COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2.

1. Siano dati

$$S := \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 + y^2, z \geq 0\}, \qquad \vec{f} := xy(e^{xz}\vec{\mathbf{j}} - e^{yz}\vec{\mathbf{i}}) + (e^{yz} - e^{xz})\vec{\mathbf{k}}$$

   (a) Si trovi una parametrizzazione che rende S una superficie regolare (2p.).
   (b) Si calcoli (6p.)
   $$\int_S z\, d\sigma.$$
   (c) Si mostri che $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ e si calcoli un possibile $\vec{F}$ (6p.).
   (d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S considerando su S la normale concorde con $\vec{\mathbf{k}}$ (6p.).
   (e) Si calcoli (4p)
   $$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$
   dove $\gamma(t) := 2\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + 2\sin(t)\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$.

2. Si trovi la soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine (12p.)

$$\begin{cases} x' = y + 1 & x(0) = 0 \\ y' = -x + 2y + t & y(0) = 0 \end{cases}$$

(1) (a) S è il grafico della funzione $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sull'insieme $A = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Dunque si può prendere la parametrizzazione

$\Gamma(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$ che corrisponde alla normale

$\vec{N}(x,y) = (2x, 2y, 1) \Rightarrow \|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}$

(b) Bisogna calcolare

$$\iint_S z\, d\sigma = \iint_A g(x,y)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \text{(coord. polari)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = (s = \rho^2) = \pi \int_1^4 s\sqrt{1+4s}\, ds$$

$$= \left(\sqrt{1+4s} = t \quad t^2 = 1+4s \quad s = \frac{1}{4}t^2 - 1 \quad ds = \frac{t}{2}dt\right) = \pi \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{4}t - 1\right) t \frac{t}{2}\, dt =$$

$$\frac{\pi}{8}\int_{\sqrt5}^{\sqrt{17}}(t-4)\,t^2\,dt = \frac{\pi}{8}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{4}{3}t^3\right]_{\sqrt5}^{\sqrt{17}} = \dots$$

quello del compit sarà + semplice

(c) Vedo che $\operatorname{div}\vec{f}=0$, dunque $\vec{F}$ esiste. Cerco $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial z}=-f_1 \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=f_2 \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=f_3 \quad \text{da cui}$$

$$F_1 = y\,e^{xz}+c(x,y) \qquad F_2 = x\,e^{yz}+d(x,y)$$

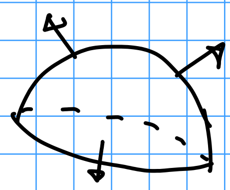
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{yz}+\frac{\partial}{\partial x}d(x,y)-e^{xz}-\frac{\partial c(x,y)}{\partial y} = e^{yz}-e^{xz}$$

dunque posso prendere $c=d=0$ e

$$\vec{F} = y\,e^{yz}\,\vec{i}+x\,e^{yz}\,\vec{j}$$

(d) Uso il T. della div su $\Omega=\{0\le z\le 4 \quad x^2+y^2\le z\}$

$\partial\Omega = S\cup B$ dove



$B=\{z=0,\ x^2+y^2\le 4\}$

e le normali uscenti da Ω sono come in figura (la normale uscente su S è concorde con $\vec{k}$, dunque coincide con quella che è stata messa prima su S). Dato che $\operatorname{div}\vec{f}=0 \Rightarrow$

$$0=\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma - \iint_B \vec{f}\cdot\vec{k}\,d\sigma =$$

(su B la normale è $-\vec{k}$)

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_{x^2+y^2\le 4} f_3(x,y,0)\,dx\,dy$$

MA $f_3(x,y,0)=0$ dunque il secondo integrale fa zero

$$\Rightarrow \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 0$$

(e) Usando Stokes $\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{s} = \iint_B \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 0$

$B \Rightarrow$ (o su S)

(2) Facendo i calcoli

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow$ (essendo $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B(\tau)\, d\tau =$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} d\tau =$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau}, & (t-\tau)e^{t-\tau} - e^{t-\tau} \\ e^{t-\tau}, & (t-\tau)e^{t-\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \tau (t-\tau) e^{t-\tau} \\ \tau e^{t-\tau} + \tau (t-\tau) e^{t-\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \dots$$