

# Capitolo 5

## Serie di Fourier

### 5.1 La serie di Fourier

Sia  $T > 0$  assegnato e per il resto di questo paragrafo poniamo  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  è un *periodo* assegnato e  $\omega_0$  è la corrispondente *frequenza angolare*).

In quanto segue considereremo funzioni  $T$ -periodiche a valori complessi; poniamo:

$$L_{per}^2(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f(t+T) = f(t) \quad \forall t, |f|^2 \text{ integrabile su } [0, T]\}.$$

Utilizzeremo in  $L_{per}^2(T)$  il prodotto scalare  $\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt$ .

Dato  $n$  intero relativo indicheremo con  $e_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione di  $L_{per}^2(T)$  definita da:

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{in\omega_0 t}$$

**5.1.1 Proposizione.** *Si ha*

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ T & \text{se } n = m. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Se  $n \neq m$  si ha:

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \int_0^T e^{in\omega_0 t} e^{im\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \left[ \frac{e^{i(n-m)\omega_0 t}}{i(n-m)\omega_0} \right]_0^T = 0$$

(perché  $t \mapsto e^{i(n-m)\omega_0 t}$  è periodica di periodo  $T$ ). Se  $n = m$ :

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \int_0^T e^{i(n-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T.$$

□

**5.1.2 Definizione.** Per  $n$  in  $\mathbb{N}$  poniamo

$$E_n := \left\{ \sum_{k=-n}^n \lambda_k \mathbf{e}_k : \lambda_k \in \mathbb{C}, k = -n, \dots, n \right\};$$

$E_n$  è il sottospazio di dimensione finita (pari a  $2n+1$ ) generato da  $\mathbf{e}_{-n}, \dots, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$ . Inoltre data una funzione  $f$  in  $L_{per}^2(T)$  poniamo:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k(t) \quad \text{dove } c_k := \frac{1}{T} \langle f, \mathbf{e}_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Chiameremo  $f_n$  *l'approssimante di Fourier* di  $f$  di ordine  $n$  e chiameremo *coefficienti di Fourier complessi* in numeri  $c_k$ .

5.1.3 *Osservazione.* I coefficienti di Fourier  $c_n$  sono definiti non appena la funzione  $f$  è integrabile. Inoltre essi formano una successione che tende a zero per  $n$  tendente all'infinito o a meno infinito. Quest'ultima proprietà segue dal Lemma di Riemann, dato che

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

In particolare i  $c_n$  sono limitati, cosa che peraltro si vede direttamente dalla definizione:

$$|c_n| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{T} \|f\|_1. \quad (5.1)$$

A questo punto ci possiamo chiedere se per  $n \rightarrow \infty$  le  $f_n$  tendano a  $f$  in qualche senso. La prima cosa che può venire in mente è che  $f_n(t) \rightarrow f(t)$   $t$  per ogni  $t$ , cioè che le  $f_n$  convergano puntualmente a  $f$ . Notiamo per inciso che per avere la convergenza uniforme ci vorrà come minimo la continuità di  $f$ , dato che le approssimanti  $f_n$  sono funzioni continue, anzi infinitamente derivabili. Vediamo un lemma preliminare.

**5.1.4 Lemma.** *Si ha*

$$f_n(t) = \int_0^T f(\tau) D_n(t - \tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.2)$$

dove  $D_n$  è il nucleo di Dirichlet definito da

$$D_n(x) := \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega_0 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre  $D_n$  ha le seguenti proprietà:

1.  $D_n(x + T) = D_n(x)$  per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ ;
2.  $\int_0^T D_n(x) dx = \int_0^T D_n(t - x) dx = 1$  per ogni  $t$  in  $\mathbb{R}$ ;
- 3.

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 x\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)} = \frac{1}{T} \left[ \frac{\sin(n\omega_0 x)}{\tan\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)} + \cos(n\omega_0 x) \right] & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{2n+1}{T} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si veda la figura (5.1) per il comportamento di  $D_n$  per alcuni valori di  $n$

*Dimostrazione.* Per dimostrare la (5.2) basta scrivere la definizione di  $f_n$ , sostituire ai  $c_k$  al loro espressione e scambiare sommatoria con l'integrale. È anche immediato constatare che  $D_n$  è  $T$ -periodico. Per vedere che  $\int_0^T D_n = 1$  basta notare che  $\int_0^T \mathbf{e}_k = 0$  se  $k \neq 0$  mentre  $\int_0^T \mathbf{e}_0 = T$ . Essendo  $D_n$   $T$ -periodico la seconda proprietà è immediata. Ricaviamo l'espressione di  $D_n(x)$  per  $x \neq 0$  (usando la formula per la progressione geometrica):

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{i\omega_0 k x} &= \sum_{k=-n}^n (e^{i\omega_0 x})^k = e^{-i\omega_0 n x} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i\omega_0 x})^k = e^{-i\omega_0 n x} \frac{(e^{i\omega_0 x})^{2n+1} - 1}{e^{i\omega_0 x} - 1} = \\ &= \frac{e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} \left( e^{i\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) x} - e^{-i\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) x} \right)}{e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} \left( e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} - e^{-\frac{i\omega_0 x}{2}} \right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 x\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

□

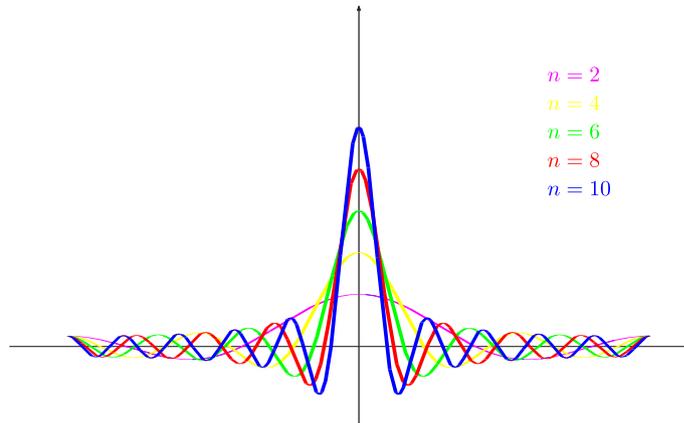


Figura 5.1: I nuclei di Dirichelet (tra  $-T/2$  e  $T/2$ )

**5.1.5 Teorema.** *Sia  $f$   $T$ -periodica e derivabile. Allora  $f_n$  converge puntualmente a  $f$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $t$ . Se  $f$  è derivabile, allora la funzione:

$$h_t(\tau) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(\tau)}{\sin(\omega_0(t - \tau)/2)} & \text{se } \tau \neq t, \\ \frac{f'(t)}{\omega_0/2} & \text{se } \tau = t. \end{cases}$$

è continua (basta usare De l'Hôpital). Dato che  $\int_0^T D_n(t - \tau) d\tau = 1$  possiamo scrivere  $f(t) = \int_0^T D_n f(t)(t - \tau) d\tau$  e allora, usando l'espressione di  $D_n(x)$ :

$$f(t) - f_n(t) = \int_0^T (f(t) - f(\tau)) D_n(t - \tau) d\tau = \int_0^T h_t(\tau) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_0(t - \tau)\right) d\tau.$$

Per il Lemma di Riemann l'ultimo integrale tende a zero se  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Quindi per avere la convergenza puntuale abbiamo dovuto chiedere  $f$  derivabile. Tale ipotesi si potrebbe migliorare, ma non si può arrivare a chiedere la sola continuità: si potrebbe infatti vedere che esistono funzioni continue per cui serie di Fourier non converge in nessun punto !!! D'altra parte si potrebbe dimostrare il seguente teorema in cui si rinuncia alla continuità, ma solo in un numero finito di punti.

**5.1.6 Teorema.** *Supponiamo che  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  siano dei punti in  $[0, T]$  tali che  $f$  è continua e derivabile in ogni  $]t_i, t_{i+1}[$  e  $f'(t)$  ammette finiti i limiti da destra e da sinistra in ogni  $t_i$  (potendo anche essere discontinua in  $t_i$ ). Allora per ogni  $t$  esistono il limiti da destra e da sinistra di  $f$  e vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t^+} f(t) \right).$$

Per trovare la convergenza uniforme basta richiedere la continuità di  $f'$ .

**5.1.7 Teorema.** *Supponiamo che  $f$  abbia derivata prima continua. Allora  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $[0, T]$ .*

*Dimostrazione.* Questo risultato segue dalla proposizione (5.1.22) che dimostreremo più avanti. Vediamo però una dimostrazione nel caso in cui  $f$  abbia derivata seconda continua.

In questo caso i coefficienti di Fourier verificano:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau = \underbrace{\left[ \frac{f(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau}}{-i\omega_0 n T} \right]_{\tau=0}^{\tau=T}}_{=0} + \frac{1}{i\omega_0 n T} \int_0^T f'(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau =$$

$$\underbrace{\left[ \frac{f'(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau}}{\omega_0^2 n^2 T} \right]_{\tau=0}^{\tau=T}}_{=0} - \frac{1}{\omega_0^2 n^2 T} \int_0^T f''(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau = -\frac{1}{\omega_0^2 n^2} d_n$$

(si è integrato per parti due volte – i pezzi agli estremi si semplificano tra loro per la periodicità). I  $d_n$  nella formula sopra sono i coefficienti di Fourier della derivata seconda  $f''$ , che è integrabile essendo continua. Applicando (5.1) ai  $d_n$ :

$$|c_n| \leq \frac{1}{\omega_0^2 n^2} \|f''\|_1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty.$$

Osserviamo ora che essendo le funzioni  $\mathbf{e}_n$  costantemente di modulo uno si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n \mathbf{e}_n\|_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|d_n|}{\omega_0^2 n^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|f''\|_1}{\omega_0^2 n^2} < +\infty$$

dove nel penultimo passaggio si è usata la (5.1) per i  $d_n$ . Abbiamo quindi verificato la convergenza totale della serie di Fourier, da cui la tesi.  $\square$

Dai teoremi scritti sopra si ricava il seguente risultato, che dice che se due funzioni hanno gli stessi coefficienti di Fourier allora devono coincidere. È interessante notare che non serve per questo che le funzioni siano somma delle loro serie di Fourier (cosa che, per quanto detto prima, richiede ipotesi ben più forti).

**5.1.8 Proposizione.** *Siano  $f$  e  $g$  in  $L^1([0, T])$ . Se*

$$\int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \int_0^T g(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

*allora  $f = g$  in  $L^1(0, T)$ , cioè  $f(t) = g(t)$  per q.o.  $t$ . Se poi  $f$  e  $g$  sono continue allora coincidono ovunque.*

*Dimostrazione.* Prendiamo una funzione  $\phi$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e siano una  $\phi_n = \sum_{k=-n}^n \varphi_k \mathbf{e}_k$  le sue approssimanti di Fourier. Per il teorema (5.1.7) si ha che  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformemente (per quanto abbiamo dimostrato basterebbe che esista  $\phi''$  continua). Ne segue:

$$0 = \sum_{k=-n}^n \bar{\varphi}_k \int_0^T (f - g) e^{-ik\omega_0 t} dt = \int_0^T (f(t) - g(t)) \bar{\phi}_n(t) dt \rightarrow \int_0^T (f(t) - g(t)) \bar{\phi}(t) dt.$$

Dunque:

$$\int_0^T (f(t) - g(t)) \bar{\phi}(t) dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[)$$

che è sufficiente (vedi la 4.3.4) per avere  $f = g$  quasi ovunque e cioè la tesi.  $\square$

I teoremi precedenti, per quanto utili e interessanti, non gettano piena luce sulla convergenza delle  $f_n$  a  $f$ . In realtà, le  $f_n$  sono le “proiezioni” in  $L^2$  di  $f$  su  $E_n$ , come vediamo ora (vedi la figura (5.2)), per cui la convergenza “giusta” da cercare è (in generale) sarà quella in  $L^2_{per}(T)$ .

**5.1.9 Proposizione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . La funzione  $f_n$  sopra introdotta ha le seguenti proprietà:

- $f_n \in E_n$ ;
- per ogni  $g$  in  $E_n$  si ha  $\langle f - f_n, g \rangle = 0$ ;
- per ogni  $g$  in  $E_n$  si ha:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \quad (5.4)$$

e quindi  $f_n$  è l'elemento in  $E_n$  che ha minima distanza ( $L^2$ ) da  $f$ ;

- si ha inoltre

$$\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$$

*Dimostrazione.* La prima affermazione è ovvia. Per dimostrare la seconda basta notare che per ogni  $j$  tra  $-n$  ed  $n$ :

$$\langle f_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n \langle c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = c_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dunque  $\langle f - f_n, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ ; ne segue che se  $g = \sum_{j=-n}^n \lambda_j \mathbf{e}_j$  si ha  $\langle f - f_n, g \rangle = 0$ .

Dimostriamo (5.4); presa una  $g$  in  $E_n$ :

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2^2 = \langle (f - f_n) + (f_n - g), (f - f_n) + (f_n - g) \rangle = \\ &= \|f - f_n\|_2^2 + 2\Re \langle f - f_n, f_n - g \rangle + \|f_n - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \end{aligned}$$

perché  $(f_n - g) \in E_n$  e quindi è ortogonale a  $(f - f_n)$ . Ne segue che  $\|f - g\|_2^2 \geq \|f - f_n\|_2^2$  e l'eguaglianza vale esattamente quando  $g = f_n$ ; dunque  $f_n$  è il punto in  $E_n$  di minima distanza da  $f$ . Per dimostrare l'ultima relazione basta prendere  $g = 0$  in (5.4).  $\square$

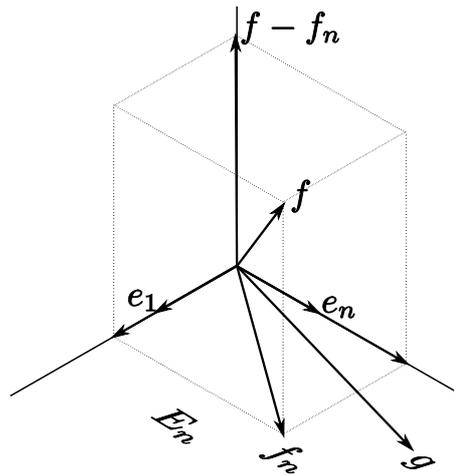


Figura 5.2: La proiezione di  $f$  su  $E_n$

**5.1.10 Osservazione.** Si ha  $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$ ; inoltre

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \Leftrightarrow \|f\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

*Dimostrazione.* Notiamo che, per la 5.1.1 si ha

$$\|f_n\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{k,h=-n}^n c_k \bar{c}_h \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h \rangle = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 T$$

Usando l'ultima delle 5.1.9 si ricava

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 T + \|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

da cui seguono entrambe le tesi.  $\square$

Vediamo ora che le  $f_n$  “a qualcosa convergono”.

**5.1.11 Proposizione.** *Sia assegnata una successione  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  di numeri complessi tali che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ . Allora esiste una funzione  $g$  di  $L^2_{per}(T)$  tale che  $g_n := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$  per  $n \rightarrow \infty$ . Inoltre:*

$$c_k = \frac{1}{T} \langle g, \mathbf{e}_k \rangle \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}, \quad \|g\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $(g_n)$  è una successione di Cauchy in  $L^2_{per}(T)$ . Siano  $n > m$  interi, allora, per l'ortonormalità degli  $\mathbf{e}_j$ :

$$\|g_n - g_m\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq n} c_k \mathbf{e}_k - \sum_{|k| \leq m} c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \left\| \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} |c_k|^2.$$

Dire che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$  significa che  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$  e  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_{-n}|^2 < +\infty$  e dunque, fissato  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare un  $\bar{n}$  intero tale che, se  $m > \text{geq} \bar{n}$ :

$$\sum_{m+1 \leq |k|}^n |c_k|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} |c_k|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall n > m.$$

Dunque per  $n > m \geq \bar{n}$   $\|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon$ , cioè  $(g_n)$  è di Cauchy. Per la completezza di  $L^2([0, T])$   $(g_n)_n$  ammette limite  $g$  in  $L^2_{per}(T)$ . Ora che abbiamo  $g$  fissiamo  $j$  intero; si ha

$$\langle g_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j \quad \forall n \geq j$$

da cui al limite  $\langle g, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j$ . Per l'altra proprietà si ragiona allo stesso modo.  $\square$

**5.1.12 Osservazione.** D'ora in poi scriveremo  $g = \sum_{L^2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$  per indicare  $g$  è somma della

serie in  $L^2_{per}(T)$  cioè che  $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$ , per  $n \rightarrow +\infty$ . In maniera analoga scriveremo

$g \underset{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$  per indicare  $g$  è somma della serie uniformemente su un qualunque

intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ , cioè che  $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{unif} g$  (su  $[a, b]$ ), per  $n \rightarrow +\infty$ .

**5.1.13 Teorema** (completezza dei polinomi trigonometrici). *Se  $f$  è in  $L^2_{per}(T)$  allora la successione  $f_n$  converge in  $L^2$  a  $f$ :*

$$f \underset{L^2}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k, \quad \text{dove } c_n = \frac{1}{T} \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau.$$

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione 5.1.11 esiste una  $g$  tale che  $f_n \xrightarrow{L^2} g$  e tale  $g$  ha la proprietà  $\langle g, \mathbf{e}_k \rangle = T c_k$ . Dato che vale anche  $\langle f, \mathbf{e}_k \rangle = T c_k$  (per definizione di  $c_k$ ) applicando il “principio di identità” (5.1.8) si ha  $f = g$  quasi ovunque, da cui la tesi.  $\square$

Il teorema sopra dice che l'insieme delle funzioni  $\mathbf{e}_k$  con  $k$  in  $\mathbb{Z}$  è una “base ortogonale” per  $L^2_{per}(T)$  che genera ogni elemento di  $L^2_{per}(T)$ . I numeri  $c_k$  si possono quindi pensare come le “componenti” di  $f$  rispetto a tale base.

C'è quindi una perfetta corrispondenza tra le funzioni  $f$  di  $L^2$  (funzioni di energia finita) e le successioni  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ .

Vediamo ora la versione in  $\mathbb{R}$  dei risultati precedenti. Supponiamo che  $f$  sia in  $L^2_{per}(T)$  e sia a valori reali. Siano  $c_k$  i coefficienti di Fourier di  $f$ . Allora

$$c_{-k} = \langle f, \mathbf{e}_{-k} \rangle = \langle f, \overline{\mathbf{e}_k} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, \overline{f} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, f \rangle = \overline{\langle f, \mathbf{e}_k \rangle} = \overline{c_k}$$

(come vedremo poi vale anche il viceversa). Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n &= c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + c_{-n} \mathbf{e}_{-n}) = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + \overline{c_n} \overline{\mathbf{e}_n}) = \\ &= c_0 \mathbf{e}_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n \mathbf{e}_n) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n) \cos(\omega_0 n t) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Im(c_n) \sin(\omega_0 n t) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega_0 n t) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e per } k \geq 1: \\ a_k &= 2\Re(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 k t) dt \\ b_k &= -2\Im(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 k t) dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si possono allora ritrovare gli stessi risultati di convergenza trovati nel caso complesso.

**5.1.14 Proposizione.** *Sia  $f$  una funzione in  $L^2_{per}(T)$  con  $f$  a valori reali e siano  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$  definiti in (5.5). Poniamo*

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n a_k \cos(\omega_0 k t) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega_0 k t). \quad (5.6)$$

Allora  $f_n$  converge a  $f$  in  $L^2_{per}(T)$  (in energia) e si ha

$$\|f\|_2^2 = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2. \quad (5.7)$$

Viceversa supponiamo che  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$  siano due successioni di numeri reali tali che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < +\infty.$$

Allora, definendo  $f_n$  come in (5.6), esiste una funzione  $f$  in  $L^2_{per}(T)$  tale che  $f_n \xrightarrow{L^2} f$ . Inoltre sviluppando tale  $f$  in serie di Fourier si ha che i coefficienti dati da (5.5) coincidono con gli  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$  di partenza e vale (5.7).

**5.1.15 Osservazione.** Scriveremo di nuovo  $f \stackrel{L_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$  per indicare che le due serie scritte a destra convergono in  $L^2$  e che  $f$  è la loro somma e ammetteremo anche la scrittura  $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$  per indicare che la convergenza di entrambe le serie è uniforme su ogni intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ .

**5.1.16 Osservazione.** Un altro modo di vedere le cose nel caso di  $f$  a valori reali, è il seguente. Sia  $k \neq 0$  e scriviamo  $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ . Per le (5.5) si ha  $a_k = 2\rho_k \cos(\theta_k)$  e  $b_k = -2\rho_k \sin(\theta_k)$  e dunque

$$a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t) = 2\rho_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k).$$

In sostanza il modulo del coefficiente  $c_k$  è legato all'ampiezza della componente (sinusoidale)  $a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t)$  mentre l'argomento di  $c_k$  è legato alla fase di tale componente.

**5.1.17 Osservazione.** Dato che le funzioni che consideriamo sono  $T$ -periodiche è facile vedere che i coefficienti di Fourier di  $f$  si possono ottenere come

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt$$

qualunque sia  $t_0$  in  $\mathbb{R}$  (e lo stesso discorso vale per gli  $a_n/b_n$ ).

**5.1.18 Proposizione.** Sia  $f$  in  $L^2_{per}(T)$ . Allora

1.  $f$  è reale se e solo se  $c_{-k} = \overline{c_k}$  per ogni  $k$ ;
2.  $f$  è pari se e solo se  $c_{-k} = c_k$  per ogni  $k$ ;
3.  $f$  è dispari se e solo se  $c_{-k} = -c_k$  per ogni  $k$ ;
4.  $f$  è reale pari se e solo se  $c_{-k} = c_k \in \mathbb{R}$  per ogni  $k$ ; questo è equivalente a dire che  $b_k = 0$  per ogni  $k$ ;
5.  $f$  è reale dispari se e solo se  $c_{-k} = -c_k \in i\mathbb{R}$  per ogni  $k$  (cioè i  $c_k$  sono immaginari puri); questo è equivalente a dire che  $a_k = 0$  per ogni  $k$ ;

*Dimostrazione.* Vediamo prima le implicazioni “ $\Rightarrow$ ”. La prima è già stata vista prima. Dimostriamo la seconda supponendo  $f$  pari. Usando il cambio di variabile  $s = -t$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{i\omega_0 ks} ds$$

da cui  $c_k = c_{-k}$ . In modo analogo si ragiona se  $f$  è dispari. Le altre proprietà seguono combinando quelle trovate e utilizzando l'espressione degli  $a_k, b_k$ .

Per quanto riguarda le “ $\Leftarrow$ ”, dimostriamo per esempio la prima. Se  $c_{-k} = \overline{c_k}$  per ogni  $k$  si ha

$$f \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + \overline{c_n} \overline{\mathbf{e}_n}) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n \mathbf{e}_n).$$

e quindi  $f$  è una funzione a valori reali. Le altre si fanno in modo simile.  $\square$

**5.1.19 Definizione.** Se  $f$  è una funzione e  $t_0 \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $f_{t_0}$  la funzione translata di  $t_0$ , cioè  $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$ .

**5.1.20 Proposizione.** Siano  $f$  in  $L^2_{per}(T)$  e  $t_0$  in  $[0, T]$ , e chiamiamo  $c_k^*$  i coefficienti di Fourier di  $f_{t_0}$ . Allora  $c_k^* = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k$ .

*Dimostrazione.* Con un semplice cambio di variabile nell'integrale

$$\begin{aligned} c_k^* &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t_0) e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(\tau) e^{-i\omega_0 k(\tau+t_0)} dt = \\ &= \frac{e^{-i\omega_0 kt_0}}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 k\tau} dt = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k. \end{aligned}$$

$\square$

**5.1.21 Proposizione.** Sia  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  una successione di numeri complessi tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

e sia  $f$  in  $L^2_{per}(T)$  la somma della serie di Fourier associata ai  $c_n$ :  $f \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ .

- Se si ha  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ , allora  $f$  è continua,  $T$ -periodica e  $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ .
- Se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty$ , allora  $f$  è  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  ed  $f'$  sono  $T$ -periodiche,  $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$  e  $f' \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}'_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i\omega_0 n \mathbf{e}_n$ .
- In generale, se  $h \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$ , allora  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^h$ ,  $f^{(j)}$  è  $T$ -periodica e  $f^{(j)} \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (i\omega_0 n)^j \mathbf{e}_n$ , per tutti i  $j = 0, \dots, h$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ . Allora, dato che le funzioni  $\mathbf{e}_n$  hanno modulo costantemente eguale a 1, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}_n\|_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

(la norma uniforme essendo fatta su un qualunque intervallo  $[a, b]$ ) e quindi la tesi segue dal teorema (2.2.3).

Supponiamo ora che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$ ; notiamo che  $\mathbf{e}'_n = i\omega_0 n \mathbf{e}_n$  e allora:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}'_n\|_{\infty} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty.$$

e quindi la tesi segue dal corollario (2.2.4) (seconda affermazione). Il caso generale si fa in modo analogo.  $\square$

Nella proposizione precedente non è mai possibile dimostrare il viceversa. Non è detto per esempio, come abbiamo già visto, che se una funzione è continua la serie dei  $|c_n|$  è convergente. Se ci mettiamo invece nella prospettiva di  $L^2$  otteniamo una perfetta caratterizzazione della derivabilità (sempre nel senso di  $L^2$ ). Il risultato sotto riguarda la derivata prima, ma si può facilmente generalizzare a derivate successive (iterando il ragionamento).

**5.1.22 Proposizione.** *Sia  $f$  una funzione in  $L^2_{per}(T)$  e siano  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  i suoi coefficienti di Fourier. Allora  $f$  è derivabile nel senso di  $L^2$  se e solo se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n|^2 < +\infty$ . Se questo avviene, la derivata generalizzata di  $f$  è*

$$f' =_{L^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega_0 n c_n \mathbf{e}_n$$

che esiste in  $L^2$  per l'ipotesi fatta. Inoltre la funzione  $f$  è continua,  $T$ -periodica e

$$f =_{unif.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

*Dimostrazione.* Se  $f_n := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k$  allora  $f_n \xrightarrow{L^2} f$ . Inoltre  $f_n$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e  $f'_n = \sum_{k=-n}^n i\omega_0 k c_k \mathbf{e}_k$ . Se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n|^2 < +\infty$ , a causa di (5.1.11), esiste una  $g$  tale che  $g =_{L^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega_0 n c_n \mathbf{e}_n$ . Per definizione di derivata nel senso di  $L^2$  tale  $g$  è la derivata in  $L^2$  di  $f$ .

Viceversa supponiamo che esista  $f'$  derivata di  $f$  nel senso di  $L^2$ . Per definizione esiste una successione  $(f_n)_n$  (non necessariamente quelle di prima) con  $f_n$  di classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f_n \xrightarrow{L^2} f$  e  $f'_n \xrightarrow{L^2} f'$ . Fissato  $k$  in  $\mathbb{Z}$  si ha:

$$\int_0^T f_n(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \underbrace{\left[ \frac{f_n(t) e^{-i\omega_0 k t}}{-ik\omega_0} \right]_{t=0}^{t=T}}_{=0} + \frac{1}{i\omega_0 k} \int_0^T f'_n(t) e^{-i\omega_0 k t} dt$$

(abbiamo integrato per parti e sfruttato la periodicità). Facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$ :

$$i\omega_0 k \int_0^T f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \int_0^T f'(t) e^{-i\omega_0 k t} dt$$

(la convergenza  $L^2$  implica la convergenza degli integrali). Dunque i coefficienti di Fourier di  $f'$  sono  $i\omega_0 k c_k$ .

Per vedere l'ultima proprietà notiamo che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n|c_n|}{n} \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( n^2 |c_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) < +\infty$$

(abbiamo usato la disuguaglianza  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ ). Possiamo allora usare il primo punto della proposizione precedente (5.1.21) e concludere che  $f$  è continua,  $T$ -periodica e la sua serie di Fourier converge uniformemente.  $\square$

Notiamo che quanto appena dimostrato ci dà un criterio più debole di quello visto in (5.1.7) per avere la convergenza uniforme della serie di Fourier.

Concludiamo con un risultato che permette di trovare la somma di una serie di Fourier, utilizzando i metodi di analisi complessa visti in precedenza.

**5.1.23 Proposizione.** *Siano  $P$  e  $Q$  due polinomi con  $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$ . Indichiamo con  $z_1, \dots, z_h$  le radici di  $Q$ . Allora se*

$$f \underset{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} e_n$$

si ha

$$f(t) = -2\pi i \sum_{j=1}^h \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, z_j \right) \quad \text{per } 0 < t < T \quad (5.8)$$

(in effetti poter prendere o meno  $t = 0$  o  $t = T$  non ha nessuna importanza poiché  $f$  è definita a meno di un quasi ovunque). Notiamo anche che la  $f$  è ben definita in quanto, a causa dell'ipotesi sui gradi,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right|^2 < +\infty$$

Se poi  $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 2$  è chiaro che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right| < +\infty$$

e dunque  $f$  deve risultare continua e deve aversi  $f(0^+) = f(T^-)$ , in modo che  $f$  estesa per periodicità risulti continua.

*Dimostrazione.* Per quanto visto, posto

$$f_n(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n, Q(k) \neq 0} \frac{P(k)}{Q(k)} e^{ik\omega_0 t}$$

si ha  $f_n \xrightarrow{L^2} f$ . Peraltro da 3.6.23 (usando  $a = \omega_0 t \in ]0, 2\pi[$ ), si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = -2\pi i \sum_{j=1}^h \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, z_j \right) \quad \forall t \in ]0, T[.$$

Dato che la convergenza puntuale quasi ovunque individua il limite  $L^2$ , ne segue la tesi.  $\square$

## 5.2 Alcuni esempi

**5.2.1 Esempio** (onda quadra). Sia

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

ed eventualmente estesa per periodicità (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$ . Applicando le formule si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 0;$$

e per  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 kt} dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{\frac{T}{2}}^T = \\ &= \frac{i}{2\pi k} (e^{-ik\pi} - 1) - \frac{i}{2\pi k} (1 - e^{-ik\pi}) = \frac{i}{\pi k} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Passando alla forma reale si ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{\pi k}$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\omega_0 kt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

Nelle figure 5.3, 5.4, 5.5 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Si noti come l'approssimazione (che come abbiamo visto è in energia) diventi *cattiva* vicino ai punti di salto anche per  $n$  grande.

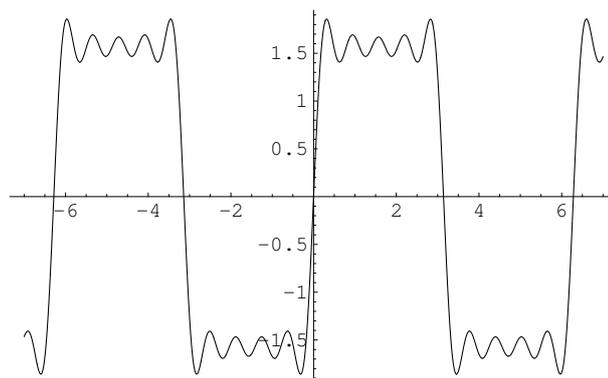


Figura 5.3: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

**5.2.2 Esempio** (dente di sega). Sia

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ t - T & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

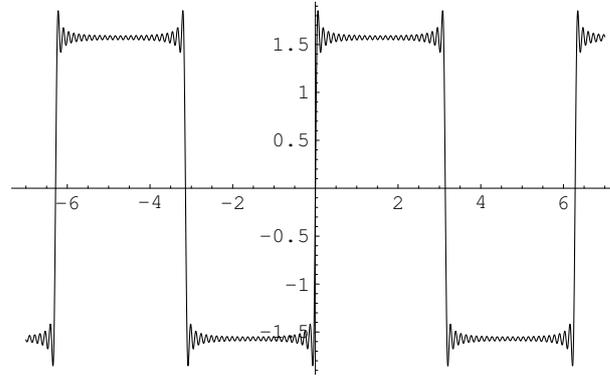


Figura 5.4: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

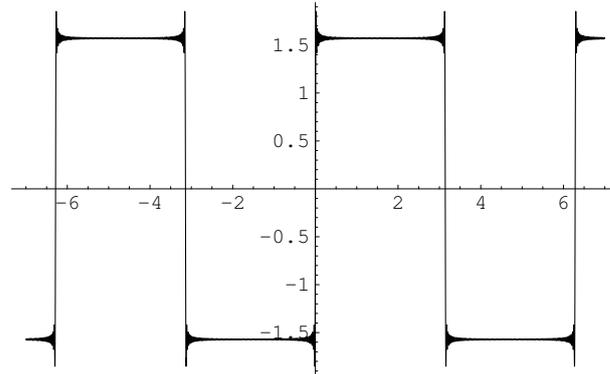


Figura 5.5: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 200$

estesa per periodicità (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Per calcolare i coefficienti di Fourier possiamo usare l'intervallo  $[-T/2, T/2]$  invece di  $[0, T]$ , notando che  $f(t) = t$  in tale intervallo. Si ha allora:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \, dt = 0;$$

e per  $k \neq 0$  (integrando per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-i\omega_0 k t} \, dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} \, dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\frac{T}{2} e^{-i\omega_0 k \frac{T}{2}} + \frac{T}{2} e^{i\omega_0 k \frac{T}{2}}}{k} + 0 = \frac{iT}{4\pi k} (e^{-\pi k i} + e^{\pi k i}) = (-1)^k \frac{iT}{2\pi k} = (-1)^k \frac{i}{\omega_0 k}. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = -(-1)^k \frac{T}{\pi k} = -(-1)^k \frac{2}{\omega_0 k}.$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} -\frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

Nelle figure 5.6, 5.7, 5.8 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Anche in questo caso l'approssimazione non è molto buona vicino al punto di salto.

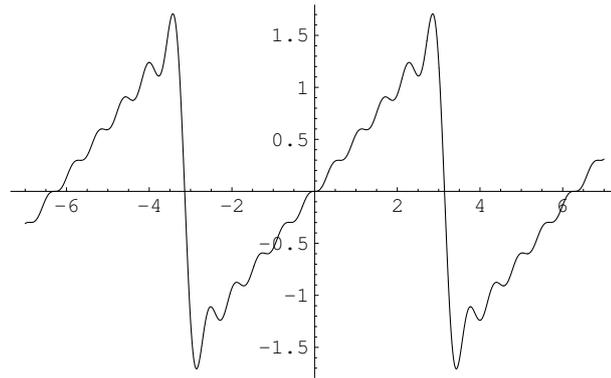


Figura 5.6: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

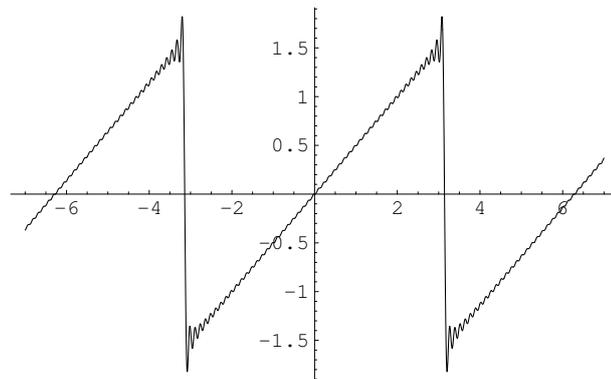


Figura 5.7: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

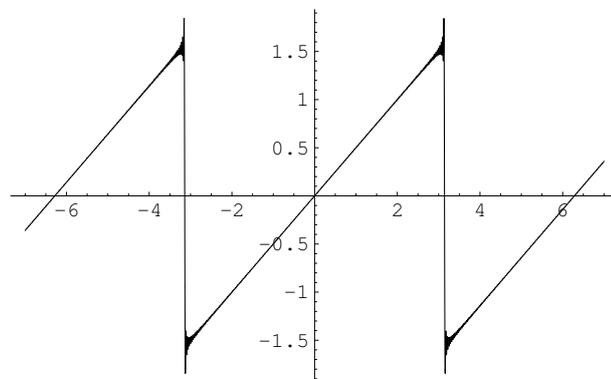


Figura 5.8: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 200$

**5.2.3 Esempio** (onda triangolare). Sia  $f(t) := |t| - \frac{T}{4}$  se  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ , estesa per periodicità (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{4}\right) dt = \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{Tt}{4}\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0;$$

e per  $k \neq 0$  (si usa l'integrazione per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(|t| - \frac{T}{4}\right) e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{\left(|t| - \frac{T}{4}\right) e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{-T/2}^{T/2} + \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) e^{-i\omega_0 kt} dt - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_0^{\frac{T}{2}} (+1) e^{-i\omega_0 kt} dt = 0 + \\ &\quad \frac{i}{2\pi k} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-i\omega_0 kt} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 kt} dt \right\} = \frac{i}{2\pi k} \left\{ \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right\} = \\ &\quad \frac{1}{2\pi\omega_0 k^2} (-1 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 1) = \frac{1}{\pi\omega_0 k^2} ((-1)^k - 1) = \frac{T}{2\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Passando alla forma reale si ha:

$$a_k = 0, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1), \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\omega_0 t) = -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t).$$

Dato però che la serie dei moduli dei coefficienti  $\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$  è convergente si può dire che

$$f(t) \underset{unif.}{=} -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

e in particolare la serie sopra converge a  $f(t)$  in ogni  $t$ . Nelle figure 5.9, 5.10, 5.11 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Stavolta l'approssimazione è nettamente migliore (per ordini  $n$  anche più bassi dei precedenti). A cercare il pelo nell'uovo c'è qualche problema nell'approssimare gli spigoli, che sono sempre un po' tondi nelle approssimanti. Si può anche notare che la serie delle derivate è

$$-\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [-(2k+1)\omega_0 \sin((2k+1)\omega_0 t)] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t),$$

che è la serie di Fourier dell'onda quadra esaminata nel primo esempio. Dunque l'onda quadra è la derivata in senso di  $L^2$  dell'onda triangolare. Osserviamo che quest'ultima non è  $\mathcal{C}^1$  dato che non è derivabile in zero.

**5.2.4 Esempio.** Sia  $f(t) = t^2$  per  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$  (estesa per periodicità su tutto  $\mathbb{R}$ ). Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12};$$

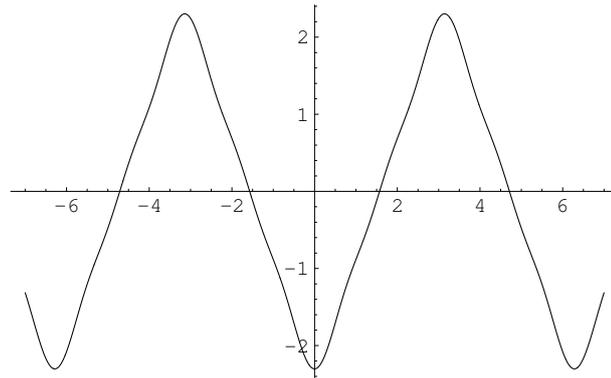


Figura 5.9: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 5$

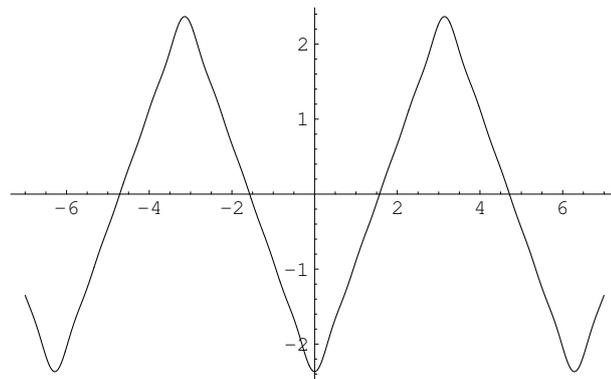


Figura 5.10: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

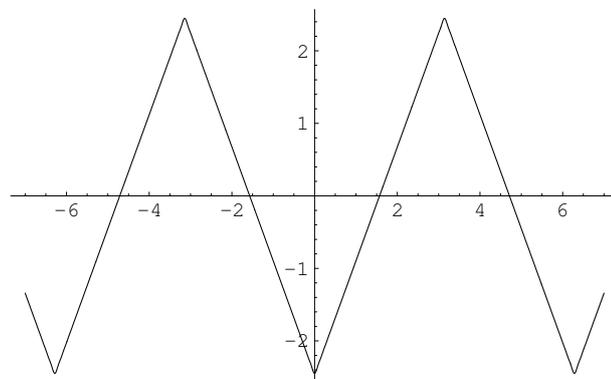


Figura 5.11: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

e per  $k \neq 0$  (integrando due volte per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t^2 e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2t e^{-i\omega_0 k t} dt = \\ &= 0 + \frac{1}{T} \left[ \frac{2t e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} dt = \frac{1}{T\omega_0^2 k^2} \left( 2\frac{T}{2} e^{-ik\pi} + 2\frac{T}{2} e^{ik\pi} \right) + 0 = \\ &= \frac{2}{\omega_0^2 k^2} (-1)^k = \frac{T^2}{2\pi^2 k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_0 = \frac{T^2}{12}, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T^2}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

Dato che  $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$  si deduce

$$f(t) \underset{unif.}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

(e in particolare la serie converge puntualmente a  $f$ ). Se  $T = 2\pi$  si ha allora:

$$t^2 \underset{unif.}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

Calcolando il tutto in  $t = 0$  e rispettivamente in  $t = \pi$  si ritrovano le formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riportiamo anche per questo esempio (vedi figure 5.12, 5.13, 5.14) i grafici di alcuni polinomi di Fourier approssimanti - la situazione è simile a quella dell'onda triangolare. In effetti la funzione  $f$  che stiamo esaminando non è  $\mathcal{C}^1$  (anche se la formula  $f(t) = t^2$  potrebbe suggerire che lo sia). Per capirlo dobbiamo ricordare che la  $f$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  e vale  $t^2$  solo in  $[-T/2, T/2]$ , mentre fuori da questo intervallo è estesa in modo da risultare periodica di periodo  $T$  (come è chiaro dai grafici delle approssimanti). Vista così è chiaro che  $f$  non è derivabile nei punti  $\pm T/2$ . In effetti se calcoliamo la serie delle derivate troviamo

$$\frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} [-k\omega_0 \sin(k\omega_0 t)] = -\frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

I coefficienti di quest'ultima serie sono solo a quadrato sommabile (mentre non sono sommabili) e quindi la derivata c'è solo nel senso di  $L^2$ .

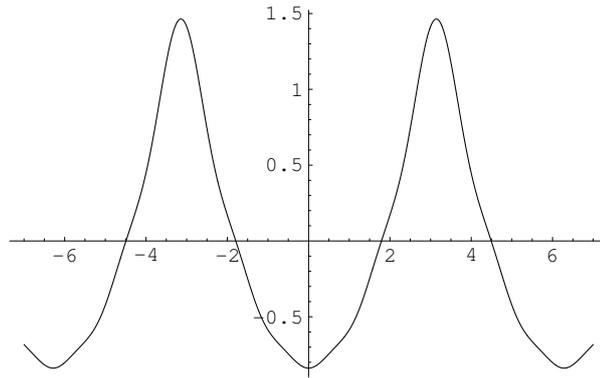


Figura 5.12:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 5$

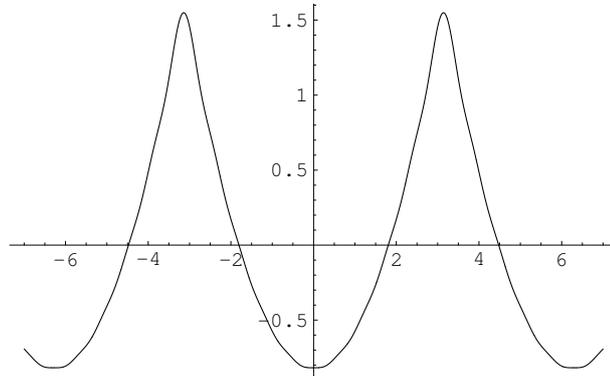


Figura 5.13:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

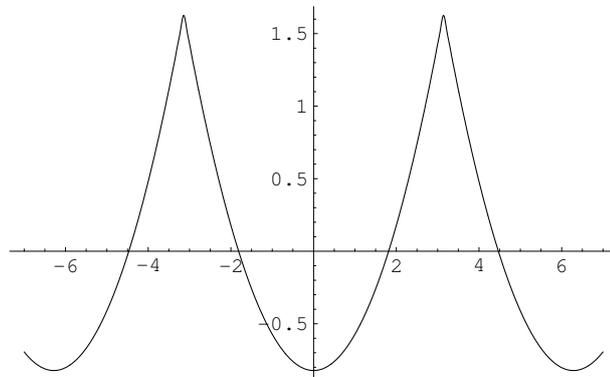


Figura 5.14:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

Concludiamo il paragrafo osservando che, negli esempi 3.6.24, 3.6.25 e 3.6.26 si sono in pratica trovato che

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + 1} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = \pi \frac{\cosh(\omega_0 t - \pi)}{\sinh(\pi)} && \text{in } [0, T], \\ f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = \frac{\omega_0^2 t^2}{2} - \pi \omega t + \frac{\pi^2}{3} && \text{in } [0, T], \\ f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = i(\pi - \omega_0 t) && \text{in } [0, T]. \end{aligned}$$

(usando  $a = \omega_0 t$  e la proposizione 5.1.23). Il primo degli esempi sopra si può generalizzare cercando l'espressione di

$$f(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\omega_0 n t}}{n^2 + b^2}$$

per  $b > 0$ . Ragionando come nel caso  $b = 1$  si ha (per  $0 \leq t \leq T$ ):

$$\begin{aligned} f(t) &= -2\pi i \left( \text{Res} \left( \frac{1}{z^2 + b^2} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, bi \right) + \text{Res} \left( \frac{1}{z^2 + b^2} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, -bi \right) \right) = \\ &= -2\pi i \left( \left[ \frac{1}{2z} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right]_{z=bi} + \left[ \frac{1}{2z} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right]_{z=-bi} \right) = -\frac{\pi}{b} \left( \frac{e^{-b\omega_0 t}}{e^{-2b\pi} - 1} - \frac{e^{b\omega_0 t}}{e^{2b\pi} - 1} \right) = \\ &= \frac{\pi}{b} \left( \frac{e^{b\omega_0 t}}{e^{2b\pi} - 1} + \frac{e^{-b\omega_0 t}}{1 - e^{-2b\pi}} \right) = \frac{\pi}{b} \left( \frac{e^{b(\omega_0 t - \pi)}}{e^{b\pi} - e^{-b\pi}} + \frac{e^{-b(\omega_0 t - \pi)}}{e^{b\pi} - e^{-b\pi}} \right) = \boxed{\frac{\pi \cosh(b(\omega_0 t - \pi))}{b \sinh(b\pi)}}. \end{aligned}$$

Possiamo anche passare alla derivata e trovare

$$f'(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i\omega_0 n e^{i\omega_0 n t}}{n^2 + b^2}.$$

da cui

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{n^2 + b^2} e^{i\omega_0 n t} = \frac{1}{i\omega_0} \frac{\pi b \omega_0 \sinh(b(\omega_0 t - \pi))}{\sinh(b\pi)} = \boxed{-i\pi \frac{\sinh(b(\omega_0 t - \pi))}{\sinh(b\pi)}}.$$

Un altro caso trattabile in questo modo è il calcolo di

$$f(t) \underset{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 n t}}{n - b}, \quad \text{per } b \notin \mathbb{Z}.$$

Usando sempre la stessa formula, per  $0 < t < T$ , su ha:

$$\begin{aligned} f(t) &= -2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{z - b} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, b \right) = -2\pi i \left. \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right|_{z=b} = -2\pi i \frac{e^{i\omega_0 b t}}{e^{2\pi b i} - 1} = \\ &= -2\pi i \frac{e^{i\omega_0 b t - \pi b i}}{e^{\pi b i} - e^{-\pi b i}} = \boxed{-\pi \frac{e^{ib(\omega_0 t - \pi)}}{\sin(\pi b)}}. \end{aligned}$$

### 5.3 Il fenomeno di Gibbs. Le somme di Fejer

Come si vede dagli esempi del paragrafo precedente, nei pressi delle discontinuità i polinomi di Fourier “convergono male” alla funzione di partenza. Se guardiamo per esempio l’onda quadra (cfr. fig. ???) vediamo che nei punti a destra dello zero le approssimanti tendono ad avere dei valori sensibilmente maggiori di 1 (che è il valore a cui tende l’onda quadra, quando si arriva a zero da destra). La cosa sorprendente è che tali valori sembrano permanere anche quando l’ordine di approssimazione  $n$  diventa grande (per quanto tali valori vengano assunti in punti sempre più prossimi allo zero). Lo stesso accade a sinistra dello zero. dove le approssimanti, anche se  $n$  cresce, continuano ad avere dei valori decisamente minori di  $-1$ . Vogliamo analizzare più nel dettaglio, almeno nel caso dell’onda quadra, questo comportamento detto *fenomeno di Gibbs*.

Ricordiamo che se

$$q(t) = \begin{cases} -1 & \text{per } -\pi < t < 0, \\ 1 & \text{per } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

allora  $q = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ , dove  $c_n = 0$  se  $n$  è pari, mentre  $c_n = \frac{2}{n\pi i}$  se  $n$  è dispari. Dato  $n$

intero positivo consideriamo la somma  $q_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ , che ha come derivata  $q'_n(t) := \sum_{|k| \leq n, n \text{ dispari}} c_k e^{ikt}$ . Prendiamo  $n = 2h + 1$  per  $h \geq 0$ . Allora:

$$\begin{aligned} q'_{2h+1}(t) &= \sum_{k=0}^h \frac{2}{\pi} e^{(2k+1)it} + \sum_{k=0}^h \frac{2}{\pi} e^{-(2k+1)it} = \frac{2}{\pi} \left( e^{it} \sum_{k=0}^h (e^{2it})^k + e^{-it} \sum_{k=0}^h (e^{-2it})^k \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( e^{it} \frac{(e^{2it})^{h+1} - 1}{e^{2it} - 1} + e^{-it} \frac{(e^{-2it})^{h+1} - 1}{e^{-2it} - 1} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2(h+1)it} - e^{-2(h+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{2 \sin(2(h+1)t)}{\pi \sin(t)}. \end{aligned}$$

Quindi i punti stazionari di  $q_{2h+1}$  sono i punti  $t$  in cui si annulla  $\sin(2(h+1)t)$  – a parte  $t = 0$  in cui il denominatore produce una forma indeterminata. Tali  $t$  devono allora verificare  $(2h+1)t = j\pi$  con  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , cioè  $t = \frac{\pi}{2h+1}, \frac{2\pi}{2h+1}, \dots, \frac{2h\pi}{2h+1}, \pi, \dots$ . Ora si può vedere con un po’ di pazienza che il massimo di  $q_{2h+1}$  in  $[0, \pi]$  si raggiunge nel primo di tali punti (si vedano anche i grafici ???), per cui tale massimo vale:

$$q_{2h+1} \left( \frac{\pi}{2h+1} \right) = \frac{2}{\pi} \left( \sum_{k=0}^h \frac{e^{\frac{2k+1}{2h+1}\pi i}}{(2k+1)i} - \sum_{k=0}^h \frac{e^{-\frac{2k+1}{2h+1}\pi i}}{(2k+1)i} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^h \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2h+1}\pi\right)}{2k+1}.$$

Notiamo che questa espressione si può scrivere come

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^h \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2h+1}\pi\right)}{\frac{2k+1}{2h+1}\pi} \frac{\pi}{2h+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^h \frac{\sin(x_k)}{x_k} (x_k - x_{k-1})$$

con  $x_k := \frac{2k+1}{2h+1}\pi$ . ACHTUNG!!! La sommatoria scritta sopra rappresenta una somma di Riemann – più precisamente la somma inferiore (vedi la figura (5.15)) – per la funzione  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  nell’intervallo  $[0, \pi]$  (c’è un piccolo problema dato che il primo punto  $x_{-1}$  è  $-1/(2h+1)$  invece che 0, ma la differenza è infinitesima e alla fine non conta). Se si fa tendere  $h$  a  $+\infty$ , usando la definizione di integrale di Riemann, si ricava che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} q_{2h+1} \left( \frac{\pi}{2h+1} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

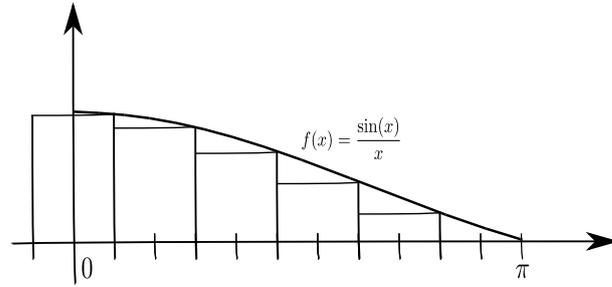


Figura 5.15: Somme di Riemann per la funzione  $\frac{\sin(x)}{x}$

Nello steso modo si vede che il minimo della  $q_{2h+1}$  viene assunto in  $-\frac{\pi}{2h+1}$  e vale l'opposto del massimo. Quindi l'immagine di ogni  $q_{2h+1}$  è l'intervallo  $[-q_{2h+1}(\frac{\pi}{2h+1}), q_{2h+1}(\frac{\pi}{2h+1})]$  che per  $h \rightarrow +\infty$  tende all'intervallo  $[-G, G]$ , dove  $G := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$  è detta *costante di Wilbraham-Gibbs*. Dato che  $G \simeq 1.178980$  questo intervallo è più ampio di quasi il 18% dell'intervallo  $[-1, 1]$ , che dovrebbe essere quello corretto, dato che l'onda quadra  $q$  varia tra  $-1$  e  $1$ . Questo fenomeno si ripresenta ogni volta che c'è una discontinuità di salto nella funzione che si sviluppa in serie di Fourier. Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

**5.3.1 Teorema.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $T$ -periodica e regolare a tratti. Supponiamo che  $t_0$  sia un punto di  $\mathbb{R}$  in cui  $f$  ha una discontinuità di tipo salto e poniamo*

$$\Delta_0 := f(t_0^+) - f(t_0^-) \left( = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right), \quad y_0 := \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

Indichiamo inoltre con  $f_n$  le approssimanti di Fourier di  $f$  (come sappiamo  $f_n(t_0) \rightarrow y_0$  per  $n \rightarrow \infty$ ). Allora esistono due successioni di punti  $t'_n$  e  $t''_n$  tali che  $t'_n < t_0 < t''_n$ ,  $f(t'_n) = \min_{[t'_n, t_0]} f_n$ ,  $f(t''_n) = \max_{[t_0, t''_n]} f_n$  e

$$t'_n \rightarrow t_0^-, \quad t''_n \rightarrow t_0^+, \quad f_n(t'_n) \rightarrow y_0 - \Delta_0 G, \quad f_n(t''_n) \rightarrow y_0 + \Delta_0 G.$$

Il teorema precedente ci dice quindi che ogni volta che la funzione ha un salto, le sue approssimanti di Fourier hanno delle oscillazioni vicino al punto di salto la cui ampiezza rimane ben più grande del salto della funzione. Il motivo principale è costituito dall'*andamento oscillante dei nuclei di Dirichelet* (vedi anche i grafici nella figura (5.1)). In effetti ci sono altri modi di approssimare  $f$ , che funzionano meglio nel caso di funzioni continue.

**5.3.2 Definizione.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $T$ -periodica e integrabile su  $[0, T]$ . Dato  $n$  in  $\mathbb{N}$  indichiamo con  $f_n$  le approssimanti di Fourier. Chiamiamo *approssimanti di Fejér* la media aritmetica di  $f_0, \dots, f_{n-1}$ , che indichiamo con  $s_n$ , cioè

$$s_n(t) := \frac{f_0(t) + \dots + f_{n-1}(t)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(t).$$

Ricordiamo che se una successione  $(a_n)_n$  tende a un limite  $l$  allora la sua media aritmetica tende anch'essa a  $l$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n} = l$$

mentre **non vale il viceversa**. Infatti se  $a_n = (-1)^n$  allora  $(a_n)_n$  non ha limite ma la media aritmetica  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \rightarrow 0$ . Dunque le approssimanti di Fejér sicuramente convergono puntualmente alla funzione ogni qualvolta lo fanno le approssimanti di Fourier, ma possono convergere anche in altri casi.

**5.3.3 Lemma.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $T$ -periodica e integrabile su  $[0, T]$  e siano  $s_n$  le approssimanti di Fejér. Allora:*

$$s_n(t) = \int_0^t f(\tau) \Phi_n(t - \tau) d\tau \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove, per ogni  $n$ ,  $\Phi_n(x)$  è il nucleo di Fejér di ordine  $n$  definito da:

$$\Phi_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{nT} \left( \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)} \right)^2 & \text{se } 0 < x < T, \\ \frac{n}{T} & \text{se } x = 0, T. \end{cases}$$

e replicata per  $T$ -periodicità su tutto  $\mathbb{R}$ . In particolare  $\Phi_n(x) \geq 0$  per ogni  $x$ . Inoltre se  $[a, b]$  è un qualunque sottointervallo chiuso di  $[0, T]$  che non contiene lo zero, allora  $\phi_n$  tende uniformemente a zero su  $[a, b]$ .

*Dimostrazione.* È chiaro dalla definizione che  $\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$ . Usando l'espressione di  $D_k$  trovata nel passaggio (5.3) della dimostrazione di (5.1.4) si ha, per  $x \neq 0$ :

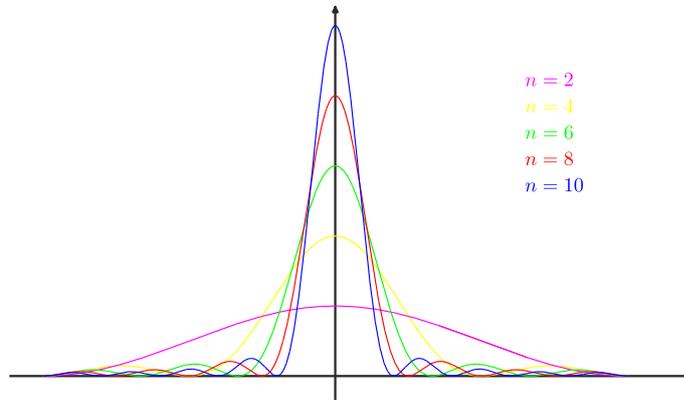
$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \frac{1}{nT} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1/2)\omega_0 x} - e^{-i(k+1/2)\omega_0 x}}{e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2}} = \frac{e^{i\omega_0 x/2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x/2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\omega_0 x}}{nT(e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2})} = \\ &= \frac{e^{i\omega_0 x/2} \left( \frac{e^{in\omega_0 x} - 1}{e^{i\omega_0 x} - 1} \right) - e^{-i\omega_0 x/2} \left( \frac{e^{-in\omega_0 x} - 1}{e^{-i\omega_0 x} - 1} \right)}{nT(e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2})} = \\ &= \frac{\left( \frac{e^{in\omega_0 x} - 1}{e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2}} \right) - \left( \frac{e^{-in\omega_0 x} - 1}{e^{-i\omega_0 x/2} - e^{i\omega_0 x/2}} \right)}{nT(e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2})} = \\ &= \frac{e^{in\omega_0 x} - 2 + e^{-in\omega_0 x}}{nT(e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2})^2} = \frac{(e^{in\omega_0 x/2} - e^{-in\omega_0 x/2})^2}{nT(e^{i\omega_0 x/2} - e^{-i\omega_0 x/2})^2} = \frac{1}{nT} \left( \frac{\sin(n\omega_0 x/2)}{\sin(\omega_0 x/2)} \right)^2. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato la formula. Se infine □

## 5.4 Serie di Fourier con soli seni o soli coseni. Funzioni nulle agli estremi

In questo paragrafo fissiamo  $T > 0$  e poniamo  $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$  (cioè la metà della frequenza angolare considerata nel paragrafo precedente).

Dato  $k$  intero positivo indicheremo anche con  $\mathbf{s}_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni  $\mathbf{s}_k(t) := \sin(\tilde{\omega}kt)$ ; notiamo che le funzioni  $\mathbf{s}_k$  sono nulle in zero e in  $T$ , qualunque sia  $k$ .

Figura 5.16: I nuclei di Fejer (tra  $-T/2$  e  $T/2$ )

**5.4.1 Teorema.** Sia  $f$  una funzione in  $L^2([0, T])$  a valori reali. Poniamo, per  $k \geq 1$

$$u_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \mathbf{s}_k(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\tilde{\omega}t) dt \quad (5.9)$$

Allora

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$$

(cioè, come al solito,  $\sum_{k=1}^n u_k \mathbf{s}_k \xrightarrow{L^2} f$  per  $n \rightarrow \infty$ ). Inoltre

$$\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T f(t)^2 dt$$

Viceversa supponiamo che  $(u_n)_{n \geq 1}$  sia una successione di numeri reali tali che  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$ . Allora esiste un'unica  $f$  in  $L^2([0, T])$  tale che  $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$  e vale la relazione (5.9).

*Dimostrazione.* Estendiamo  $f$  a  $[-T, T]$  in modo che sia dispari, ponendo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [0, T] \\ -f(-t) & \text{se } t \in [-T, 0] \end{cases}$$

Per i risultati del paragrafo precedente

$$\tilde{f}(t) \underset{L_2}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cos(\tilde{\omega}kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\tilde{\omega}kt)$$

ma essendo  $\tilde{f}$  dispari tutti gli  $a_k$  sono eguali a zero, mentre

$$b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) \sin(\tilde{\omega}kt) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{f}(t) \sin(\tilde{\omega}kt) dt = u_k$$

Allora, per quanto detto nel paragrafo precedente,  $\tilde{f} \underset{L_2}{=} \sum_{k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$  in  $[-T, T]$ . In particolare,

restringendo tutto a  $[0, T]$  si ha che  $f \underset{L_2}{=} \sum_{k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$  in  $[0, T]$ . Inoltre

$$T \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \frac{2T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \int_{-T}^T \tilde{f}^2(t) dt = 2 \int_0^T f^2(t) dt$$

da cui la formula con l'energia per gli  $u_k$ . Per il viceversa basta applicare il viceversa di 5.1.14 sull'intervallo  $[-T, T]$  e restringersi a  $[0, T]$ .  $\square$

Nello stesso modo si può sviluppare rispetto ai coseni. Per  $t \in [0, T]$  indichiamo con  $\mathbf{c}_k(t) := \cos(\tilde{\omega}kt)$  (notiamo che  $\mathbf{c}'_k(0) = \mathbf{c}'_k(T) = 0$ ); allora vale anche il teorema seguente.

**5.4.2 Teorema.** *Sia  $f$  una funzione in  $L^2([0, T])$  a valori reali. Poniamo, per  $k$  intero*

$$v_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\tilde{\omega}t) dt \quad \text{se } k \neq 0, \quad v_0 := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (5.10)$$

Allora

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n.$$

Inoltre

$$\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 + T v_0^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T f(t)^2 dt$$

Viceversa supponiamo che  $(v_n)_{n \geq 1}$  sia una successione in  $\mathbb{R}$  con  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$ . Allora

esiste una funzione in  $L^2([0, T])$  tale che  $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$  e vale la relazione (5.10).

*Dimostrazione.* Basta prolungare  $f$  a  $\tilde{f}$  definita su  $[-T, T]$  in modo che  $\tilde{f}$  sia pari e imitare la dimostrazione precedente.  $\square$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente si hanno delle proprietà di regolarità della funzione  $f$  a seconda della sommabilità degli  $u_n$ . Non diamo la dimostrazione dei seguenti risultati che è simile a quelle fatte nel paragrafo precedente.

**5.4.3 Proposizione.** *Sia  $(u_n)_{n \geq 1}$  una successione di numeri reali tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$*

e sia  $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ .

- Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ , allora  $f$  è continua,  $f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$  e  $f(0) = f(T) = 0$ .
- Se  $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$ , allora  $f$  è  $\mathcal{C}^1$ ,  $f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ ,  $f(0) = f(T) = 0$  e  $f' \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} u_n \mathbf{c}_n$ .
- In generale, dato un intero  $h$ , se  $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$ , allora  $f$  è derivabile  $h$  volte e tutte le derivate di ordine minore o eguale ad  $h$  sono continue. Di tali derivate quelle ordine pari (compresa la funzione) sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine  $f_n^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(h)}$  (che è una serie di seni o di coseni a seconda che  $h$  sia pari o dispari..

**5.4.4 Proposizione.** *Sia  $(v_n)_{n \geq 0}$  una successione di numeri reali tale che  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty$*

e sia  $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ .

- Se  $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty$ , allora  $f$  è continua e  $f \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ .
- Se  $\sum_{n=0}^{\infty} n|v_n| < +\infty$ , allora  $f$  è  $\mathcal{C}^1$ ,  $f \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ ,  $f' \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}'_n = - \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} v_n \mathbf{s}_n$  e  $f'(0) = f'(T) = 0$ .
- In generale, dato un intero  $h$ , se  $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |v_n| < +\infty$ , allora  $f$  è derivabile  $h$  volte, tutte le derivate di ordine minore o eguale a  $h$  sono continue. Di tali derivate quelle di ordine dispari sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine  $f_n^{(j)} \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(h)}$  (che è una serie di coseni o di seni a seconda che  $h$  sia pari o dispari).

Le proposizioni seguente sono analoghe alla (5.1.22)

**5.4.5 Proposizione.** Sia  $f$  una funzione in  $L^2([0, T])$  e siano  $(u_n)_{n \geq 1}$  i coefficienti definiti come sopra. Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$  allora  $f$  ha derivata in  $L^2$  e  $f' \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} u_n \mathbf{c}_n$ .

Inoltre  $f$  è continua,  $f \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$  e  $f(0) = f(T) = 0$ .

Più in generale se  $h$  è un intero positivo tale che  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^h u_n)^2 < +\infty$  allora  $f$  ha derivata di ordine  $h$  nel senso  $L^2$  e  $f^{(h)} \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(h)}$  (che è una serie di seni o di coseni a seconda se  $h$  è pari o dispari).

Inoltre  $f^{(j)} \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(j)}$  per  $j = 0, \dots, h-1$  e  $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(T) = 0$  se  $j = 0, \dots, h-1$ ,  $j$  è pari.

**5.4.6 Proposizione.** Sia  $f$  una funzione in  $L^2([0, T])$  e siano  $(v_n)_{n \geq 0}$  i coefficienti definiti come sopra. Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 v_n^2 < +\infty$  allora  $f$  ha derivata in  $L^2$  e  $f' \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} v_n \mathbf{s}_n$ .

Inoltre  $f$  è continua e  $f \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ .

Più in generale se  $h$  è un intero positivo tale che  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^h v_n)^2 < +\infty$  allora  $f$  ha derivata di ordine  $h$  nel senso  $L^2$  e  $f^{(h)} \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(h)}$  (che è una serie di coseni o di seni a seconda se  $h$  è pari o dispari).

Inoltre  $f^{(j)} \stackrel{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(j)}$  per  $j = 0, \dots, h-1$  e  $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(T) = 0$  se  $j = 0, \dots, h-1$ ,  $j$  è dispari. Quindi nel caso  $j = 2$  la derivata prima è continua e nulla agli estremi.

## 5.5 Esempi di applicazioni a problemi differenziali ai limiti

Sia  $T > 0$  e poniamo  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ . Consideriamo il seguente problema differenziale, dove  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono numeri complessi con  $a \neq 0$ .

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f & \text{in } [0, T], \\ y(0) = y(T), y'(0) = y'(T). \end{cases} \quad (P_f)$$

dove  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione assegnata e l'incognita è la funzione  $y$ . Mostriamo ora come, utilizzando le nozioni fin qui introdotte, si possa risolvere il problema sopra, in un *sensu generalizzato*, per dei dati  $f$  molto generali. Si può poi indagare se, mettendo delle ipotesi più speciali su  $f$ , la soluzione  $y$  risolve il problema nel senso usuale.

**5.5.1 Definizione.** Sia  $T > 0$  e sia  $f$  in  $L^2([0, T])$ . Diciamo che  $y$  è una soluzione del problema  $(P_f)$  nel *sensu dell'energia*, se  $y$  è in  $L^2([0, T])$ ,  $y$  ha derivate prima e seconda nel senso di  $L^2$ ,  $y$ ,  $y'$  e  $y''$  verificano la relazione scritta nella prima riga di  $(P_f)$  e vale la *condizione al bordo* espressa nella seconda riga di  $(P_f)$ . Notiamo che la condizione al bordo **ha senso** in quanto se  $y$  è derivabile due volte nel senso di  $L^2$  essa e la sua derivata devono essere continue e dunque se ne possono prendere i valori in 0 e  $T$ .

Quindi, se  $y$  è una soluzione nel senso dell'energia, essa **può non essere derivabile due volte** in senso usuale ma è **sicuramente di classe  $\mathcal{C}^1$** .

Per quanto segue conviene introdurre il *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale scritta sopra:  $P(z) := az^2 + bz + c$

**5.5.2 Proposizione.** *Supponiamo che non ci sia nessun  $k \in \mathbb{Z}$  tale che  $P(i\omega_0 k) = 0$ . Allora si hanno i fatti seguenti.*

1. Il problema  $(P_f)$  ha soluzione per ogni  $f$  in  $L^2([0, T])$ .
2. Se  $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$  allora la soluzione  $y$  è data da

$$y = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n$$

e quindi la soluzione è unica.

3. Se  $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$  con  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ , allora  $y$  ha derivata seconda continua (cioè la soluzione è  $\mathcal{C}^2$ ) e periodica e verifica l'equazione in  $(P_f)$  nel senso usuale. Più in generale se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$  per  $h \geq 0$ , allora  $y \in \mathcal{C}^{h+2}$ .

**5.5.3 Proposizione.** *Supponiamo che ci sia un solo intero relativo  $k_0$  per cui  $P(i\omega_0 k_0) = 0$ .*

0. *Sia  $f$  in  $L^2([0, T])$  e supponiamo che  $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ . Allora si hanno i fatti seguenti.*

1. Il problema  $(P_f)$  ha soluzione se e solo se  $c_{k_0} = 0$ .
2. Se  $c_{k_0} = 0$  allora le soluzioni  $y$  hanno la forma

$$y = \sum_{L_2, n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n + c \mathbf{e}_{k_0}$$

per un arbitrario numero  $c$  (dunque non c'è unicità).

3. Se  $c_{k_0} = 0$  e se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ , allora ogni soluzione  $y$  è  $\mathcal{C}^2$  e verifica l'equazione in  $(P_f)$  nel senso usuale. Più in generale se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$  per  $h \geq 0$ , allora  $y \in \mathcal{C}^{h+2}$ .

Notiamo che, se definiamo  $\mathbb{X}_{k_0} := \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n : c_{k_0} = 0 \right\}$ , allora possiamo dire che per ogni  $f$  in  $\mathbb{X}_{k_0}$  esiste unica una soluzione  $y$  in  $\mathbb{X}_{k_0}$ .

*Dimostrazione delle due proposizioni.* Supponiamo che ci sia una soluzione  $y$  ed estendiamo tale  $y$  a tutto  $\mathbb{R}$  in modo che sia periodica di periodo  $T$ . Non è difficile vedere (ma lo omettiamo) che a causa della condizione al bordo la  $y$  così estesa è ancora derivabile due volte in senso di  $L^2_{per}(T)$ . Allora possiamo scrivere

$$y \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{e}_n \quad \text{dove } \gamma_n = \frac{1}{T} \langle y, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Dato che esiste la derivata seconda nel senso di  $L^2_{per}(T)$  si ha:

$$y' \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i\omega_0 n \gamma_n \mathbf{e}_n, \quad y'' \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\omega_0^2 n^2 \gamma_n \mathbf{e}_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^2 \gamma_n|^2 < +\infty$$

Dato che vale l'equazione, cioè che  $ay'' + by' + cy$  ed  $f$  sono la stessa funzione in  $L^2_{per}(T)$ , allora hanno gli stessi coefficienti di Fourier, quindi per ogni  $n$  intero relativo:

$$c_n = -\omega^2 n^2 a \gamma_n + i\omega_0 n b \gamma_n + c \gamma_n = P(i\omega_0 n) \gamma_n. \quad (5.11)$$

Se tutti i numeri  $P(i\omega_0 n)$  sono diversi da zero, allora  $\gamma_n$  è individuato univocamente da

$$\gamma_n = \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \quad (5.12)$$

Se invece c'è un  $k_0$  per cui  $P(i\omega_0 k_0) = 0$  allora per la (5.11) si deduce che  $c_{k_0} = 0$  (e quindi questa condizione è necessaria per la risolubilità). Se  $c_{k_0} = 0$  allora qualunque  $\gamma$  verifica la relazione (5.11) con  $n = k_0$ , mentre per  $n \neq k_0$   $\gamma_n$  è univocamente determinato da (5.12).

Viceversa supponiamo che  $f$  verifichi (l'eventuale) condizione di compatibilità, che i coefficienti  $\gamma_n$  siano dati da (5.12) (con eventualmente  $\gamma_{k_0}$  indeterminato, se  $P(i\omega_0 k_0) = 0$ ).

Allora è chiaro che si può trovare una costante  $K$  tale che  $\left| \frac{n^2}{P(i\omega_0 n)} \right| \leq K$  e dunque:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} |n^2 \gamma_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} \left| \frac{n^2 c_n}{P(i\omega_0 n)} \right|^2 \leq K^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} |c_n|^2 < +\infty$$

Questo significa che  $y = \sum_{L_2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{e}_n$  è ben definita in  $L^2_{per}(T)$  e che ha derivata seconda in  $L^2_{per}(T)$ . Dato che i suoi coefficienti verificano (5.11), allora  $y$  risolve l'equazione e dato che per la 5.1.21  $y$  e  $y'$  sono continue e  $T$ -periodiche è anche verificata la condizione al bordo.

Per quanto riguarda l'ultimo punto della tesi basta notare che, se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$

allora  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{h+2} \left| \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \right| < +\infty$  e applicare la 5.1.21.  $\square$

Nello stesso modo si tratta l'ultimo caso rimasto.

**5.5.4 Proposizione.** *Supponiamo che ci siano  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  con  $P(i\omega_0 k_1) = P(i\omega_0 k_2) = 0$ .*

*Sia  $f$  in  $L^2([0, T])$  e supponiamo che  $f = \sum_{L_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ . Allora si hanno i fatti seguenti.*

1. *Il problema  $(P_f)$  ha soluzione se e solo se  $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$ .*

2. Se  $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$  allora le soluzioni  $y$  hanno la forma

$$y \underset{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_1, n \neq k_2} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n + c \mathbf{e}_{k_1} + d \mathbf{e}_{k_2}$$

per arbitrari  $c$  e  $d$ .

3. Se  $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$  e se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ , allora ogni soluzione  $y$  è  $\mathcal{C}^2$  e verifica l'equazione in  $(P_f)$  nel senso usuale. Più in generale se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$  per  $h \geq 0$ , allora  $y \in \mathcal{C}^{h+2}$ .

Anche in questo caso, se definiamo  $\mathbb{X} := \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n : c_{k_1} = c_{k_2} = 0 \right\}$ , possiamo dire che per ogni  $f$  in  $\mathbb{X}$  esiste una soluzione  $y$  in  $\mathbb{X}$ .

**5.5.5 Esempio.** Fissiamo per semplicità  $T = 2\pi$ . Consideriamo  $\lambda$  reale e  $f$  a valori reali. Allora il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, 2\pi], \\ y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi). \end{cases}$$

ha soluzione (nel senso di  $L^2$ ) unica per ogni  $f$  in  $L^2([0, 2\pi])$  se e solo se  $\lambda \neq k^2$  per ogni  $k$  intero (basta controllare i  $k$  positivi dato che c'è il quadrato).

Per esempio se  $\lambda < 0$  c'è soluzione per ogni dato  $f$  in  $L^2([0, 2\pi])$ .

Se invece  $\lambda = k_0^2$  per un intero  $k_0 \neq 0$  allora esiste soluzione se e solo se i coefficienti  $c_{k_0}$  e  $c_{-k_0}$  relativi a  $f$  sono zero; cioè equivale a

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(k_0 t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k_0 t) dt = 0.$$

Se infine  $\lambda = 0$  c'è soluzione se e solo se  $c_0 = 0$  cioè se

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

In questi casi la soluzione  $y$  non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi

$$\int_0^{2\pi} y(t) \cos(k_0 t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} y(t) \sin(k_0 t) dt = 0.$$

nel caso  $k_0 \neq 0$  oppure

$$\int_0^{2\pi} y(t) dt = 0.$$

nel caso  $\lambda = 0$ .

In tutti casi la soluzione  $y$  è continua, derivabile, periodica con derivata periodica, mentre per avere che esiste la derivata seconda in senso usuale bisogna avere qualche proprietà in più su  $f$ , per esempio che i coefficienti di  $f$  diano una serie sommabile.

Consideriamo ora un problema con condizione zero agli estremi. Non facciamo la dimostrazione che è analoga a quella della 5.5.2.

**5.5.6 Proposizione.** Sia  $T > 0$  e poniamo  $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$ ; ricordiamo che  $\mathbf{s}_n(t) = \sin(\tilde{\omega}nt)$ . Siano  $\lambda$  reale e  $f$  in  $L^2([0, T])$  a valori reali. Diremo che  $y$  è soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, T], \\ y(0) = y(T) = 0 \end{cases} \quad (P_f^0)$$

se  $y \in L^2([0, \pi])$ ,  $y$  è derivabile due volte nel senso di  $L^2$ ,  $y$  vale zero agli estremi e vale l'equazione scritta in  $(P_f^0)$ . Notiamo che dire  $y(0) = y(T) = 0$  ha senso in quanto (avendo derivata seconda in  $L^2$ )  $y$  è continua.

Allora il problema  $(P_f^0)$  ha soluzione unica per ogni  $f$  in  $L^2([0, T])$  se e solo se  $\lambda \neq \tilde{\omega}^2 k^2$  per ogni  $k > 0$  intero (nota che il risultato è diverso da quello dell'esempio precedente, dato che l'intervallo è cambiato). Tale soluzione è data da

$$y \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\lambda - \tilde{\omega}^2 n^2} \mathbf{s}_n, \quad \text{dove} \quad f \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$$

Se invece  $\lambda = \tilde{\omega}^2 k_0^2$  per un intero  $k_0 > 0$  allora esiste soluzione se e solo se il coefficiente  $k_0$ -esimo relativo a  $f$  è zero, cioè se e solo se

$$\int_0^T f(t) \sin(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

In questo caso la soluzione  $y$  non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi

$$\int_0^\pi y(t) \sin(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

(potendosi in generale aggiungere a tale soluzione  $u \mathbf{s}_{k_0}$  con  $u$  in  $\mathbb{R}$ ).

In tutti casi la soluzione  $y$  è continua, derivabile e nulla in 0 e in  $T$  dunque effettivamente verifica la condizione agli estremi. Come nel caso precedente per avere che esiste la derivata seconda in senso usuale bisogna avere qualche proprietà in più su  $f$ , per esempio che  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ .

In maniera analoga si tratta un problema con condizione di derivata nulla al bordo.

**5.5.7 Proposizione.** Sia  $T > 0$  e poniamo  $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$ ; ricordiamo che  $\mathbf{c}_n(t) = \cos(\tilde{\omega}nt)$ . Siano  $\lambda$  reale e  $f$  in  $L^2([0, T])$  a valori reali. Diremo che  $y$  è soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, T], \\ y'(0) = y'(T) = 0 \end{cases} \quad (P_f^1)$$

se  $y \in L^2([0, \pi])$ ,  $y$  è derivabile due volte nel senso di  $L^2$ ,  $y, y'$  vale zero agli estremi e vale l'equazione scritta in  $(P_f^1)$ . Notiamo che dire  $y'(0) = y'(T) = 0$  ha senso in quanto (avendo derivata seconda in  $L^2$ )  $y'$  è continua.

Allora il problema  $(P_f^1)$  ha soluzione unica per ogni  $f$  in  $L^2([0, T])$  se e solo se  $\lambda \neq \tilde{\omega}^2 k^2$  per ogni  $k \geq 0$  intero. Tale soluzione è data da

$$y \underset{L^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda - \tilde{\omega}^2 n^2} \mathbf{c}_n, \quad \text{dove} \quad f \underset{L^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$$

Se invece  $\lambda = \tilde{\omega}^2 k_0^2$  per un intero  $k_0 \geq 0$  allora esiste soluzione se e solo se il coefficiente  $k_0$ -esimo relativo a  $f$  è zero, cioè se e solo se

$$\int_0^T f(t) \cos(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

*In questo caso la soluzione  $y$  non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi*

$$\int_0^\pi y(t) \cos(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

*(potendosi in generale aggiungere a tale soluzione  $v \mathbf{c}_{k_0}$  con  $v$  in  $\mathbb{R}$ ). Anche in questo caso la regolarità di  $y$  aumenta se si hanno informazioni aggiuntive sulla sommabilità dei  $(v_n)$ .*