COGNOME:		
NOME:		
MATR.:		

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esercizi in vista del compitino di aprile - PARTE A[1]

1. Scrivere la definizione di raggio di convergenza per una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e le proprietà di convergenza della serie (3 p.)

2. Data la serie di Fourier $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^6} \sin(n\pi t)$. Si dica:
   - qual è il periodo di f (1p.)
   - se f è continua (2p.)

[1]PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq$ 4; Voto A+Voto B$\geq$ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

- se f è derivabile (2p.)

3. Dato il problema differenziale
$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0 & \text{in }]0,1[, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$
si dica per quali valori di $\lambda \geq 0$ la soluzione esiste ed è unica. (3p.)

4. Si dica per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} x^n$ è convergente (3p.)

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := x^2 e^{-nx^2}$ e la relativa serie di funzioni $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}$.

   (a) Si dica per quali x in $\mathbb{R}$ la serie converge (1p.).

   (b) Detto D l'insieme delle x in cui la serie converge (cioè il dominio di $S(x)$, cioè l'insieme su cui la serie converge puntualmente) si calcoli la norma uniforme di f_n su D (2p.).

   (c) Si dica se la serie converge totalmente su D (1p.)

   (d) Si trovi l'insieme delle x_0 tali che $S(x)$ è continua in x_0 (4p.)

(e) Si mostri che $S(x)$ non è continua in $x = 0$ (2p.). Cosa se ne deduce a proposito della convergenza uniforme su D? (1p.)

(f) Si dica se la serie è convergente in energia (2p.)

2. Data $f(t)$ definita da $f(t) := \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ per $0 \le t \le 2\pi$ ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico,

(a) si scriva lo sviluppo in serie di Fourier di f (4p.);

(b) si dica (giustificando) se la serie di Fourier converge uniformemente a f (1p.);

(c) si dica (giustificando) se la corrispondente serie delle derivate converge uniformemente a f' (2p.);

(d) si usi quanto trovato sopra per calcolare la somma della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$ (2p.).

$\left[\text{oppure della serie } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1} \text{ (2p.) oppure della serie } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{16n^4-8n^2+1} \text{ (3p.)}\right]$

ALTRE POSSIBILI DOMANDE

- Si studi il problema
$$xy'' - 3y' - y = x^5$$
di cui si cerchi una rappresentazione di $y(x)$ come serie di potenze $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$. Si trovi per questo una formula ricorsiva per i coefficienti a_n. Si deduca da tale formula che che le possibili soluzioni hanno $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ e che, se tali condizioni sono rispettate, si può risolvere il problema su tutto $\mathbb{R}$ assegnando ad arbitrio $y^{(4)}(0)$. Si mostri poi che esiste una e una sola soluzione polinomiale (cioè tale che abbia solo un numero finito di $a_n \neq 0$) e si trovi tale soluzione.

- Si studi il problema
$$x^2y'' - y' - 20y = x^2, \qquad y(0) = \alpha.$$
con lo stesso metodo detto sopra. Si provi che tutte le soluzioni sono polinomiali, che dato $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una e una sola soluzione e si calcoli esplicitamente la soluzione relativa ad $\alpha = 0$.

- Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione definita da $f(t) = \sinh(t)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$ e periodica di periodo 2π. Si usi lo sviluppo per il calcolo delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2+1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$