) \\ -\cos(\theta) \sin^2(\psi) \\ -\sin(\psi) \cos(\psi) \end{pmatrix} = -\sin(\psi) \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

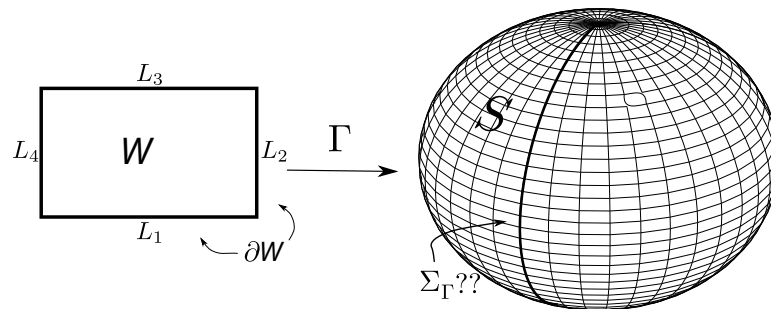
da cui (nota che $\sin(\psi) \geq 0$ se $\psi \in [0, \pi]$):

$$\|\vec{N}(\theta, \psi)\| = \sin(\psi) \sqrt{\sin^2(\theta) \sin^2(\psi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\psi) + \cos^2(\psi)} = \sin(\psi).$$

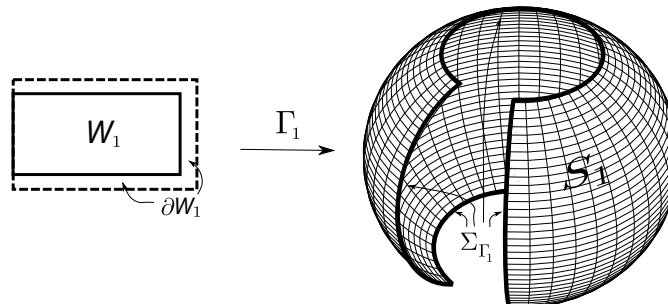
Questi calcoli mostrano che $\vec{N}(\theta, \psi) = \mathbf{0}$ quando $\psi = 0$ oppure $\psi = \pi$ (ai poli). Dunque $\mathbf{\Gamma}$ non verifica tutte le ipotesi per essere una superficie parametrica. C'è anche un altro problema e cioè che $\mathbf{\Gamma}$ non è iniettiva su W . Infatti il polo nord $(0, 0, 1)$ corrisponde a $\mathbf{\Gamma}(\theta, 0)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ (analogo problema per il polo sud) e i punti del “meridiano fondamentale”, cioè i punti $(x, 0, z)$ con $x \geq 0$ e $x^2 + z^2 = 1$, sono immagine sia di $(0, \psi)$ (per l'opportuna latitudine ψ) sia di $(2\pi, \psi)$. Se guardiamo $\Sigma_{\mathbf{\Gamma}} := \mathbf{\Gamma}(\partial W)$ troviamo che i “lati orizzontali” di W , cioè $L_1 := [0, 2\pi] \times \{0\}$ e $L_3 := [0, 2\pi] \times \{\pi\}$ vengono mandati rispettivamente nel polo nord $(0, 0, 1)$ e nel polo sud $(0, 0, -1)$ mentre entrambi i “lati verticali” vengono mandati nel meridiano fondamentale:

$$\mathbf{\Gamma}(\partial W) = \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}.$$

È abbastanza intuitivo che la sfera non dovrebbe avere bordo e che il meridiano che si ritrova è un “accidente” dovuto alla parametrizzazione difettosa. Se si guarda attentamente il comportamento di $\mathbf{\Gamma}$ su ∂W si nota peraltro che (1) quando il parametro (θ, ψ) percorre il lato L_1 , partendo da $(0, 0)$ e arrivando in $(2\pi, 0)$, il corrispondente $\mathbf{\Gamma}(\theta, \psi)$ rimane fermo al polo nord; (2) quando il parametro (θ, ψ) percorre il lato L_2 , da $(2\pi, 0)$ a $(2\pi, \pi)$, la $\gamma(\theta, \psi)$ percorre il meridiano fondamentale dal polo nord al polo sud; (3) quando il parametro (θ, ψ) percorre il lato L_3 , da $(2\pi, \pi)$ a $(0, \pi)$, la $\mathbf{\Gamma}(\theta, \psi)$ rimane ferma al polo sud, (4) quando infine il parametro (θ, ψ) percorre il lato L_4 , partendo da $(0, \pi)$ e tornando in $(0, 0)$, il corrispondente $\mathbf{\Gamma}(\theta, \psi)$ ripercorre il meridiano partendo dal polo sud e tornando al polo nord. Dunque il meridiano viene percorso prima in un verso e poi nel verso opposto: questo dovrebbe comportare una “cancellazione del meridiano” dal bordo di S e dunque ad avere $\Sigma(S) = \emptyset$. Questa idea verrà precisata nel seguito.



Se prendiamo W_1 tale che $W_1 \subset [0, 2\pi[\times]0, \pi[$, per esempio $W_1 := [0, \theta_0] \times [\psi_0, \psi_1]$ con $0 < \theta_0 < 2\pi$ e $0 < \psi_0 < \psi_1 < \pi$, allora, indicando con $\mathbf{\Gamma}_1$ la restrizione di $\mathbf{\Gamma}$ a W_1 , questa è una parametrizzazione che ha come sostegno un sottoinsieme S_1 di S . Come si vede dalla figura il bordo di $\mathbf{\Gamma}_1$ è “quello che ci si aspetta”.



7.1.7 Lemma. Se A è una matrice 3×2 e $\vec{v}_1 := A^1$, $\vec{v}_2 := A^2$ sono le sue colonne, che sono due vettori in \mathbb{R}^3 , poniamo $\nu(A) := \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2$. Allora per ogni matrice 2×2 B si ha $\nu(AB) = \det(B)\nu(A)$.

Dimostrazione. Se $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allora:

$$AB = (a\vec{v}_1 + c\vec{v}_2, b\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) \Rightarrow \nu(AB) = (a\vec{v}_1 + c\vec{v}_2) \otimes (b\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = \\ ab\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 + ad\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 + cb\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1 + cd\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 = (ad - bc)\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 = \det(B)\nu(A).$$

□

7.1.8 Definizione (Cambi di parametro). Sia $\Phi : W_1 \rightarrow W$ con le seguenti proprietà.

1. Φ è continua in W e \mathring{C}^1 in \mathring{W} ;
2. per ogni (u_1, v_1) in W_1 la matrice Jacobiana $J_\Phi(u_1, v_1)$ ha determinante diverso da zero: $\det(J_\Phi(u_1, v_1)) \neq 0$;
3. Φ è bigettiva (da W_1 in W).

In questa situazione diremo che Φ è un *cambio di parametro*.

7.1.9 Definizione (riparametrizzazioni). Sia $\Gamma : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione e sia $\Phi : W_1 \rightarrow W$ un cambio di parametro. Definiamo $\Gamma_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo $\Gamma_1 := \Gamma \circ \Phi$ (cioè $\Gamma_1(u_1, v_1) = \Gamma(\Phi(u_1, v_1))$). Dico che Γ_1 è ancora una parametrizzazione e che:

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1, v_1) = \det(J_\Phi(u_1, v_1)) \vec{N}_\Gamma(\Phi(u_1, v_1)) \quad \forall (u_1, v_1) \in W_1. \quad (7.3)$$

Infatti è chiaro che $\vec{N}_\Gamma = \nu(J_\Gamma)$ (usando la notazione di (7.1.7)). Dato che $J_{\Gamma_1} = (J_\Gamma \circ \Phi)J_\Phi$ si ricava immediatamente la formula (7.3) (usando la (7.1.7)). Dalla formula (7.3) si vede anche che $\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1, v_1) \neq \vec{0}$, dato che $\vec{N}_\Gamma \neq \vec{0}$ e che $\det(J_\Phi) \neq 0$ per le ipotesi fatte su Φ . Le altre proprietà delle parametrizzazioni sono immediate.

Diremo allora che Γ_1 è una *riparametrizzata di Γ* (tramite il cambio di parametro Φ).

È chiaro dalla definizione che Γ e Γ_1 **hanno lo stesso sostegno**. Il seguente teorema dice che “vale il viceversa”.

7.1.10 Teorema. *Siano $\Gamma : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni aventi lo stesso sostegno $S := \Gamma(W) = \Gamma_1(W_1)$. Allora esiste un cambio di parametro $\Phi : W_1 \rightarrow W$ tale che $\Gamma_1 = \Gamma \circ \Phi$ (dunque Γ_1 è ottenuta da Γ mediante un cambio di parametro).*

Dimostrazione. (*) Definiamo $\Phi : W_1 \rightarrow W$ ponendo $\Phi := \Gamma^{-1} \circ \Gamma_1$. Notiamo che Φ è bigettiva e che $\Gamma_1 = \Gamma \circ \Phi$. Dobbiamo dimostrare che Φ è un cambio di parametro. Si ha:

1. Γ e Γ_1 sono continue per ipotesi. Inoltre Γ^{-1} è continua per il Teorema (1.5.14) (ricordiamo che W è limitato e chiuso). Ne segue che Φ è continua. Per gli stessi motivi anche $\Phi^{-1} : W \rightarrow W_1$ è continua.
2. Φ manda \mathring{W}_1 in \mathring{W} ed è bigettiva tra questi due insiemi (aperti). Questo è una conseguenza del *Teorema di Invarianza del Dominio* – un teorema molto profondo la cui dimostrazione è fuori dalla nostra portata e che quindi diamo per buono (è vitale che la dimensione in partenza e in arrivo siano le stesse). Notiamo che da questo fatto si deduce $\Sigma_\Gamma = \Sigma_{\Gamma_1}$

3. Prendiamo un punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $S \setminus \Sigma_{\Gamma} = S \setminus \Sigma_{\Gamma_1}$. Avremo $\bar{P} = \Gamma(\bar{u}, \bar{v}) = \Gamma_1(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ per una (unica) opportuna (\bar{u}, \bar{v}) in \dot{W} e una (altrettanto unica) opportuna (\bar{u}_1, \bar{v}_1) in \dot{W}_1 . Introduciamo alcune abbreviazioni:

$$\begin{aligned} \vec{U} &:= \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}), & \vec{V} &:= \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}), & \vec{N} &:= \vec{U} \otimes \vec{V}, & J &:= J_{\Gamma}(\bar{u}, \bar{v}), \\ \vec{U}_1 &:= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}(\bar{u}_1, \bar{v}_1), & \vec{V}_1 &:= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}(\bar{u}_1, \bar{v}_1), & \vec{N}_1 &:= \vec{U}_1 \otimes \vec{V}_1, & J_1 &:= J_{\Gamma_1}(\bar{u}_1, \bar{v}_1), \\ \mathbb{T} &:= \left\{ \lambda \vec{U} + \mu \vec{V} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}, & \mathbb{T}_1 &:= \left\{ \lambda \vec{U}_1 + \mu \vec{V}_1 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}, \\ \pi, \Pi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definite da } \pi(\vec{P}) := \vec{P} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}, & \Pi(P) &:= \bar{P} + \pi(P - \bar{P}) \end{aligned}$$

(π è la proiezione ortogonale su \mathbb{T} , Π è la proiezione sul piano affine parallelo a \mathbb{T} e passante per \bar{P}). Indicheremo inoltre con \mathbf{w} il generico punto (u, v) in W , con $\vec{\mathbf{w}}$ il generico vettore $w_1 \vec{\mathbf{i}} + w_2 \vec{\mathbf{j}}$ di \mathbb{R}^2 e porremo $\vec{\mathbf{w}} := (\bar{u}, \bar{v})$.

Si ha che $(J\vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{N} = \vec{\mathbf{0}}$ per ogni $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$, infatti $J = [\vec{U} | \vec{V}]$, da cui:

$$\left(J(w_1 \vec{\mathbf{i}} + w_2 \vec{\mathbf{j}}) \right) \cdot \vec{N} = (w_1 \vec{U} + w_2 \vec{V}) \cdot \vec{N} = w_1 \vec{U} \cdot \vec{N} + w_2 \vec{V} \cdot \vec{N} = w_1 \vec{\mathbf{0}} + w_2 \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Ne segue, usando la definizione di π , che $\pi(J\vec{\mathbf{w}}) = J\vec{\mathbf{w}}$ per ogni $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$.

4. Dico che

$$\lim_{\mathbf{w} \rightarrow \vec{\mathbf{w}}} \frac{\|\Gamma(\mathbf{w}) - \Pi(\Gamma(\mathbf{w}))\|}{\|\Gamma(\mathbf{w}) - \Gamma(\vec{\mathbf{w}})\|} = 0. \quad (7.4)$$

Infatti, per la formula di Taylor:

$$\Gamma(\mathbf{w}) - \Gamma(\vec{\mathbf{w}}) = \Gamma(\mathbf{w}) - \bar{P} = J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}) + o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|). \quad (7.5)$$

Dato che:

$$\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\| = \|J^{-1}J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}})\| \leq \|J^{-1}\| \|J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}})\|,$$

usando (4) si ottiene:

$$\|\Gamma(\mathbf{w}) - \Gamma(\vec{\mathbf{w}})\| \geq \frac{\|J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}})\|}{\|J^{-1}\|} - o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|)$$

(ricordiamo che gli o piccoli possono cambiare a ogni passaggio). Sempre per (4):

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{w}) - \Pi(\Gamma(\mathbf{w})) &= \Gamma(\mathbf{w}) - \bar{P} - \pi(\Gamma(\mathbf{w}) - \bar{P}) = J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}) + o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|) + \\ &- \pi(J(\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}) + o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|)) = o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|) - \pi(o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|)) =: o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|). \end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{\|\Gamma(\mathbf{w}) - \Pi(\Gamma(\mathbf{w}))\|}{\|\Gamma(\mathbf{w}) - \Gamma(\vec{\mathbf{w}})\|} \leq \frac{1}{\|J^{-1}\|} \frac{o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|)}{\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\| - o(\|\mathbf{w} - \vec{\mathbf{w}}\|)}$$

da cui, passando al limite per $\mathbf{w} \rightarrow \vec{\mathbf{w}}$, si ottiene (7.4). Dico ora che:

$$\lim_{P \rightarrow \bar{P}, P \in S} \frac{\|P - \Pi(P)\|}{\|P - \bar{P}\|} = 0. \quad (7.6)$$

Per dimostrarlo basta prendere $\mathbf{w} = \Gamma^{-1}(P)$ in (7.4) e usare la continuità di Γ^{-1} .

5. Si ha che:

$$J_1 \vec{w}_1 \in \mathbb{T} \quad \forall \vec{w}_1 \in \mathbb{R}^2 \tag{7.7}$$

Sia infatti $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^2$. Possiamo supporre $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$ (la (7.7) vale per $\vec{w}_1 = \vec{0}$). Se $h \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1) \in S, \quad \Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1) = \Gamma_1(\vec{w}) + hJ_1\vec{w} + o(h).$$

In particolare $\Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1) \rightarrow \bar{P}$ se $h \rightarrow 0$. Dunque possiamo mettere $P = \Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1)$ in (7.6):

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1) - \Pi(\Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1))\|}{\|\Gamma_1(\vec{w}_1 + h\vec{w}_1) - \bar{P}\|} = \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\Gamma_1(\vec{w}) + hJ_1\vec{w} + o(h) - \Pi(\Gamma_1(\vec{w}) + hJ_1\vec{w} + o(h))\|}{\|\Gamma_1(\vec{w}) + hJ_1\vec{w} + o(h) - \bar{P}\|} = \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|hJ_1\vec{w} + o(h) - \pi(hJ_1\vec{w} + o(h))\|}{\|hJ_1\vec{w} + o(h)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|J_1\vec{w} + o(1) - \pi(J_1\vec{w} + o(1))\|}{\|J_1\vec{w} + o(1)\|} = \\ &\quad \frac{\|J_1\vec{w} - \pi(J_1\vec{w})\|}{\|J_1\vec{w}\|}. \end{aligned}$$

Ne segue che $J_1\vec{w} = \pi(J_1\vec{w})$ cioè che vale (7.7). Dalla (7.7) segue immediatamente che $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$. Infatti

$$\lambda \vec{U}_1 + \mu \vec{V}_1 = \lambda J_1 \vec{i} + \mu J_1 \vec{j} = J_1(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}) \in \mathbb{T} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte è chiaro che i ruoli di \mathbb{T}_1 e \mathbb{T} sono simmetrici per cui $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$.

6. Per il punto precedente esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\vec{U}_1 = a\vec{U} + b\vec{V}, \quad \vec{V}_1 = c\vec{U} + d\vec{V}.$$

Questo equivale a dire che la matrice $A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ha la proprietà $J_1 = JA$. Dato che J_1 è iniettiva A deve essere iniettiva ed essendo quadrata deve essere invertibile. Dunque $ad - cb = \det(A) \neq 0$.

7. Dico che Φ è differenziabile in \vec{w}_1 e che $J_\Phi(\vec{w}_1) = A$.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

8. se $P_0 \in S \setminus \Sigma(S)$ il piano tangente $T_{P_0}(S)$ ottenuto mediante Γ e quello ottenuto mediante Γ_1 coincidono; ne segue l'eguaglianza delle rette normali:

$$\left\{ P_0 + t\vec{N}_\Gamma(P_0) : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ P_0 + t\vec{N}_{\Gamma_1}(P_0) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(anche se $\vec{N}_\Gamma(P_0)$ in generale è diverso da $\vec{N}_{\Gamma_1}(P_0)$).

Dato che $\overline{\dot{W}_1}$ è chiuso e limitato, allora $\Gamma_1^{-1} : S \rightarrow \overline{\dot{W}_1}$ è continua (vedi (1.5.14)). Analogamente $\Gamma^{-1} : S \rightarrow \overline{\dot{W}}$ è continua e quindi sia Φ che Φ^{-1} sono continue. Dalla continuità di Φ e dal *Teorema di Invarianza del Dominio* (un teorema molto profondo la cui dimostrazione è fuori dalla nostra portata) si ricava che $\Phi(\dot{W}) = \dot{W}_1$ (è vitale che la dimensione in partenza e in arrivo siano le stesse).

Conveniamo di indicare con \mathbf{u} i punti di \mathring{W} (dunque $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ invece di (u, v)) e con \mathbf{v} i punti di \mathring{W}_1 . Fissiamo \mathbf{u}_0 in \mathring{W} e poniamo $P_0 = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_0)$. Per ipotesi esiste unico $\mathbf{v}_0 \in \mathring{W}_1$ con $P_0 = \mathbf{\Gamma}_1(\mathbf{v}_0)$; dato che $\Phi(\mathring{W}) = \mathring{W}_1$ abbiamo $\mathbf{v}_0 \in \mathring{W}_1$.

Indichiamo con $T_{P_0}(\mathbf{\Gamma})$ il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato da $\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0)$ e $\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0)$.

Introduciamo alcune abbreviazioni:

$$\vec{U}_1 := \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0), \quad \vec{U}_2 := \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0), \quad \vec{N} := \vec{N}_{\mathbf{\Gamma}}(P_0) = \vec{U}_1 \otimes \vec{U}_2, \quad J := J_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{u}_0) = (\vec{U}_1, \vec{U}_2),$$

e poniamo $T_0 := \text{span}(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ cioè è lo spazio tangente a S in P_0 definito mediante $\mathbf{\Gamma}$. Notiamo che, se $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, si ha $J\vec{u} = u_1\vec{U}_1 + u_2\vec{U}_2$ e quindi $J\vec{u} \in T_0$ per ogni $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo anche la proiezione ortogonale π da \mathbb{R}^3 su T_0 che è definita da:

$$\pi(\vec{u}) := \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Per quanto appena visto si ha:

$$\pi(J\vec{u}) = J\vec{u} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2. \quad (7.8)$$

Cominciamo con il dimostrare che:

$$\lim_{P \rightarrow P_0, P \in S} \frac{\|P - \pi(P)\|}{\|P - P_0\|} = \lim_{P \rightarrow P_0, P \in S} \frac{\|P - \pi(P)\|}{\|\mathbf{\Gamma}(P) - P_0\|} = 0. \quad (7.9)$$

Per questo usiamo il fatto che, se $\mathbf{u} \in \mathring{W}$, si ha:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_0)}_{=P_0} + J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + r(\mathbf{u})$$

con $r(\mathbf{u}) = o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|)$. Dato che π è lineare e $\pi(P_0) = P_0$ ne segue:

$$\pi(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u})) = P_0 + \pi(J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)) + \pi(r(\mathbf{u})) = P_0 + J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \pi(r(\mathbf{u}))$$

per la (7.8). Usando il cambio di variabile $P = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u})$ (e la continuità di $\mathbf{\Gamma}^{-1}$) abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0, P \in S} \frac{\|P - \pi(P)\|}{\|P - P_0\|} &= \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}) - \pi(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}))\|}{\|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}) - P_0\|} = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{\|r(\mathbf{u}) - \pi(r(\mathbf{u}))\|}{\|J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + r(\mathbf{u})\|} = \\ &= \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \left\| J \left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} \right) + \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} \right\|} = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{o(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| O(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|)} = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la prima delle (7.9); la seconda si fa in modo simile.

Dimostriamo ora che:

$$\vec{V}_1 := \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_1}{\partial v_1}(\mathbf{v}_0) \in T_0, \quad \vec{V}_2 := \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_2}{\partial v_2}(\mathbf{v}_0) \in T_0 \quad (7.10)$$

Notiamo che se questo è vero, allora essendo \vec{V}_1 e \vec{V}_2 linearmente indipendenti, allora $\text{span}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = T_0$: lo spazio tangente a S in P_0 definito mediante $\mathbf{\Gamma}_1$ coincide con quello definito mediante $\mathbf{\Gamma}$. Per dimostrarlo indichiamo $J_1 := J_{\mathbf{\Gamma}_1}(\mathbf{v}_0) = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ e prendiamo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Si ha:

$$\frac{\mathbf{\Gamma}_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - P_0}{h} = \frac{J_1(h\vec{v}_0) + o(h)}{h} = J_1\vec{v} + o(1).$$

Supponiamo $\vec{v} \neq \mathbf{0}$. Dato che $\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) \in S$ e $\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} P_0$, da (7.9) abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - \pi(\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}))\|}{\|\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - P_0\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - P_0}{h} - \pi \left(\frac{\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - P_0}{h} \right) \right\| \left\| \frac{\Gamma_1(\mathbf{v}_0 + h\vec{v}) - P_0}{h} \right\|^{-1} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|J_1\vec{v} + o(1) - \pi(J_1\vec{v} + o(1))\|}{\|J_1\vec{v} + o(1)\|} = \frac{\|J_1\vec{v} - \pi(J_1\vec{v})\|}{\|J_1\vec{v}\|} \end{aligned}$$

(per ipotesi $J_1\vec{v} \neq \mathbf{0}$). Ne segue $J_1\vec{v} = \pi(J_1\vec{v})$, dunque $J_1\vec{v} \in T_{P_0}$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Usando $\vec{v} = \hat{e}_1$ e $\vec{v} = \hat{e}_2$ si ottengono le (7.10).

Dimostriamo finalmente la differenziabilità di Φ in \mathbf{u}_0 . Per quanto appena visto devono esistere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\vec{V}_1 = a\vec{U}_1 + b\vec{U}_2, \quad \vec{V}_2 = c\vec{U}_1 + d\vec{U}_2,$$

Se poniamo $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la relazione sopra si può scrivere $J_1 = J A$. Inoltre A è invertibile dato che $\mathbf{0} \neq \vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2 = \det(A)(\vec{U}_1 \otimes \vec{U}_2)$ (per (7.1.7)); in particolare $J = J_1 A^{-1}$. Se $\mathbf{u} \in \dot{W}$ poniamo $\Delta(\mathbf{u}) := \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0) - A^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$.

Per la differenziabilità di Γ in \mathbf{u}_0 e di Γ_1 in \mathbf{v}_0 :

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Phi(\mathbf{u})) &= P_0 + J_1(\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)) + o(1)\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| \\ &\Updownarrow \\ \Gamma(\mathbf{u}) &= P_0 + J_1(\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)) + o(1)\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| \\ &\Updownarrow \\ J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + o(1)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| &= J_1(\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)) + o(1)\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| \\ &\Updownarrow \\ J_1 A^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + o(1)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| &= J_1(\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)) + o(1)\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| \\ &\Updownarrow \\ J_1(\Delta(\mathbf{u})) &= o(1)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| + o(1)\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| \end{aligned}$$

Si ha:

$$\|\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0)\| = \|\Delta(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\| \leq \|\Delta(\mathbf{u})\| + \|A^{-1}\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|$$

e dato che $J_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva abbiamo anche:

$$\|J_1\vec{v}\| \geq \nu\|\vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

dove $\nu := \min_{\{\|\vec{v}\|=1\}} \|J_1\vec{v}\| > 0$. Allora ricaviamo:

$$\nu\|\Delta(\mathbf{u})\| \leq o(1)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| + o(1)\|\Delta(\mathbf{u})\|$$

e quindi, per \mathbf{u} vicino a \mathbf{u}_0 , abbiamo:

$$\|\Delta(\mathbf{u})\| \leq \frac{1}{\nu - o(1)}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = o(1)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|$$

che ci dice che Φ è differenziabile in \mathbf{u}_0 e $J_\Phi(\mathbf{u}_0) = A^{-1}$. Analogamente si tratta Φ^{-1} . \square

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

7.1.11 Definizione (XXX - DA SPOSTARE -XXX). Dato $P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$ in $S(\Gamma) \setminus \Sigma(S)$, chiameremo *piano tangente a $S(\Gamma)$ in P_0* il piano $T_{P_0}(\Gamma)$ in \mathbb{R}^3 generato dai vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$, cioè

$$T_{P_0}(\Gamma) := \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0, v_0) + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0, v_0) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definiamo inoltre la *retta normale a $S(\Gamma)$ in P_0* ponendo:

$$N_{P_0}(S(\Gamma)) := \left\{ \lambda \vec{N}_\Gamma(P_0) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

È chiaro che $T_{P_0}(S)$ e $N_{P_0}(S)$ sono due spazi ortogonali la cui somma coincide con \mathbb{R}^3 .

7.1.12 Osservazione. Chiamiamo *diffeomorfismo* tra $\overset{\circ}{W}$ e $\overset{\circ}{W}_1$ una mappa $\Phi : \overset{\circ}{W} \rightarrow \overset{\circ}{W}_1$ tale che Φ sia bigettiva, $\Phi \in \mathcal{C}^0(\overset{\circ}{W})$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{W})$, $\Phi^{-1} \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{W}_1)$ e $\Phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{W}_1)$.

Il teorema precedente dice che se $\Gamma : \overset{\circ}{W} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma : \overset{\circ}{W}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hanno lo stesso sostegno, esiste un diffeomorfismo Φ tra $\overset{\circ}{W}$ e $\overset{\circ}{W}_1$ tale che $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Phi$. Esprimiamo questo fatto dicendo che Γ è una *riparametrizzata di Γ_1* e che Φ è una *riparametrizzazione* per Γ_1 . Ovviamente si possono scambiare i ruoli e dire che Φ^{-1} è una riparametrizzazione per Γ .

7.1.13 Definizione. Dato un insieme chiuso S in \mathbb{R}^3 diciamo, per estensione, che S è una *superficie parametrica* se esiste una superficie parametrica $\Gamma : \overset{\circ}{W} \rightarrow \mathbb{R}^3$, nel senso della definizione iniziale, tale che $S(\Gamma) = S$.

Si deduce dal teorema precedente che per una tale S è ben definito il bordo $\Sigma(S)$ e nei punti $P \in S \setminus \Sigma(S)$ sono definiti lo spazio tangente $T_P(S)$ e la retta normale $N_P(S)$. Invece **non è definito** il vettore normale dato che non c'è un criterio preferenziale per scegliere il “verso” sulla retta normale: è arbitrario decidere quali siano “il sopra” e “il sotto” della superficie S .

7.1.14 Osservazione. Abbiamo dato due definizioni di “superficie parametrica” creando una possibile ambiguità. Il contesto dovrebbe essere in grado di farci capire di cosa stiamo parlando quanto incontriamo questo termine.

7.2 Superfici parametriche orientate

7.2.1 Lemma. Sia $\Phi : \overset{\circ}{\Omega} \rightarrow \overset{\circ}{\Omega}_1$ un diffeomorfismo e supponiamo che Ω sia connesso. Allora si ha:

1. Ω_1 è connesso.
2. Il segno di $\det(J_\Phi(\mathbf{u}))$ è costante al variare di $\mathbf{u} \in \Omega$, dunque vale una delle due:
 - (a) $\det(J_\Phi(\mathbf{u})) > 0 \forall \mathbf{u} \in \Omega$ oppure
 - (b) $\det(J_\Phi(\mathbf{u})) < 0 \forall \mathbf{u} \in \Omega$.

3. Siano $\gamma_i : [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, k$ delle curve chiuse e regolari che descrivono $\partial\Omega$ coerentemente con Ω , come detto in (3.7.6), e $\gamma_{1,i} : [a_{1,i}, b_{1,i}]$, $i = 1, \dots, k_1$ delle analoghe curve chiuse e regolari che descrivono $\partial\Omega_1$ coerentemente con Ω_1 . Allora $k = k_1$ e definite $\hat{\gamma}_i : [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, k$ ponendo $\hat{\gamma}_i := \Phi \circ \gamma_i$ si ha che le $\hat{\gamma}_i$ sono a valori in $\partial\Omega_1$ e, a meno di riordinare gli indici, $\hat{\gamma}_i([a_i, b_i]) = \gamma_{1,i}([a_{1,i}, b_{1,i}])$. Inoltre:

- $\hat{\gamma}'_i(t)$ e $\gamma'_{1,i}(t)$ sono concordi per ogni t se $\det(J_\Phi) > 0$ in Ω ;
- $\hat{\gamma}'_i(t)$ e $\gamma'_{1,i}(t)$ sono discordi per ogni t se $\det(J_\Phi) < 0$ in Ω ;

Idea di dimostrazione. Il fatto che Ω_1 sia connesso è conseguenza della continuità di Φ : se $P_1, Q_1 \in \Omega_1$ allora esistono $P, Q \in \Omega$ tali che $\Gamma(P) = P_1$ e $\Gamma(Q) = Q_1$. Per la connessione di Ω posso congiungere P a Q mediante una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Posto $\tilde{\gamma} := \Gamma \circ \gamma$ si ha che $\tilde{\gamma}$ è una curva in Ω_1 che congiunge P_1 a Q_1 .

Essendo $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ la funzione $\mathbf{u} \mapsto \det(J_\Phi(\mathbf{u}))$ è continua in Ω e non si annulla mai perché $1 = \det(I) = \det(J_{\Phi \circ \Phi^{-1}}) = \det(J_\Phi J_{\Phi^{-1}}) = \det(J_\Phi) \det(J_{\Phi^{-1}})$. Per il Teorema degli Zeri (3.1.27) si ha la tesi.

Omettiamo la dimostrazione, un po' complicata, della terza proprietà. \square

7.2.2 Proposizione. *Supponiamo che $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ siano due superfici parametriche aventi lo stesso sostegno S . Supponiamo inoltre che Ω e Ω_1 siano connessi. Ci sono allora due possibilità:*

- $\hat{N}_\Gamma(P) = \hat{N}_{\Gamma_1}(P)$ per ogni $P \in S \setminus \Sigma(S)$;
- $\hat{N}_\Gamma(P) = -\hat{N}_{\Gamma_1}(P)$ per ogni $P \in S \setminus \Sigma(S)$;

Dimostrazione. Per il teorema (7.1.10) si ha $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Phi$ con $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_1$ diffeomorfismo. Inoltre $J_\Gamma(\mathbf{u}) = J_{\Gamma_1}(\Phi(\mathbf{u})) J_\Phi(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \Omega$. Sia P un generico punto di $S \setminus \Sigma(S)$ e siano $\mathbf{u} \in \Omega$ tale che $P = \Gamma(\mathbf{u}) = \Gamma_1(\mathbf{v})$ dove $\mathbf{v} = \Phi(\mathbf{u})$.

Per la definizione del vettore normale e per il lemma (3.5.1) si ha:

$$\vec{N}_\Gamma(P) = \nu(J_\Gamma(\mathbf{u})) = \nu(J_{\Gamma_1}(\mathbf{v}) J_\Phi(\mathbf{u})) = \det(J_\Phi(\mathbf{u})) \nu(J_{\Gamma_1}(\mathbf{v})) = \det(J_\Phi(\mathbf{u})) \vec{N}_{\Gamma_1}(P).$$

Ne segue $\|\vec{N}_\Gamma(P)\| = |\det(J_\Phi(\mathbf{u}))| \|\vec{N}_{\Gamma_1}(P)\|$. Allora:

$$\hat{N}_\Gamma(P) = \frac{\vec{N}_\Gamma(P)}{\|\vec{N}_\Gamma(P)\|} = \frac{\det(J_\Phi(\mathbf{u})) \vec{N}_{\Gamma_1}(P)}{|\det(J_\Phi(\mathbf{u}))| \|\vec{N}_{\Gamma_1}(P)\|} = \text{segno}(\det(J_\Phi(\mathbf{u}))) \hat{N}_{\Gamma_1}(P).$$

Per (7.2.1) $\text{segno}(\det(J_\Phi(\mathbf{u})))$ è costantemente 1 o -1 , dunque vale la tesi. \square

7.2.3 Definizione. Chiameremo *superficie parametrica orientata* una coppia $(S, \hat{\nu})$ dove S è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^3 e $\hat{\nu} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori tali che esiste una superficie parametrica $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $S = S(\Gamma)$ e $\hat{\nu}(P) = \hat{N}_\Gamma(P)$ per ogni $P \in \Omega$. Dunque, in particolare $\hat{\nu}$ è continua e $\|\hat{\nu}(P)\| = 1$ per ogni $P \in S$. Diremo che S è il *sostegno* della superficie orientata $(S, \hat{\nu})$ e che $\hat{\nu}$ è un'orientazione su S .

7.2.4 Osservazione. Fuori dal formalismo dare una orientazione su una superficie S significa scegliere un campo di versori normali che varia con continuità sulla superficie. Vedremo che nel caso generale questo non è sempre possibile, ma nel caso delle superfici parametriche che stiamo per ora considerando la costruzione si può sempre fare (come indicato sopra).

Se la superficie S è connessa (cioè se $S = \Gamma(\bar{\Omega})$ con Ω connesso) ci sono solo due possibili orientazioni su S : se $(S, \hat{\nu})$ e $(S, \hat{\nu}_1)$ sono due superfici orientate aventi lo stesso sostegno S , allora o $\hat{\nu}(P) = \hat{\nu}_1(P)$ oppure $\hat{\nu}(P) = -\hat{\nu}_1(P)$ per ogni $P \in S$. Infatti dalla definizione devono esistere $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $S = S(\Gamma) = S(\Gamma_1)$ e $\hat{\nu} = \hat{N}_\Gamma$, $\hat{\nu}_1 = \hat{N}_{\Gamma_1}$. Per la proposizione (7.2.2) si ricava quanto detto sopra.

Vediamo ora come la scelta di un'orientazione sia legata alla scelta di un "verso di percorrenza" del bordo.

7.2.5 Lemma. Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ due curve continue aventi lo stesso sostegno: $\Sigma := \gamma([a, b]) = \gamma_1([a_1, b_1])$. Supponiamo inoltre che γ sia iniettiva su $]a, b[$ e che γ_1 sia iniettiva su $]a_1, b_1[$ e che $\gamma(a) = \gamma(b) = \gamma_1(a_1) = \gamma_1(b_1) =: \mathbf{x}_0$ - dunque γ e γ_1 sono chiuse. Allora è ben definita $\varphi := \gamma_1^{-1} \circ \gamma$ da $]a, b[$ a valori in $]a_1, b_1[$ perché:

$$t \in]a, b[\Rightarrow \gamma(t) \in \Sigma \setminus \{\mathbf{x}_0\} \Rightarrow \gamma(t) \in \gamma_1(]a_1, b_1[) \Rightarrow \exists \gamma_1^{-1}(\gamma(t)),$$

Inoltre φ è continua, strettamente monotona e vale una tra le due condizioni:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) = b_1, \quad \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t) = b_1, \quad \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) = a_1.$$

Dimostrazione. (*) Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\Sigma_\varepsilon := \gamma([a + \varepsilon, b - \varepsilon])$. Dato che γ è continua e $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ è chiuso e limitato si ha che Σ_ε è chiuso e limitato (vedi la (1.5.12)). Dato che γ_1 è continua l'insieme $J_\varepsilon := \gamma_1^{-1}(\Sigma_\varepsilon)$ è chiuso (vedi ??) ed è anche limitato perché $J_\varepsilon \subset]a_1, b_1[$. Allora $\gamma_1^{-1} : \Sigma_\varepsilon \rightarrow]a_1, b_1[$ è continua (vedi la (1.5.14)) e allora $\varphi :]a + \varepsilon, b - \varepsilon[\rightarrow]a_1, b_1[$ è continua e iniettiva. Per le proprietà delle funzioni continue sull'intervallo la φ è strettamente monotona su $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ e la sua immagine J_ε è un intervallo chiuso: $J_\varepsilon = [a_{1,\varepsilon}, b_{1,\varepsilon}] \subset]a_1, b_1[$. Inoltre vale una delle due: $\varphi(a + \varepsilon) = a_{1,\varepsilon}$ e $\varphi(b - \varepsilon) = b_{1,\varepsilon}$ oppure $\varphi(a + \varepsilon) = b_{1,\varepsilon}$ e $\varphi(b - \varepsilon) = a_{1,\varepsilon}$. Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario la φ è continua e strettamente monotona su $]a, b[$. Per la monotonia esistono $\alpha := \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$ e $\beta := \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$ tra loro distinti ($\alpha < \beta$ se φ è strettamente crescente oppure $\alpha > \beta$ se φ è strettamente decrescente). Per la continuità di γ e γ_1 :

$$\mathbf{x}_0 = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(\gamma_1^{-1}(\gamma(t))) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(\varphi(t)) = \gamma_1(\alpha)$$

e analogamente $\mathbf{x}_0 = \gamma_1(\beta)$. Ma allora α e β sono uno dei due valori a_1 e b_1 (che sono gli unici per cui γ_1 vale \mathbf{x}_0) ed essendo $\alpha \neq \beta$ ne segue la tesi. \square

7.2.6 Definizione. Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ due curve chiuse continue aventi lo stesso sostegno e supponiamo che:

$$\gamma(a) = \gamma(b) = \gamma_1(a_1) = \gamma_1(b_1), \quad \gamma \text{ iniettiva su }]a, b[, \quad \gamma_1 \text{ iniettiva su }]a_1, b_1[.$$

Allora diciamo che γ e γ_1 hanno lo stesso verso se $\gamma_1^{-1} \circ \gamma$ è strettamente crescente mentre diciamo che γ e γ_1 hanno verso opposto se $\gamma_1^{-1} \circ \gamma$ è strettamente decrescente. Questa definizione è possibile in virtù della precedente proposizione (7.2.5).

7.2.7 Osservazione. È facile vedere che nel caso di γ e γ_1 curve regolari, si ha che le curve hanno lo stesso verso se e solo se i vettori tangenti $\gamma'(t)$ e $\gamma_1'(t_1)$ sono concordi per ogni coppia $t \in [a, b]$ e $t_1 \in [a_1, b_1]$ tali che $\gamma(t) = \gamma_1(t_1)$.

7.2.8 Definizione. Sia $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica. A causa della proposizione (3.7.6) la frontiera di Ω è descritta come $\partial\Omega = \gamma_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \gamma_k([a_k, b_k])$ dove le k curve $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono chiuse, regolari, iniettive tranne agli estremi, non si intersecano tra loro e hanno verso coerente con Ω .

Se definiamo $\tilde{\gamma}_i := \Gamma \circ \gamma_i$ abbiamo che $\tilde{\gamma}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono chiuse, continue, iniettive tranne agli estremi, non si intersecano tra loro e si ha $\Sigma(S) = \tilde{\gamma}_1([a_1, b_1]) \cup \dots \cup \tilde{\gamma}_k([a_k, b_k])$ (non possiamo dire che le $\tilde{\gamma}_i$ sono regolari perché non ipotizziamo che la Γ sia $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$).

Diremo che le k curve $\tilde{\gamma}_i$ così costruite individuano un verso per il bordo $\Sigma(S)$ di S , coerente con Γ (o con la normale \vec{N}_Γ).

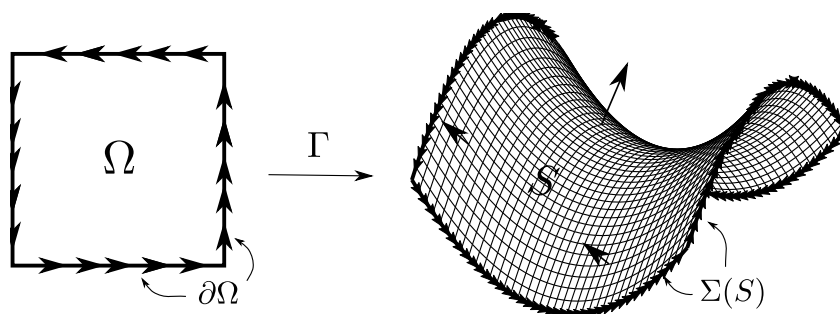
Supponiamo che $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ siano due parametrizzazioni per S e sia \mathbf{x} un punto del bordo $\Sigma(S)$. Da quanto detto fino ad ora è chiaro che esistono due curve chiuse $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\gamma([a, b]) \subset \partial\Omega$ e $\gamma_1([a_1, b_1]) \subset \partial\Omega_1$ e con

$$\mathbf{x} \in \Gamma(\gamma([a, b])) = \Gamma_1(\gamma_1([a_1, b_1]))$$

(γ è una delle curve che descrivono $\partial\Omega$, γ_1 è una delle curve che descrivono $\partial\Omega_1$. Diremo che Γ e Γ_1 inducono lo stesso verso in \mathbf{x} se le due curve $\tilde{\gamma} := \Gamma \circ \gamma$ e $\tilde{\gamma}_1 := \Gamma_1 \circ \gamma_1$ hanno lo stesso verso. Diremo che Γ e Γ_1 inducono verso opposto in \mathbf{x} se $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}_1$ hanno verso opposto.

7.2.9 Osservazione. In realtà le curve $\tilde{\gamma}_i$ non sono univocamente determinate perché non lo sono le γ_i con cui si descrive $\partial\Omega$. Si può però vedere che, ai fini di quanto dimostreremo poi, una qualunque scelta delle γ_i va bene.

Intuitivamente il fatto che $\tilde{\gamma}_i$ abbia verso coerente con S significa che un omino che percorre il bordo $\Sigma(S)$ con la legge $\tilde{\gamma}(t)$ e con la testa rivolta nella direzione della normale, avrà sempre S alla sua sinistra.



7.2.10 Proposizione.

Siano $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche aventi lo stesso sostegno $S = S(\Gamma) = S(\Gamma_1)$. Supponiamo Ω (e dunque Ω_1) connesso. Siano $\tilde{\gamma}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Sigma(S)$, $i = 1, \dots, k$, delle curve che descrivono il bordo $\Sigma(S)$ costruite mediante Γ , come nella definizione (7.2.8) e siano $\tilde{\gamma}_{1,i} : [a_{1,i}, b_{1,i}] \rightarrow \Sigma(S)$, $i = 1, \dots, k_1$, delle analoghe curve che descrivono il bordo $\Sigma(S)$ costruite mediante Γ_1 .

Allora $k = k_1$ e possiamo supporre, a meno di riordinare gli indici che $\Sigma_i(S) := \tilde{\gamma}([a_i, b_i]) = \tilde{\gamma}_{1,i}([a_{1,i}, b_{1,i}])$: $\Sigma(S)$ si scompone in k componenti $\Sigma_i(S)$, ognuna sostegno di una curva chiusa. Inoltre per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha:

- $\tilde{\gamma}_i$ ha lo stesso verso di $\tilde{\gamma}_{1,i}$ se le normali \vec{N}_Γ e \vec{N}_{Γ_1} sono concordi su S ;
- $\tilde{\gamma}_i$ ha verso opposto a $\tilde{\gamma}_{1,i}$ se le normali \vec{N}_Γ e \vec{N}_{Γ_1} sono discordi su S .

Idea di Dimostrazione. Sappiamo che esiste un diffeomorfismo $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_1$ tale che $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Phi$. Per la (1) del lemma (7.2.1) sono possibili due casi:

- (a) $\det(J_\Phi(\mathbf{u})) > 0 \forall \mathbf{u} \in \Omega$ oppure (b) $\det(J_\Phi(\mathbf{u})) < 0 \forall \mathbf{u} \in \Omega$.

e per la proposizione (7.2.2) vale (a) (vale (b)) se e solo se le normali unitarie \hat{N}_Γ e \hat{N}_{Γ_1} sono uguali (sono opposte). Per definizione sappiamo che $\tilde{\gamma}_i = \Gamma \circ \gamma_i$ e $\tilde{\gamma}_{1,i} = \Gamma_1 \circ \gamma_{1,i}$ dove le $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \partial\Omega$ descrivono $\partial\Omega$ coerentemente con Ω , come detto in (3.7.6), e analogamente le $\gamma_1 : [a_{1,i}, b_{1,i}] \rightarrow \partial\Omega_1$ descrivono $\partial\Omega_1$ coerentemente con Ω_1 . Per la (3) del lemma (7.2.1) si ha $k = k_1$ e posto $\hat{\gamma}_i := \Phi \circ \gamma_i$ le curve $\hat{\gamma}_i$ sono concordi con le $\gamma_{1,i}$ nel caso (a) e sono discordi nel caso (b). Se ne deduce che che $\tilde{\gamma}_{1,i} = \Gamma_1 \circ \gamma_{1,i}$ sono concordi (discordi) con $\Gamma_1 \circ \hat{\gamma}_i$ nel caso (a) (nel caso (b)). D'altra parte si ha

$$\tilde{\gamma}_i = \Gamma \circ \gamma_i = \Gamma_1 \circ \Phi \gamma_i = \Gamma_1 \circ \hat{\gamma}_i$$

da cui segue la conclusione. \square

7.2.11 Osservazione. Se consideriamo una superficie parametrica orientata $(S, \hat{\nu})$ abbiamo automaticamente assegnato un verso a $\Sigma(S)$ scegliendo il verso indotto da una qualunque $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow S$ per cui $\hat{N}_\Gamma = \hat{\nu}$. Per la proposizione precedente si ha infatti che ogni altra $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow S$ per cui $\hat{N}_{\Gamma_1} = \hat{\nu}$ induce lo stesso verso su $\Sigma(S)$ (cioè le curve che descrivono $\Sigma(S)$ ottenute da Γ hanno lo stesso verso di quelle ottenute da Γ_1).

7.3 Integrali di superficie

7.3.1 Definizione. Sia S una superficie parametrica e sia $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione per S .

Data $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$ diciamo che f è misurabile su S se $(f \circ \Gamma) \|\vec{N}_\Gamma\|$ è misurabile in $\bar{\Omega}$. Se f è misurabile e $f \geq 0$ definiamo l'integrale superficiale di prima specie di f su S ponendo:

$$\iint_S f \, d\sigma := \iint_{\bar{\Omega}} f(\Gamma(u, v)) \|\vec{N}_\Gamma(u, v)\| \, dudv \quad (7.11)$$

(questo integrale può essere infinito). Se f cambia segno diciamo che f è integrabile su S se f è misurabile su S e se

$$\iint_S |f| \, d\sigma < +\infty.$$

Se f è integrabile su S definiamo l'integrale (superficiale di prima specie) di f su S come:

$$\iint_S f \, d\sigma := \iint_S f^+ \, d\sigma - \iint_S f^- \, d\sigma$$

Si può dimostrare che l'integrale superficiale non dipende dalla parametrizzazione Γ e quindi dipende solo da S .

Chiamiamo *area di S* l'integrale (eventualmente $+\infty$) della funzione 1 su S :

$$A(S) := \iint_{\bar{\Omega}} \|\vec{N}_\Gamma(u, v)\| \, dudv.$$

La seguente proposizione mostra che in effetti l'integrale non dipende dalla parametrizzazione.

7.3.2 Proposizione. Sia $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica e sia $\Phi : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}$ un diffeomorfismo. Sia $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\Gamma_1 := \Gamma \circ \Phi$. Allora

$$\iint_{\bar{\Omega}} f(\Gamma(u, v)) \|\vec{N}_\Gamma(u, v)\| \, dudv = \iint_{\bar{\Omega}_1} f(\Gamma_1(u_1, v_1)) \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1, v_1)\| \, du_1 dv_1.$$

Dimostrazione. Se $P = \Gamma(\mathbf{u}) = \Gamma_1(\mathbf{u}_1)$, con $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1) \in \bar{\Omega}_1$ e $\mathbf{u} = (u, v) = \Phi(\mathbf{u}_1) \in \bar{\Omega}$, usando il lemma (3.5.1), si trova:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\Gamma_1}(P) &= \nu(J_{\Gamma_1}(\mathbf{u}_1)) = \nu(J_{\Gamma \circ \Phi}(\mathbf{u}_1)) = \nu(J_\Gamma(\mathbf{u}) J_\Phi(\mathbf{u}_1)) = \det(J_\Phi)(\mathbf{u}_1) \nu(J_\Gamma(\Phi(\mathbf{u}_1))) = \\ &= \det(J_\Phi)(\mathbf{u}_1) \nu(J_\Gamma(\mathbf{u})) = \det(J_\Phi(\mathbf{u}_1)) \vec{N}_\Gamma(P) \quad \Rightarrow \quad (\text{usando la sostituzione } \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{u}_1)) \\ &= \iint_{\bar{\Omega}_1} f(\Gamma_1(\mathbf{u}_1)) \|\vec{N}_{\Gamma_1}(\mathbf{u}_1)\| \, d\mathbf{u}_1 = \iint_{\bar{\Omega}_1} f(\Gamma(\Phi(\mathbf{u}_1))) \|\det(J_\Phi)(\mathbf{u}_1)\| \|\vec{N}_\Gamma(\Phi(\mathbf{u}_1))\| \, d\mathbf{u}_1 = \\ &= \iint_{\bar{\Omega}} f(\mathbf{u}) \|\vec{N}_\Gamma(\mathbf{u})\| \, d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

7.3.3 Osservazione. Abbiamo visto che il grafico $G_f = \{(x, y, z) : (\mathbf{x}, y) \in \bar{\Omega}, z = f(x, y)\}$ di una funzione $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 è sempre una superficie parametrica, usando $\Gamma(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Usando i calcoli fatti in (7.1.5) abbiamo:

$$\iint_{G_f} h \, d\sigma = \iint_{\Omega} h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dx dy$$

dove h è una funzione continua definita su G_f . In particolare l'area di G_f è

$$A(G_f) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dx dy.$$

7.3.4 Esempio. Consideriamo $S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 - y^2\}$. È chiaro che $S = G_f$ è il grafico della funzione $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ su $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (S è una porzione di iperboloide). Per quanto detto sopra:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_B \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dx dy = \iint_B \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx dy = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho \, d\rho = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4s} \, ds = \pi \left[\frac{2}{3} \frac{1}{4} (1 + 4s)^{3/2} \right]_0^1 = \pi \frac{\sqrt{5} - 1}{6}. \end{aligned}$$

Notiamo che se $f_1(x, y) := x^2 + y^2$ (sempre su B), allora $A(G_{f_1}) = A(G_f)$ (stessi calcoli).

7.3.5 Osservazione. In realtà quando si fanno gli integrali si potrebbe ammettere che la normale $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ non esista oppure sia nulla su un sottoinsieme trascurabile di Ω . Per esempio il cono definito come grafico di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, per $(x, y) \in \bar{B} := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ ha area:

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \, dx dy = \sqrt{2} |\bar{B}| = \sqrt{2} \pi$$

Questo non sarebbe lecito con la definizione di superficie che abbiamo introdotto dato che f non è differenziabile in $(0, 0)$. Però $(0, 0)$ è un solo punto in \bar{B} e se $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha $\nabla f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}$ da cui $\|\nabla f(x, y)\| = 1$.

Vedremo nel prossimo paragrafo che il cono è comunque una superficie regolare a tratti e che il calcolo fatto sopra si può rendere rigoroso.

7.3.6 Definizione. Sia $(S, \hat{\nu})$ una superficie parametrica orientata e sia $\vec{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\|\vec{f}\|$ è integrabile su S . Se $\Gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione per S coerente con $\hat{\nu}$ definiamo il *flusso di \vec{f} attraverso $(S, \hat{\nu})$* (detto anche integrale di superficie di seconda specie) come:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma := \iint_{\Omega} \vec{f}(\Gamma(u, v)) \cdot \vec{N}_{\Gamma}(u, v) \, d\sigma$$

7.4 Nozione generale di superficie

7.4.1 Definizione. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Diremo che S è una superficie regolare a tratti se esistono S_1, \dots, S_n superfici parametriche tali che:

- $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$;
- per ogni coppia di indici i, j tra 1 ed n si ha $S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$;
- l'insieme dei punti $\mathbf{x} \in S$ per esistono tre indici i, j, k tra 1 ed n tali che $\mathbf{x} \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j) \cap \Sigma(S_k)$ è finito;

Diremo in questo caso che S si *decompona nelle superfici parametriche* S_1, \dots, S_n o che S_1, \dots, S_n è una *decomposizione di S in superfici parametriche*.

L'idea è che S è ottenuta "incollando a due a due" un numero finito di superfici parametriche. La seconda proprietà scritta sopra dice che l'incollamento avviene solo sui bordi mentre la terza impone che ci siano al più un numero finito di punti in cui si incollano tre superfici (o più).

7.4.2 Lemma. *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ e se S_1, \dots, S_n e S'_1, \dots, S'_m sono due famiglie finite di superfici parametriche verificanti le proprietà della definizione precedente, allora:*

(a) *se poniamo:*

$$\Sigma_i := \Sigma(S_i) \setminus \bigcup_{j=1}^n S_j, \quad i = 1, \dots, n \quad \Sigma'_{i'} := \Sigma(S'_{i'}) \setminus \bigcup_{j'=1}^m S'_{j'}, \quad i' = 1, \dots, m$$

(Σ_i sono i punti di S_i che "non vengono incollati") allora:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i} = \overline{\bigcup_{i'=1}^m \Sigma'_{i'}};$$

(b) *se $P \in (S_i \setminus \Sigma(S_i)) \cap (S'_{i'} \setminus \Sigma(S'_{i'}))$ allora*

$$T_P(S_i) = T_P(S'_{i'}).$$

7.4.3 Definizione (continuazione). Se S è una superficie regolare a tratti chiamiamo *bordo di S* l'insieme:

$$\Sigma(S) := \overline{\bigcup_{i=1}^n \Sigma(S_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} S_j}$$

dove S_1, \dots, S_n è una qualunque decomposizione di S in superfici parametriche. Per la (a) del lemma (7.4.2) questa definizione è ben posta.

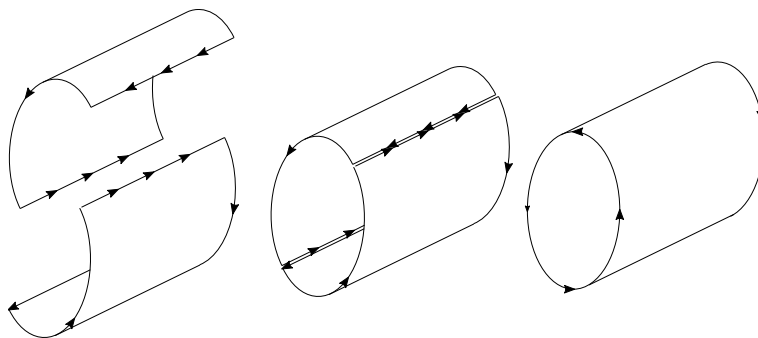
Diremo inoltre che un punto $P \in S$ è *punto regolare per S* se esiste una decomposizione S_1, \dots, S_n per S ed esiste un indice i tra 1 ed n per cui $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$. Diremo che P è *singolare* se P non è regolare e indicheremo

$$\Sigma^*(S) := \{\text{punti singolari per } S\};$$

notiamo che $\Sigma(S) \subset \Sigma^*(S)$. Se $P \in S$ è regolare possiamo definire il piano tangente e la direzione normale a S in P ponendo:

$$T_P(S) := T_P(S_i), \quad N_P(S) := N_P(S_i)$$

Questa definizione è ben posta dato che se $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$ allora $P \notin S_j$ per $i \neq j$ (dunque i è unico) e il piano tangente $T_P(S_i)$ è ben definito (essendo S_i parametrica); inoltre per la (b) del lemma (7.4.2) la definizione di $T_P(S)$ non dipende dalla decomposizione scelta per rappresentare S .



7.4.4 Osservazione. Non è detto che tutti i “punti di incollamento” siano singolari. Per esempio se $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (la sfera unitaria) possiamo decomporre S come $S^+ \cup S^-$ dove:

$$S^+ := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \quad S^- := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}.$$

Notiamo che S^+ ed S^- sono i grafici delle due funzioni $\pm f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$, dove $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $B := \{x^2 + y^2 < 1\}$. Allora

$$\Sigma(S^+) = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\} = \Sigma(S^-),$$

da cui si vede che $\Sigma(S) = \emptyset$ (perché non ci sono punti in $\Sigma(S^+)$ fuori da S^- o viceversa – in effetti S^+ e S^- vengono incollate sull’equatore $\Sigma(S^+) = \Sigma(S^-)$). Da questo segue che $\Sigma^*(S) \subset \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Però possiamo ottenere S anche incollando S_1 e S_2 dove

$$S_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}, \quad S_2 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \leq 0\}.$$

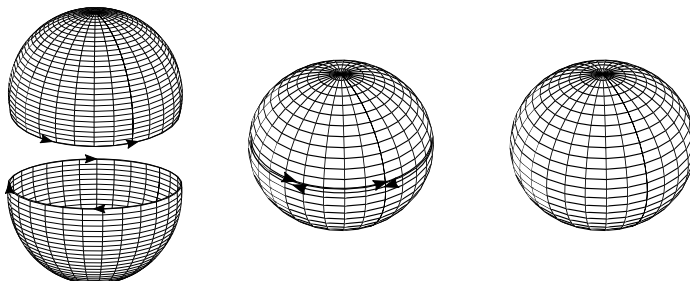
(che sono dei grafici di $x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}$). Così facendo i punti di incollamento sono $\{y^2 + z^2 = 1, x = 0\}$ e quindi $\Sigma^*(S) \subset \{y^2 + z^2 = 1, x = 0\}$. Ma possiamo anche ottenere S incollando S_3 e S_4 dove

$$S_3 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}, \quad S_4 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \leq 0\}.$$

(che sono dei grafici di $y = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}$) e ora troviamo $\Sigma^*(S) \subset \{x^2 + z^2 = 1, x = 0\}$. Dato che

$$\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cap \{y^2 + z^2 = 1, x = 0\} \cap \{x^2 + z^2 = 1, x = 0\} = \emptyset$$

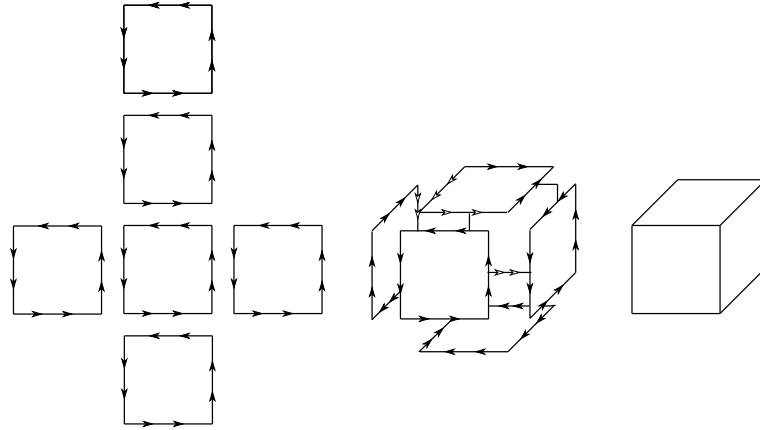
ne deduciamo che $\Sigma^*(S) = \emptyset$.



7.4.5 Esempio. La frontiera ∂Q del cubo $Q := [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ è una superficie regolare a tratti che si può ottenere incollando le sei facce

$$F_i^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in Q : x_i = 1\}, \quad F_i^- := \{(x_1, x_2, x_3) \in Q : x_i = -1\}$$

In questo caso i punti singolari sono gli “spigoli” mentre $\Sigma(\partial Q) = \emptyset$.



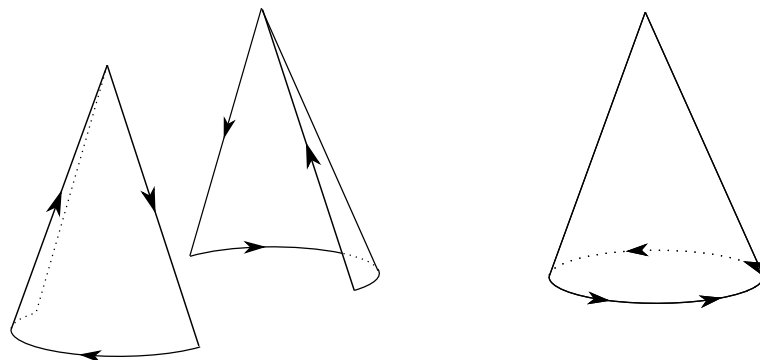
7.4.6 Teorema. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto regolare di \mathbb{R}^3 , cioè $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : G(\mathbf{x}) < 0\}$ per una opportuna $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con G di classe \mathcal{C}^1 e $\nabla G(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per tutte le \mathbf{x} per cui $G(\mathbf{x}) = 0$. Ricordiamo che in questo caso $S := \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : G(\mathbf{x}) = 0\}$. Allora S è una superficie regolare e $\Sigma(S) = \emptyset$. Supponiamo Ω limitato.

Analogamente se Ω è regolare a tratti e la sua frontiera $S = \partial\Omega$ è una superficie regolare a limitati tratti in \mathbb{R}^3 senza bordo ($\Sigma(S) = \emptyset$).

Idea di dimostrazione. Si tratta di un'applicazione del teorema del Dini in quanto, se $\mathbf{x}_0 \in S$ e se $\frac{\partial G}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, allora esiste un intorno $U = U_{\mathbf{x}_0}$ di \mathbf{x}_0 tale che $S \cap U$ grafico di una funzione in cui la variabile i -esima dipende dalle altre due. Usando la limitatezza di Ω si può mostrare che un numero finito di $U_{\mathbf{x}_i}$ ricopre S e quindi S si ottiene incollando un numero finito di grafici. \square

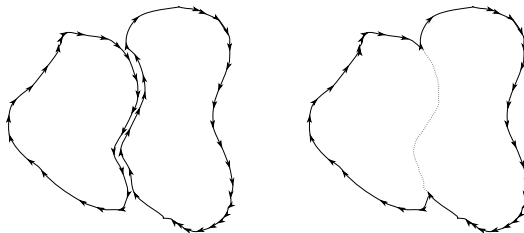
7.4.7 Osservazione. Sia la sfera che il cubo ricadono nel caso considerato nel teorema precedente. La sfera è il bordo di un aperto regolare, il cubo è bordo di un aperto regolare a tratti.

Mediante la definizione generale possiamo anche recuperare il cono (che non ha piano tangente nel vertice) vedendolo come unione di due “mezzi cono”; in questo modo ognuna delle due metà è una superficie parametrica secondo la definizione (7.1.1), dato che il vertice viene confinato sul bordo di ognuno dei due pezzi (e sul bordo chiedo solo che la parametrizzazione sia continua).

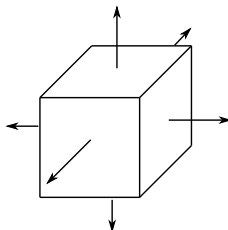


7.4.8 Definizione. Sia S una superficie regolare a tratti. Diremo che S è *orientabile* se esiste un numero finito di superfici parametriche orientabili $(S_1, \hat{\nu}_1), \dots, (S_n, \hat{\nu}_n)$ tali che S_1, \dots, S_n è una decomposizione per S (come dalla definizione (7.4.1)) e inoltre se $\mathbf{x} \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$ con $i \neq j$ allora i due bordi $\Sigma(S_i)$ e $\Sigma(S_j)$ (orientati coerentemente con $\hat{\nu}_i$ e $\hat{\nu}_j$ come in (7.2.8)) hanno verso opposto in \mathbf{x} .

In sostanza S è orientabile se S si ottiene incollando un numero finito di superfici parametriche orientate in modo che nei punti di incollamento i versi dei bordi che si incollano siano tra loro opposti.



Chiameremo *superficie orientata* una coppia $(S, \hat{\nu})$ dove S è una superficie orientabile e $\hat{\nu}$ è un campo continuo di vettori unitari definito su $\Sigma^*(S)$ tale che, se $(S_i, \hat{\nu}_i)$ sono come detto sopra, allora $\hat{\nu}_i(\mathbf{x}) = \hat{\nu}(x)$ per ogni $\mathbf{x} \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$, $i = 1, \dots, n$.



L'orientazione $\hat{\nu}$ su S permette di definire il verso di $\Sigma(S)$. Infatti, prese $(S_i, \hat{\nu}_i)$ come sopra, ogni $\Sigma(S_i)$ è descritto da una famiglia finita di curve chiuse con verso coerente con $\hat{\nu}_i$ (vedi (7.4.1); in particolare ogni punto $\mathbf{x} \in \Sigma(S)$ (che per definizione sta in uno e uno solo $\Sigma(S_i)$) si trova allora su una (e una sola) di queste curve e “incollando” tutti questi tratti di curve si ottiene una descrizione di $\Sigma(S)$. Si può dimostrare che se si cambiano le superfici $(S_i, \hat{\nu}_i)$ che decompongono S , mantenendo l'ipotesi che $\hat{\nu}_i = \hat{\nu}$ su $S \setminus \Sigma(S_i)$, allora il verso delle nuove curve con cui si descrive $\Sigma(S)$ coincide con il precedente. In questo modo il verso di $\Sigma(S)$ è ben definito.

Se S è connessa allora ci sono solo due possibili modi di dare un'orientazione su S e di conseguenza due possibili modi di introdurre un verso su $\Sigma(S)$.

7.4.9 Definizione. Siano S_1 e S_2 due superfici regolari a tratti. Supponiamo che $S_1 \cap S_2 \subset \Sigma(S_1) \cap \Sigma(S_2)$. Allora $S := S_1 \cup S_2$ è ancora una superficie regolare a tratti. Infatti presa una decomposizione $S_{1,1}, \dots, S_{1,n}$ per S_1 e una decomposizione $S_{2,1}, \dots, S_{2,m}$ per S_2 si vede facilmente che $S_1 \cap S_2 \subset \Sigma(S_1) \cap \Sigma(S_2)$, $S_{2,1}, \dots, S_{2,m}$ è una suddivisione per S .

Supponiamo ora che ogni S_i sia orientabile e che $\hat{\nu}_i$ sia un'orientazione per S_i ($i = 1, 2$). Supponiamo inoltre che oltre alla proprietà $S_1 \cap S_2 \subset \Sigma(S_1) \cap \Sigma(S_2)$ si abbia che in ogni $\mathbf{x} \in \Sigma(S_1) \cap \Sigma(S_2)$ il verso di $\Sigma(S_1)$ in \mathbf{x} sia opposto al verso di $\Sigma(S_2)$ in \mathbf{x} . Allora $S = S_1 \cup S_2$ è orientabile e, posto $\hat{\nu}(\mathbf{x}) := \hat{\nu}_i(\mathbf{x})$ se $\mathbf{x} \in S_i \setminus \Sigma(S)$, si ha che $\hat{\nu}$ è un'orientazione per S .

Conveniamo di scrivere $(S, \hat{\nu}) = (S_1, \hat{\nu}_1) \vee (S_2, \hat{\nu}_2)$ (l'operazione di “incollamento”, indicata con “ \vee ”, opera tra superfici orientate). Notiamo che, se $(S_1, \hat{\nu}_1), \dots, (S_n, \hat{\nu}_n)$ è una decomposizione per $(S, \hat{\nu})$, allora $(S, \hat{\nu}) = (S_1, \hat{\nu}_1) \vee \dots \vee (S_n, \hat{\nu}_n)$.

7.4.10 Definizione. Sia S una superficie regolare a tratti e sia $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Diciamo che f è *misurabile* su S e se esiste una decomposizione S_1, \dots, S_n per S tale che f è misurabile su ogni S_i , $i = 1, \dots, n$. Se f è misurabile su S e $f \geq 0$, definiamo l'integrale di f su S come

$$\iint_S f d\sigma := \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f d\sigma.$$

Questo integrale può risultare $+\infty$. Si può dimostrare che le nozioni di misurabilità e di integrale non dipendono dalla decomposizione S_1, \dots, S_n . È facile vedere che f è misurabile su S se e solo se $|f|$ è misurabile su S se e solo se la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- sono misurabili su S .

Diciamo che f è integrabile su S se f è misurabile su S e

$$\iint_S f^+ d\sigma < +\infty \quad , \quad \iint_S f^- d\sigma < +\infty$$

Se f è integrabile su S definiamo l'integrale di f su S come

$$\iint_S f d\sigma = \iint_S f^+ d\sigma - \iint_S f^- d\sigma.$$

In questo caso l'integrale è per forza finito.

Se $\vec{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo, diremo che \vec{f} è *misurabile/integrabile* su S se le componenti f_1, f_2, f_3 di \vec{f} sono *misurabili/integrabili*.

7.4.11 Definizione. Sia $(S, \hat{\nu})$ una superficie regolare a tratti orientata e sia $\vec{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo integrabile su S . Definiamo il *flusso di \vec{f} attraverso $(S, \hat{\nu})$* come

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} d\sigma := \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \vec{f} \cdot \hat{\nu} ds.$$

7.5 Il teorema della divergenza

7.5.1 Definizione. Supponiamo che Ω sia un aperto di \mathbb{R}^3 e che $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia un campo di classe \mathcal{C}^1 . Chiameremo *divergenza di \vec{f}* la funzione (scalare):

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

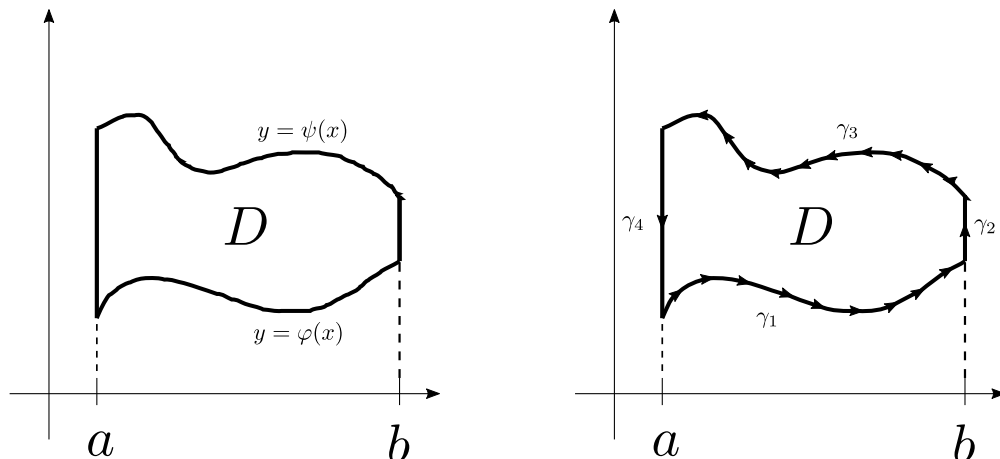
7.5.2 Teorema (Formula di Gauss-Green). *Supponiamo che D sia un dominio regolare limitato di \mathbb{R}^2 e che $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia un campo continuo su D e \mathcal{C}^1 su \mathring{D} . Siano $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ delle curve regolari a tratti, chiuse descrivono il bordo di D coerentemente con la normale uscente da D , nel modo indicato nella proposizione (3.7.6)*

$$\sum_{i=0}^n \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \quad (7.12)$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione in un caso particolare – diremo poi a grandi linee come dal caso particolare si può passare al caso generale. Consideriamo dunque il caso in cui

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq y, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

dove $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni \mathcal{C}^1 .



Allora si ha:

$$\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dy \right) dx$$

xxs

□

7.5.3 Osservazione. Come già osservato la sommatoria a sinistra di (7.12) non dipende dalle curve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_n$ utilizzate per descrivere ∂D (purché rispettino le condizioni dette nella proposizione (3.7.6)). Dunque possiamo chiamare il termine a sinistre di (7.12) *l'integrale di \vec{f} sul bordo di D* e riscrivere la (7.12) come:

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \quad (7.13)$$

È vitale ricordarsi che per fare l'integrale (curvilineo) a sinistra bisogna descrivere ∂D con verso coerente con D , come detto sopra.

Capitolo 8

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie

8.1 Il teorema di esistenza e unicità di Cauchy

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Consideremo il seguente *sistema di equazioni differenziali ordinarie*:

$$Y' = F(x, Y) \quad (\text{S})$$

8.1.1 Definizione. Diremo che $Y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione di (S) (sull'intervallo $]a, b[$) se Y è di classe \mathcal{C}^1 su $]a, b[$, se $(x, Y(x)) \in \Omega$ e $Y'(x) = F(x, Y(x))$ per ogni x in $]a, b[$.

Notiamo che il formalismo vettoriale che stiamo usando significa che $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix}$, $F(x, Y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ \vdots \\ F_N(x, y_1, \dots, y_N) \end{pmatrix}$ e che (S) equivale a:

$$\begin{cases} y_1'(x) = F_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ \vdots \\ y_N'(x) = F_N(x, y_1, \dots, y_N) \end{cases}$$

Se $(x_0, Y_0) \in \Omega$ considereremo anche il *problema di Cauchy*

$$(\text{S}.x_0, Y_0)$$

che consiste di trovare una soluzione $Y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^N$ definita su un opportuno intervallo $]a, b[$, con $a < x_0 < b$, e tale che sia verificata la *condizione iniziale* $Y(x_0) = Y_0$.

8.1.2 Teorema. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che

- (a) F è continua (nelle $N + 1$ variabili x, y_1, \dots, y_N);
- (b) F è lipschitziana in Y uniformemente rispetto a x ; questo significa che esiste una costante $L \geq 0$ tale che:

$$\|F(x, Y_2) - F(x, Y_1)\|_N \leq \|Y_2 - Y_1\|_N \quad \forall x, Y_1, Y_2 \text{ tali che } (x, Y_1), (x, Y_2) \in \Omega. \quad (8.1)$$

Allora **esiste unica una soluzione locale** per il problema di Cauchy $(S.x_0, Y_0)$. Questo significa che esiste $\varepsilon > 0$ e una soluzione $Y :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^N$ definita sull'intervallo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ che verifica la condizione iniziale $Y(x_0) = Y_0$. Inoltre tale Y è unica, nel senso che se $Y_1 :]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[$ è un'altra soluzione di $(S.x_0, Y_0)$ con $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, necessariamente $Y_1(x) = Y(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[$.

Dimostrazione. (★) Prima di tutto osserviamo che $Y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^N$ è soluzione di $(S.x_0, Y_0)$ se e solo se $(x, F(x, Y(x))) \in \Omega$ per ogni $x \in]a, b[$ e vale

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(t, Y(t)) dt \quad \forall x \in]a, b[\quad (8.2)$$

Questo fatto è una conseguenza del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Dato che $(x_0, Y_0) \in \Omega$ e Ω è aperto possiamo trovare ρ_0 tale che

$$|x - x_0| \leq \rho, \|Y - Y_0\|_N \leq \rho \Rightarrow (x, Y) \in \Omega.$$

Se $0 < \varepsilon \leq \rho$ consideriamo lo spazio normato

$$X_\varepsilon := \{Y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^N : Y \text{ è continua}\}$$

dotato della norma infinito (associata alla convergenza uniforme): $\|Y\|_\infty := \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} \|Y(x)\|$.

Come abbiamo già detto in precedenza X_ε è uno spazio completo. Consideriamo anche il sottoinsieme $A \subset X_\varepsilon$:

$$A := \{Y \in X_\varepsilon : \|Y(x) - Y_0\|_N \leq \rho \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\} = \{Y \in X_\varepsilon : \|Y - Y_0\|_\infty \leq \rho\}$$

(il disco con centro nella funzione costante Y_0 e raggio ρ).

Notiamo che se $Y \in A$ allora

Vogliamo usare il Teorema delle Contrazioni (1.7.9). Definiamo l'operatore (la funzione) $T : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ ponendo:

$$T(Y)(x) := Y_0 + \int_{x_0}^x F(t, Y(t)) dt \quad \forall t \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon];$$

questa definizione associa a ogni funzione Y in X_ε una funzione $T(Y)$ il cui valore, x per x , è definito sopra.

Se $Y_2, Y_1 \in X$ e $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ si ha:

$$\begin{aligned} \|T(Y_2)(x) - T(Y_1)(x)\|_N &= \left\| \int_{x_0}^x (F(t, Y_2(t)) - F(t, Y_1(t))) dt \right\|_N \leq \\ &\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \|F(t, Y_2(t)) - F(t, Y_1(t))\|_N dt \leq L \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \|Y_2(t) - Y_1(t)\|_N dt \leq 2\varepsilon L \|Y_2 - Y_1\|_\infty, \end{aligned}$$

Da cui, facendo il massimo per $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ si ottiene:

$$\|T(Y_2) - T(Y_1)\|_\infty \leq 2\varepsilon L \|Y_2 - Y_1\|_\infty.$$

□

8.2 L'esponenziale di una matrice

8.2.1 Definizione. Sia A una matrice $N \times N$ a coefficiento complessi. Definiamo la matrice $\exp(A) = e^A$ mediante la formula:

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Questa definizione ha senso dato che nello spazio lineare $\mathcal{M}(N, N)$ delle matrici $N \times N$ (vedi l'esempio (1.2.15)) è definita la norma, e quindi le nozioni di limite e di serie. Inoltre la serie scritta sopra è convergente dato che è assolutamente convergente. Infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n < +\infty$$

8.2.2 Proposizione. Valgono le seguenti proprietà.

(a) $e^0 = I$.

(b) Se A e B commutano ($AB = BA$), allora:

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Dimostrazione. La (a) è ovvia. Per la (b) si ragiona come nella dimostrazione fatta alla fine dell'esempio (5.3.10), usando la versione per le serie del Teorema (5.3.11) (che si dimostra):

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} A^m \frac{1}{(n-m)!} B^{n-m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} A^m B^{n-m} \right) \underbrace{=}_{(*)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}. \end{aligned}$$

Nel passaggio “(*)” è necessario che A e B commutino. □

8.2.3 Proposizione. Consideriamo la funzione $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(N, N)$ definita da:

$$W(t) := \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Allora W è derivabile e $W'(t) = AW(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Diamo per buono che le proprietà dimostrate per le serie di potenze si estendono al caso in cui i coefficienti a_n sono delle matrici (e indichiamo con t la variabile invece che con x). Allora:

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \\ &= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n)!} A^n = AW(t). \end{aligned}$$

□

8.2.4 Lemma (L'esponenziale di un blocco di Jordan). *Supponiamo che $J = J_r(\lambda)$ con r intero e $\lambda \in \mathbb{C}$ (vedi la Definizione (8.3.7)). Allora:*

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{r-2}/(r-2)! & t^{r-1}/(r-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{r-3}/(r-3)! & t^{r-2}/(r-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere $J = \lambda I + B$ dove:

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_r$$

La matrice B (che ha tutti elementi nulli tranne quelli della diagonale immediatamente sopra la principale, che è riempita di 1) è un caso particolare di $B_{r,i}$ definita da:

$$B_{r,i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_r \quad \leftarrow \text{riga } i \text{ esima} \quad i = 1, \dots, r-1.$$

in cui la diagonale piena di 1 è l' i -esima sopra la principale. Si verifica facilmente che:

$$B^k = B_{r,k} \quad \text{se } k = 1, \dots, r-1 \quad , \quad B^k = 0 \quad \text{se } k \geq r$$

(in particolare $B = B_{r,1}$). Allora, usando le definizioni:

$$e^{\lambda I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} I^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} I = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) I = e^{\lambda t} I,$$

mentre

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = I + tB_{r,1} + \frac{t^2}{2!} B_{r,2} + \frac{t^3}{3!} B_{r,3} + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} B_{r,r-1}$$

(dato che per $n \geq r$ si ha $B^n = 0$). Dunque e^{tB} è proprio la matrice scritta a destra nella formula (8.3), mentre è chiaro che la moltiplicazione per $e^{t\lambda I} = e^{\lambda t} I$ equivale alla moltiplicazione per il fattore $e^{\lambda t}$. \square

8.2.5 Proposizione (Esponenziale di una matrice di Jordan). *Se $A = MJM^{-1}$ dove M è una matrice invertibile e J è della forma*

$$J = \begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

con $r_1 + \dots + r_k = N$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ (non necessariamente distinti), allora:

$$e^{tA} = M \begin{bmatrix} e^{tJ_{r_1}(\lambda_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_{r_k}(\lambda_k)} \end{bmatrix} M^{-1} \quad (8.4)$$

Questa formula unita alla precedente (8.3) permette il calcolo completo dell'esponenziale di e^{tA}

Dimostrazione. Basta osservare che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (MJM^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} MJ^n M^{-1} = M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n \right) M^{-1} = M e^{tJ} M^{-1}$$

e che:

$$J^n = \begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1)^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{r_k}(\lambda_k)^n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{bmatrix} \exp(tJ_{r_1}(\lambda_1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(tJ_{r_k}(\lambda_k)) \end{bmatrix}$$

□

8.3 La decomposizione di Jordan

Sia A una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi. Vediamo in questo capitolo come in un'opportuna base per \mathbb{R}^N , si può rappresentare la matrice in una forma "quasi diagonale".

8.3.1 Notazione. Come noto si definisce il *polinomio caratteristico* di A

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

e usando il teorema fondamentale dell'algebra si può scrivere

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

con $k \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ diversi tra loro e $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ con $m_i \geq 1$ e $m_1 + \dots + m_k = N$. I numeri λ_i sono detti *autovalori* di A e gli interi m_i , indicati con $m_A(\lambda_i)$, sono detti *molteplicità algebrica* di λ_i .

Per come sono definiti i λ_i si ha che

$$\text{Ker}(A - \lambda_i I) \neq \{0\}$$

Questo spazio viene detto *autospatio di A relativo all'autovalore λ_i* mentre i suoi elementi non nulli sono gli *autovettori di A relativi a λ_i* e cioè i vettori $e \neq \mathbf{0}$ tali che

$$Ae = \lambda_i e.$$

La dimensione di $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$ viene detta *molteplicità geometrica di λ_i* e viene indicata con $m_G(\lambda_i)$.

8.3.2 Lemma. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A . Allora esiste un intero $h = h_\lambda \geq 1$ tale che:

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^{h-1} \subsetneq \text{Ker}(A - \lambda I)^h = \text{Ker}(A - \lambda I)^{h+1}.$$

Inoltre si ha:

$$m_A(\lambda) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^h) (= \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^{h'}) \text{ se } h' \geq h).$$

In particolare $m_G(\lambda) \leq m_A(\lambda)$ e $m_G(\lambda) = m_A(\lambda)$ se e solo se $h = 1$.

8.3.3 Notazione. Se λ è un autovalore di A e h_λ è come nel lemma (8.3.2), chiamiamo *autospatio generalizzato* lo spazio di dimensione $m_A(\lambda)$:

$$N(\lambda) := \text{Ker}(A - \lambda I)^{h_\lambda}$$

e chiamiamo *autovettori generalizzati* i suoi elementi non nulli.

8.3.4 Notazione. Se $r \geq 1$ è un intero chiamo *sequenza di lunghezza r* (relativa all'autovalore λ) una r -upla di vettori non nulli e_1, e_2, \dots, e_r tali che:

$$(A - \lambda I)e_r = e_{r-1}, (A - \lambda I)e_{r-1} = e_{r-2}, \dots, (A - \lambda I)e_2 = e_1, (A - \lambda I)e_1 = \mathbf{0}.$$

Se poniamo $B = A - \lambda I$, indicheremo una sequenza con $e_r \xrightarrow{B} e_{r-1} \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} \mathbf{0}$. È chiaro che in questa situazione gli e_i appartengono a $N(\lambda)$ e $r \leq h_\lambda$.

8.3.5 Proposizione. (a) Se $\lambda \neq \mu$ sono due autovalori, allora $N(\lambda) \cap N(\mu) = \{0\}$.

(b) Se λ è un autovalore, $B = A - \lambda I$ e $e_r \xrightarrow{B} e_{r-1} \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{B} e_1 \xrightarrow{B} \mathbf{0}$, ($e_1 \neq 0$) allora gli e_i sono tra loro linearmente indipendenti.

(c) Nelle stesse ipotesi di (b), se $e'_r \xrightarrow{B} e'_{r-1} \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{B} e'_1 \xrightarrow{B} \mathbf{0}$, è un'altra sequenza relativa a λ e se e_1 e e'_1 sono indipendenti, allora tutti gli e_i e gli e'_j sono tra loro linearmente indipendenti.

8.3.6 Teorema (forma di Jordan). Sia A una matrice $N \times N$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori. Allora lo spazio \mathbb{C}^N è somma diretta degli $N(\lambda_i)$, per $i = 1, \dots, k$:

$$\mathbb{R}^N = N(\lambda_1) \oplus \dots \oplus N(\lambda_k).$$

Inoltre se λ è un autovalore di molteplicità algebrica m_A e molteplicità geometrica m_G , allora esistono m_G sequenze

$$e_{1,r_1} \xrightarrow{B} e_{1,r_1-1} \xrightarrow{B} \dots e_{1,1} \xrightarrow{B} \mathbf{0}, \dots, e_{m_G,r_{m_G}} \xrightarrow{B} e_{m_G,r_{m_G}-1} \xrightarrow{B} \dots e_{m_G,1} \xrightarrow{B} \mathbf{0}$$

dove $B = A - \lambda I$, tali che $e_{i,1}$ sono indipendenti e $N(\lambda)$ è generato dagli $e_{i,j}$:

$$N(\lambda) = \text{span} \{e_{i,j} : i = 1, \dots, m_G, j = 1, \dots, r_i\}$$

In altri termini gli $e_{i,1}$, $i = 1, \dots, m : G$, sono indipendenti e si ha:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{m_G} = m_A.$$

8.3.7 Definizione. Siano $\lambda \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{N}$. Definiamo il “blocco di Jordan” di lunghezza r e autovalore λ :

$$J_r(\lambda) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right]}_{r \text{ colonne}} \left. \vphantom{\left[\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right]} \right\} r \text{ righe}.$$

8.3.8 *Osservazione.* Se ci si mette nella base dei vettori individuati dal teorema (8.3.6), allora A (la funzione lineare associata ad A nella base canonica) viene descritta da una matrice J “quasi diagonale”, fatta come segue:

$$J := \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J(\lambda_k) \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad J(\lambda_i) := \begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{r_{m_G}(\lambda_i)}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Più precisamente si può scrivere $A = M J M^{-1}$, dove J è la matrice indicata sopra e dove M ha come colonne gli elementi di tutte le sequenze indicate sopra, nell'ordine naturale:

$$M = \left[e_{1,1}(\lambda_1) | \cdots | e_{1,r_1}(\lambda_1) | \cdots | e_{m_G(\lambda_1),1}(\lambda_1) | \cdots | e_{m_G(\lambda_1),r_{m_G(\lambda_1)}}(\lambda_1) | e_{1,1}(\lambda_2) | \cdots \right]$$

Vediamo come si fa operativamente a trovare tutte le sequenze necessaria per costruire J ed M . Il punto sarà di trovare tutte le sequenze relative a un generico autovalore, dopo di che si ripeterà il procedimento per ognuno degli autovalori.

Sia dunque $\lambda = \lambda_i$ un autovalore fissato e indichiamo $B := A - \lambda I$. Come già detto gli autovettori sono gli elementi non nulli di $\text{Ker}(B)$.

(1) Calcoliamo le potenze B^i fino a trovare l'esponente r tale che $\dim(\text{Ker}(B^{r-i})) < \dim(\text{Ker}(B^r)) = \dim(\text{Ker}(B^{r+i}))$.

Per questo può essere utile cercare r non modo che $\text{Rank}(B^{r-i}) > \text{Rank}(B^r) = \text{Rank}(B^{r+i})$, dato che $\dim(\text{Ker}(B^i)) = N - \text{Rank}(B^i)$. Ricordiamo che il rango di una matrice B è la dimensione dell'immagine, o anche il numero di righe/colonne di B linearmente indipendenti, oppure ancora la dimensione del massimo minore di B avente determinante non nullo.

Indichiamo con $m_i := \dim(\text{Ker}(B^i))$, di modo che

$$0 = m_0 < m_G(\lambda) = m_1 < m_2 < \cdots < m_r = m_A(\lambda).$$

Poniamo inoltre $n_i := m_i - m_{i-1} > 0$, per $i = 1, \dots, r$.

(2) Dato che $m_r > m_{r-1}$ possiamo trovare $n_r (= m_r - m_{r-1})$ elementi linearmente indipendenti in $\text{Ker}(B^r) \setminus \text{Ker}(B^{r-1})$. Indichiamo questi vettori con $e_{r,1}, \dots, e_{r,n_r}$.

(3) Mettiamoci ora in $\text{Ker}(B^{r-1}) \setminus \text{Ker}(B^{r-2})$. Poniamo:

$$e_{r-1,1} = B e_{r,1}, \dots, e_{r-1,n_r} = B e_{r,n_r}$$

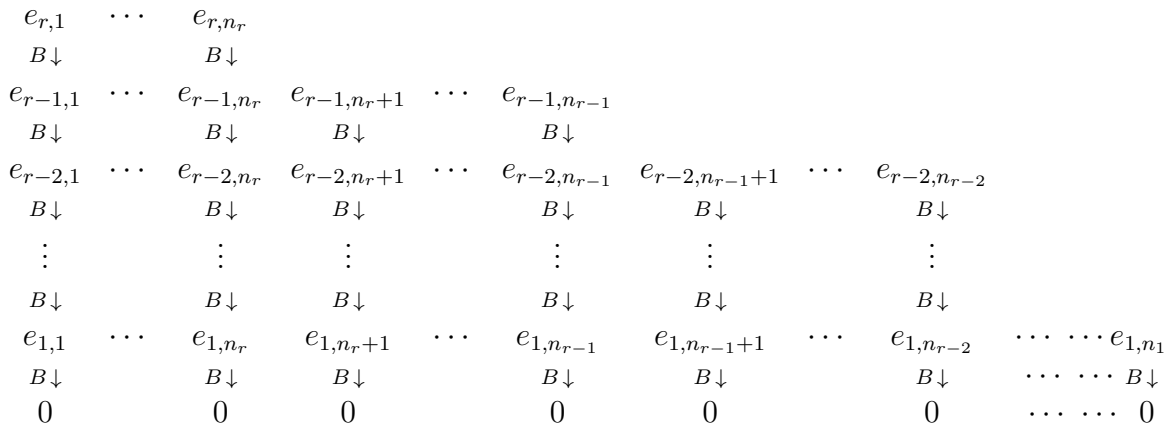
Allora questi vettori $e_{r-1,i} = B e_{r,i}$ sono linearmente indipendenti e si trovano in $\text{Ker}(B^{r-1}) \setminus \text{Ker}(B^{r-2})$. In particolare $n_{r-1} = \dim(\text{Ker}(B^{r-1})) - \dim(\text{Ker}(B^{r-2})) \geq n_r$. Potrebbe succedere che $n_{r-1} > n_r$: in questo caso possiamo aggiungere degli opportuni $e_{r-1,n_r+1}, \dots, e_{r-1,n_{r-1}}$ in modo che gli $e_{r-1,j}$ con $j = 1, \dots, n_{r-1}$ siano in $\text{Ker}(B^{r-1}) \setminus \text{Ker}(B^{r-2})$ e siano tutti linearmente indipendenti.

(iterazione di 3) Ammettendo di avere costruito $e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i}$ linearmente indipendenti in $\text{Ker}(B^i) \setminus \text{Ker}(B^{i-1})$ ($i \geq 2$), possiamo definire

$$e_{i-1,1} = B e_{i,1}, \dots, e_{i-1,n_i} = B e_{i,n_i}$$

e aggiungere (eventualmente) a questi vettori degli opportuni $e_{i-1,n_i+1}, \dots, e_{i-1,n_{i-1}}$ in modo che gli $e_{i-1,j}$ con $j = 1, \dots, n_{i-1}$ siano in $\text{Ker}(B^{i-1}) \setminus \text{Ker}(B^{i-2})$ e siano linearmente indipendenti.

Alla fine di questo procedimento abbiamo il seguente diagramma:



che mostra come abbiamo costruito n_r sequenze di lunghezza r , $n_{r-1} - n_r$ sequenze di lunghezza $r - 1$ e così via (fino a $n_1 - n_2$ sequenze di lunghezza uno).

8.3.9 Osservazione. Nel diagramma sopra abbiamo r righe (escludendo l'ultima riga di zeri), dove ricordiamo che r è il primo intero per cui $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^r) = m_A(\lambda)$. Il numero complessivo di elementi $e_{i,j}$ è pari alla molteplicità algebrica $m_A(\lambda)$. Il numero di elementi $e_{i,l}$ della prima riga è pari alla molteplicità geometrica $m_G(\lambda)$ (cioè $n_1 = m_G(\lambda)$). Ogni colonna corrisponde a una sequenza e dunque a un blocco di Jordan $J_h(\lambda)$, dove $h \leq r$ è "l'altezza della colonna" (cioè la lunghezza della sequenza). Per come è costruito il diagramma ci deve essere almeno una colonna di altezza r e dunque r è la lunghezza della massima sequenza che si riesce a costruire (o la dimensione del blocco di Jordan più grande); naturalmente possono esserci degli $h < r$ (cioè dei blocchi di dimensione minore di r).

Se consideriamo un $h \leq r$ allora gli elementi $e_{i,j}$ che compongono le righe dalla prima alla h -esima (in altri termini gli $e_{i,j}$ con $i \leq h$) generano il $\text{Ker}(A - \lambda I)^h$. Questo perché, per come è stato costruito il diagramma, il numero di elementi della riga h -esima è pari alla differenza $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^h) - \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^{h-1})$ (nel caso della prima riga a $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = m_G(\lambda)$).

In definitiva i numeri m_1, m_2, \dots, m_r definiti da $m_i := \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)^i)$ determinano la struttura della matrice $J(\lambda)$, cioè di tutti i blocchi di Jordan relativi all'autvalore λ .

Si noti anche che dalla costruzione fatta su vede che i numeri $n_i := m_i - m_{i-1}$ (convenendo $m_0 = 0$) sono positivi e decrescenti. Il numero n_i corrisponde in effetti alla lunghezza della riga i -esima del diagramma. Se si introducono gli ulteriori incrementi: $\delta_i := n_i - n_{i+1}$ ($\delta_r := n_r$) allora δ_i corrisponde al numero di blocchi di dimensione i ($i = 1, \dots, k$).

8.4 Errata Corrige

Modifiche principali introdotte dopo la versione del 5 ottobre. I riferimenti sono espressi in termini della nuova versione.

- ★ Aggiunta un osservazione:

Osservazione 1.2.4 Si ha:

$$| \|x_2\| - \|x_1\| | \leq \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}.$$

Infatti $\|x_2\| = \|x_2 - x_1 + x_1\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1\|$. Scambiando x_2 con x_1 , con facili calcoli si ha:

$$- \|x_2 - x_1\| \leq \|x_2\| - \|x_1\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

che equivale a quanto enunciato sopra.

- ★ **Corretta** la formula al punto 5 della 1.2.29: (la seconda è un'eguaglianza):

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B} \quad , \quad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B} \quad , \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- Modificato il punto 8 della 1.2.29:

Si ha sempre $\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B)$. Se $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ vale l'eguaglianza:

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B).$$

Questo è vero se A e B sono chiusi (per (5)) e dunque:

$$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B) \quad \text{se } A \text{ e } B \text{ sono chiusi.}$$

- Cambiata un po' la dimostrazione del punto 8 della 1.2.29:

Usando la definizione di frontiera, le (5) e alcune proprietà insiemistiche, ha:

$$\begin{aligned} \partial(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \setminus \overset{\circ}{A \cap B} = \overline{A \cap B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}) \subset \overline{A \cap B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}) = \\ &= \overline{A \cap B} \cap (\overline{\overset{\circ}{A}} \cup \overline{\overset{\circ}{B}}) = (\overline{A \cap B} \cap \overline{\overset{\circ}{A}}) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{\overset{\circ}{B}}) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

Da quanto sopra segue l'inclusione e anche l'eguaglianza quando $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- Modifiche al teorema 1.3.5 a pag. 23. In particolare è stato corretto il limite della composizione (punto 4) ed è stato aggiunto il passaggio al limite delle componenti (al punto 6)

Teorema 1.3.5 Siano \mathbb{X}, \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 spazi normati, $A \subset \mathbb{X}, B \subset \mathbb{X}_1, \mathbf{x}_0$ di accumulazione per A e \mathbf{y}_0 di accumulazione per B . Valgono i fatti seguenti (sottinteso che $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$).

- **(linearità del limite)** Siano $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{X}_1$. Se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$ allora $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.
- **(limite del prodotto)** Se $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e se $f_1(\mathbf{x}) \rightarrow l_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, allora il prodotto $f_1 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow l_1 \mathbf{l}_2$.
- Se $\mathbf{f}_1 : A \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{X}_1$, se una delle due è limitata e l'altra tende a zero, allora $\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow 0$.
- **(limite della composizione/cambio di variabile)** Se $\mathbf{f} : A \rightarrow B, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{y}_0$ con $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, se $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{X}_2$ e $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{l}$, allora $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{l}$.

- **(limite della restrizione)** Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{X}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$, se $A_1 \subset A$ e \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A_1 , allora la *restrizione* $\mathbf{f}|_{A_1} : A_1 \rightarrow \mathbb{X}$ tende ancora a \mathbf{l} .
- **(limite e componenti)** Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ se e solo se $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow l_i$ dove f_i e l_i indicano l' i -esima componente di \mathbf{f} e \mathbf{l} .

Inoltre per ogni $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$ e ogni $i = 1, \dots, N$ si ha:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} x_i = x'_i.$$

- **(permanenza del segno)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.
- **(monotonia del limite)** Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x}) \rightarrow l > 0$ e se $f(\mathbf{x}) \geq 0$, allora $l \geq 0$.
- **(teorema dei carabinieri)** Se $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e se $f(\mathbf{x}) \rightarrow l$, $h(\mathbf{x}) \rightarrow l$, allora $g(\mathbf{x}) \rightarrow l$.

••• Aggiunta la Proposizione 1.3.6

Proposizione 1.3.6 Siano A e \mathbf{x}_0 come nella proposizione precedente.

1. Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_M \rightarrow \|\mathbf{l}\|_M$.
2. Se $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, se $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2$.
3. Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, se (per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$) si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{v}$, allora $g(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda$.

Dimostrazione. La 1. dipende dalla proprietà della norma mostrata nell'Osservazione (1.2.4) (usando la definizione di limite).

Per la 2. si può notare che (aggiungendo e togliendo $\mathbf{f}_1(x) \cdot \mathbf{l}_2$):

$$|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2| \leq |f_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2)| + |(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1) \cdot \mathbf{l}_2| \leq \|f_1(\mathbf{x})\| \|\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_2\| + \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{l}_1\| \|\mathbf{l}_2\| \rightarrow 0.$$

(si è usata la disuguaglianza di Schwartz e il fatto che $\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\|$ è limitata, in quanto ha limite).

Dimostriamo la 3. Introduciamo la funzione $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2}$ che è ben definita (almeno vicino a \mathbf{x}_0 , dato che $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \rightarrow \|\mathbf{v}\| \neq 0$). Dato che $g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{l}$ e $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|^2}$, facendo il prodotto scalare:

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|^2} = \lambda.$$

□

••• Nella dimostrazione di 1.7.9 corretto un esponente nel calcolo che segue: (α^m invece di α^{m+1}):

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \left\| \sum_{k=m}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k \|f(x_0) - x_0\| \leq \\ &\leq \|f(x_0) - x_0\| \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k = \|f(x_0) - x_0\| \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

••• Introdotta la Definizione 1.5.4:

Definizione 1.5.4. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $c \in \mathbb{R}$ consideriamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \{f \leq c\} &:= \{x \in A : f(x) \leq c\}, & \{f < c\} &:= \{x \in A : f(x) < c\}, \\ \{f = c\} &:= \{x \in A : f(x) = c\}. \end{aligned}$$

diremo che $\{f \leq c\}$ è un *sottolivello* e che $\{f = c\}$ è un *insieme di livello* (per f relativamente a c).

- Aggiunto il Lemma 1.5.10 che serve nella dimostrazione di Weierstrass.
- Rimossa un'osservazione (la vecchia 1.5.10).
- Spostata la Proposizione 1.5.9 che è diventata 1.5.12.
- Cambiata la dimostrazione del Teorema di Weierstrass (che ora è 1.5.11).
- Aggiunto il Teorema di Weierstrass generalizzato 1.5.13.

••• Aggiunto un esempio di spazio vettoriale non completo. (NON E' STATO FATTO E NON E' RICHIESTO)

•••

Sono stati aggiunti il Lemma 2.3.9 e la Proposizione 2.3.10 (NON FATTI E NON RICHIESTI).

•••

Aggiunto il paragrafo 2.5 sulle curve come sottoinsiemi. Le dimostrazioni NON SONO STATE FATTE E NON SONO RICHIESTE