Ingegneria Aerospaziale/Chimica.Corso di Analisi Matematica 1. Compito del 28/1/2014. **FILA A**

1. Sia $f(x) := \ln(1+e^{x^2})$. Si calcolino (2+2p.): (a) $f''(0)$, (b) $f^{(4)}(0)$.
2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) := \frac{x-4}{x^2+9}$$
Si dica quanto fanno (2+2 punti): (a) $\inf_{x\geq 0} f(x)$, (b) $\sup_{x\geq 0} f(x)$.
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := (\ln(2x+e^2))^{\sin(3x)}$ si calcoli il valore di $f'(0)$ (4 p.).
4. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4+4 punti)
$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{\frac{n+2}{n-8}}-1\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+7^n+n^8}}{1+3^{-n}}.$$
5. Calcolare il seguente limite di funzione (13 punti)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\sin^2(x)}\cos(2x)-1}{(\cos(x)-1)^2}$$
6. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando $\boxed{\text{AC}}$), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrando $\boxed{\text{NC}}$) (2 punti ciascuno)
$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3n^7+n!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n+3}{n^2+5n+1}$$
7. Si dica per quali valori del parametro α in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio (4p.):
$$\int_0^{\infty} \frac{x-\ln(1+x)}{x^\alpha(1+x^5)}\, dx$$
8. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (5 punti)
$$y''+2y'+y = 2e^{-x}, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$$
9. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{\frac{1-e^{-2x}}{e^{2x}+1}}\, dx$$
10. Si consideri l'equazione differenziale:
$$y' + \frac{2y}{x+1} = \frac{2x+1}{2x+5} \qquad x > -1.$$
    (a) si scriva la soluzione generale dell'equazione (al variare di una opportuna costante C, scelta come più si ritenga opportuno) (4p.);
    (b) si calcolino (al variare della suddetta C) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
    (c) si tracci il grafico di $y(x)$, mettendo in evidenza i casi "più significativi" (3p.);
    (d) si dica per quali valori di C l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici in $]-1, +\infty[$ (2p.).

NON È CONSENTITO USCIRE. NON SI POSSONO CONSULTARE APPUNTI.
È CONSENTITO L'USO DI CALCOLATRICI NON PROGRAMMABILI.

DEVONO ESSERE CONSEGNATI **SOLO** I FOGLI RISPOSTE (il testo si può tenere)
PER GLI ESERCIZI 1,2,3,4 E 6,7,8,9 CONTA SOLO LA RISPOSTA.
GLI ESERCIZI 5 E 10 VANNO SVOLTI (NEL FOGLIO RISPOSTE) E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ UNA PARTE SIA VALIDA È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):
(a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 ,6-9 SIA MAGGIORE O EGUALE A 16 (DA DIVIDERE POI PER 2),
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 30 (DA DIVIDERE POI PER 2).

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

voto

Data: 2014

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

1. (a) 1 (b) 3

2. (a) $-\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{18}$

3. $3\ln(2)$

4. (a) 2 (b) 7

5. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

INGEGNERIA AEROSPAZIALE/CHIMICA PROVA SCRITTA DI ANALISI 1

SECONDA PARTE

voto

Data: 2014

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila:

6. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

7. $-3 < \alpha < 3$

8. $y(x) = (x^2-1)e^{-x}$

9. $\dfrac{\pi-2}{4}$

10. da svolgere sulle facciate bianche di questo foglio

ES 5 Usando Taylor

- $\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - 2\frac{x^3}{6}x + o(x^4)$
- $e^{2\sin^2(x)} = e^{2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} =$

$1 + \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(2x^2 + o(x^2)\right)^2 + o\left(O(2x^2)^2\right) =$

$1 + 2x^2 + \left(-\frac{2}{3} + 2\right)x^4 + o(x^4) = 1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$

- $e^{2\sin^2(x)}\cos(2x) = \left(1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{\cancel{4}^{\,2}x^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{16}^{\,2}x^4}{\cancel{24}_{\,3}} + o(x^4)\right) =$

$1 - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + \cancel{2x^2} - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^4 + o(x^4)$

- $(\cos(x) - 1)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\Rightarrow$ LIMITE $= \lim_{x \to 0} \frac{-2x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{4} + o(x^4)} = \frac{-2}{1/4} = -8$

ES 10 Formula risolutiva: $A(x) = \int_0^x \frac{-2}{t+1}\,dt = -2\ln(x+1) =$

$= \ln\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$. Dunque

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left(y(0) + \int_0^x \frac{2t+1}{2t+5}(t+1)^2\,dt\right) = (*)$$

Si ha $\frac{(2t+1)(t+1)^2}{2t+5} = \frac{(2t+1)(t^2+2t+1)}{2t+5} = \frac{1+4t+5t^2+2t^3}{2t+5} =$

$$2 + t^2 - \frac{9}{2t+5} \implies$$

$$(*) = \frac{1}{(x+1)^2}\left(y(0) + \left[2t + \frac{t^3}{3} - \frac{9}{2}\ln(2t+5)\right]_0^x\right) =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}\left(c + 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{9}{2}\ln(2x+5)\right)$$

dove $c = y(0) + \frac{9}{2}\ln(5)$

(b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ $\left(\text{perché } y(x) \simeq \frac{x^3}{(x+1)^2} \simeq x\right)$ qualunque c

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > \bar{c} := \frac{7}{3} + \frac{9}{2}\ln(3 \\ 0 & \text{se } c = \bar{c} \\ -\infty & \text{se } c < \bar{c} \end{cases}$$

Nel caso $c=\bar{c}$ si usa Hôpital:

$$\lim_{x\to -1} y(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{2x+1}{2x+5}(x+1)^2}{2(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x+1)(x+1)}{2x+5} = 0$$

(c) Per studiare la monotonia si studia il segno di $F(x,y) = \frac{-2y}{x+1} + \frac{2x+1}{2x+5}$

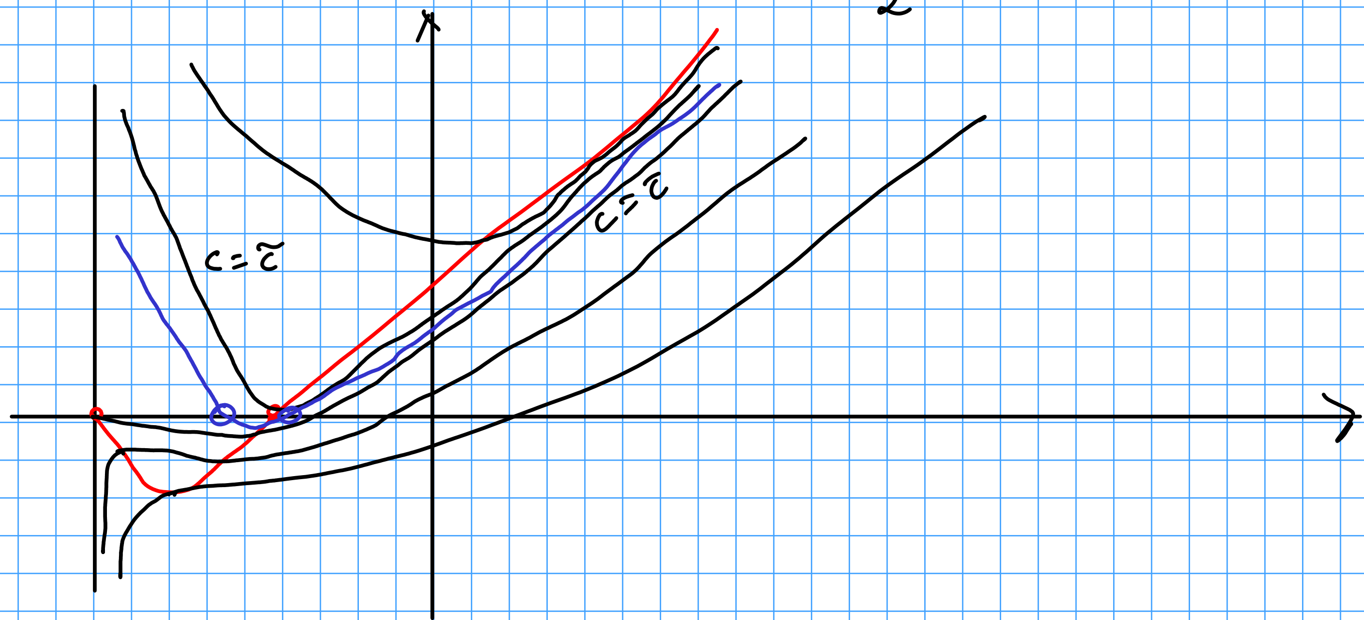
da cui $F(x,y) > 0 \iff y < \frac{(2x+1)(x+1)}{2x} =: g(x)$

Studio $g(x)$ su $[-1,+\infty[$: si ha $g(-1)=0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$g'(x) = \frac{13+20x+4x^2}{2(2x+5)^2} \Rightarrow g'(x)=0 \iff x = \frac{-5\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$g(-1/2)=0$

(d) Le curve che passano due volte per l'asse x sono quelle comprese tra



la curva con $c=\bar{c}$ (che tende a zero in -1) e quella con $c=\tilde{c}$ che vale 0 in $\frac{1}{2}$