Ingegneria Civile/Edile. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 28 gennaio 2012.

1. Si riporti l'enunciato del teorema dei valori intermedi (2 p.).
2. Si scriva la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange (2 p.).
3. Si enunci il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri su $[0, +\infty[$ (punti 2).
4. Si scriva la formula di integrazione per sostituzione. (punti 2).
5. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno).

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n! + n^n - 4^n}}{2n+3} \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+n+1} - n)(n - \ln(n))$$

6. Si calcoli il seguente limite di funzione (4 punti).

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2\sin^2(x))^{\frac{1}{x}} - e^{2x}}{x^3} = \underline{\qquad\qquad}$$

7. Per ognuna delle due serie si dica se è assolutamente convergente ($\boxed{\text{AC}}$), convergente ma non assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non convergente ($\boxed{\text{NC}}$) (2p. ciascuna).

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2} \quad , \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$$

8. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (punti 2)

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

9. Si studi la funzione f definita da $f(x) := 3\ln(|1-x^2|) + 3x^2 - 16x$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (4 punti in tutto). Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) + 20 = 0$ (1 punti).
10. Si calcoli l'integrale seguente (se esiste - o si faccia vedere che non esiste) (punti 5).

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 2}}\, dx$$

Tempo disponibile: tre ore. Non è consentito uscire. Non si possono usare calcolatrici o appunti.
Deve essere consegnato solo il foglio risposte (il testo si può tenere).

I punti 1–4 sono domande di teoria a cui bisogna rispondere in modo completo, ma sintetico (dire tutto e non aggiundere dettagli inutili).
Per gli esercizi 5–8 conta solo la risposta.
Gli esercizi 9 e 10 vanno svolti e la valutazione dipende dallo svolgimento.
Per la validità del compito è necessario che (contemporaneamente):
(a) il voto nei primi otto punti (1-8) sia maggiore o eguale a 8
(b) il voto complessivo sia maggiore o eguale a 15.

INGEGNERIA CIVILE/EDILE COMPITO DI ANALISI I DEL 28 GENNAIO 2012

Cognome:

Nome:

Matricola:

voto

1. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua, se y è compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$ [OPPURE y è compreso tra $\min_{[a,b]} f$ e $\max_{[a,b]} f$], allora esiste $x\in[a,b]$ tale che $f(x)=y$

2. Se $f:I\to\mathbb{R}$ (I intervallo) è derivabile $n+1$ volte, se $x_0\in I$, allora per ogni $x\in I$ esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$

3. Se $\{a_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente, allora la serie $\sum_n a_n$ è convergente

4. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e se $g:[c,d]\to[a,b]$ è derivabile con g' continua, allora

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

5. (a) $1/2$ (b) $1/3$

6. $-8/3$

7. (a) ~~AC~~ C NC (b) AC ~~C~~ NC

8. $y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$

I FOGLI BIANCHI SONO RISERVATI ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI 9 E 10.

5) (a) $$\frac{\sqrt[n]{n!+n^n-4^n}}{2n+3} = \frac{\sqrt[n]{n!/n^n + 1 - 4^n/n^n}}{2+\frac{3}{n}} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \to \frac{1}{2}$$

dato che $\frac{n!}{n^n} \to 0$, $\frac{4^n}{n^n} \to 0$ e $\sqrt[n]{1+o(1)} \to 1$

(b) $$\left(\sqrt[3]{n^3+n+1} - n\right)\left(n-\ln(n)\right) = n^2\left(\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3}-1\right)\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right) =$$

$$n^2\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)-1\right)\left(1+o(1)\right) =$$

$$n^2\left(\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+o(1)\right) = \left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\left(1+o(1)\right) \to \frac{1}{3}$$

Si è usato il fatto che $\frac{\ln(n)}{n} = o(1)$, cioè che $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

(c) Conviene scrivere $\left(1+2\sin^2(x)\right)^{1/x}$ come $e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+2\sin^2(x)\right)}$.

Allora

$$\sin^2(x) = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4) \Rightarrow$$

$$\ln\left(1+2\sin^2(x)\right) = \ln\left(1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right) = 2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(2x^2+o(x^3)\right)^2 + o\left(O(x^2)\right)^2 = 2x^2-\frac{2}{3}x^4-2x^4+o(x^4) = -2x^2-\frac{8}{3}x^4+o(x^4)$$

$$e^{\frac{1}{x}\ln(1+2\sin^2(x))} = e^{2x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)} = 1+2x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(2x+o(x^2)\right)^2+\frac{1}{6}\left(2x+o(x^2)\right)^3+o\left(O(x)\right)^3 = 1+2x-\frac{8}{3}x^3+$$

$$2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3) = 1+2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$ INOLTRE

$$e^{2x} = 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$ E QUINDI

$$\frac{\left(1+2\sin^2(x)\right)^{\frac{1}{x}}-e^{2x}}{x^3} = \frac{\cancel{1}+\cancel{2x}+\cancel{2x^2}-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-\cancel{1}-\cancel{2x}-\cancel{2x^2}-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} =$$

$$\frac{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = -\frac{2}{3}+o(1) \to \boxed{-\frac{8}{3}}$$

(7) (a) Se $a_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$, allora $|a_n| \le \frac{1}{n^2}$; dato che $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$

la serie $\sum_n a_n$ conv. ASSOLUTAMENTE

(b) se $a_n = (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, allora $|a_n| = \sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

è chiaramente decrescente, ma è dell'ordine di $\frac{1}{2n}$

Dunque la serie $\sum_n a_n$ CONVERGE per Leibniz, ma NON CONV. ASS.

(dato che $\sum_n \frac{1}{2n} = +\infty$)

(8) Cominciamo dall'eq. omogenea $y'' - 4y' + 4y = 0$. Il pol. caratteristico è $P(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ che ha la radice doppia $z = 2$

Dunque le sol. dell'omogenea sono

$$y_0(x) = e^{2x}(Ax + B) \qquad A, B \text{ costanti arbitrarie}$$

Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}$ di $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. Dato che e^{2x} è sol. dell'omogenea, corrispondente a una radice doppia, cerco $\bar{y}(x)$ della forma $\bar{y}(x) = c\, x^2 e^{2x}$. Allora $\bar{y}'(x) = c e^{2x}(2x^2 + 2x)$ e

$\bar{y}'' = c e^{2x}(4x^2 + 4x + 4x + 2) = c e^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$ e quindi

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4y = c e^{2x}(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 - \cancel{8x^2} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) = 2c e^{2x}.$$

POSSO PRENDERE $c = 1/2$. Allora

$$y(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + Ax + B\right) \Rightarrow y(0) = B \quad \text{(deve essere zero)}$$

$$y'(x) = e^{2x}\left(x^2 + (2A+1)x + 2B + A\right) \Rightarrow y'(0) = 2B + A \quad \text{(deve essere zero)}$$

IN DEFINITIVA $A = B = 0$ e $\boxed{y(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{2}}$

(9) $f(x) = 3\ln(|1-x^2|) + 3x^2 - 16x$

DOMINIO $x \neq \pm 1$

LIMITI $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (metto x^2 in evidenza)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (stesso discorso)

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ (l'argomento del logaritmo tende a zero)

$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ (stesso discorso)

SEGNO NON SI CAPISCE FACILMENTE. LASCIAMO PERDERE PER ORA

DERIVATA (e monotonia) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e

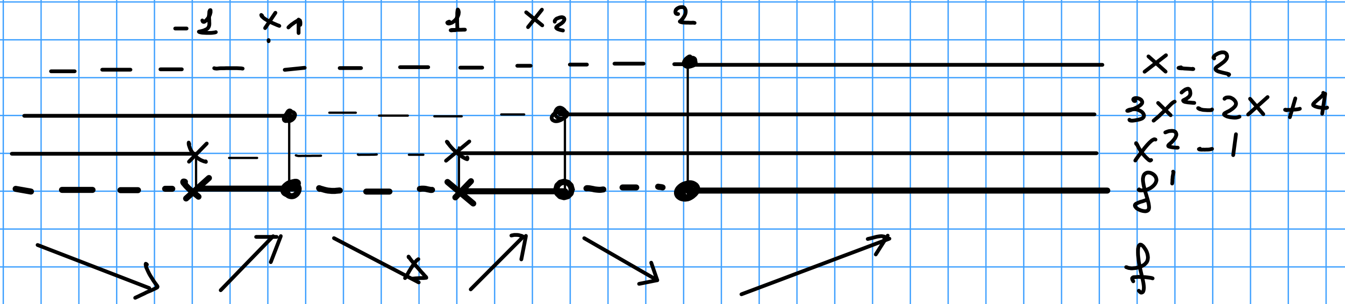
$$f'(x) = 3\,\frac{-2x}{1-x^2} + 6x - 16 = 3\,\frac{3x^3 - 8x^2 + 8}{x^2-1}$$

(ricordiamo che $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$). Notiamo che l'equazione $3x^3 - 8x^2 + 8$ ha la radice $x = 2$ e quindi possiamo fattorizzare e ottenere

$$f'(x) = \frac{3(x-2)(3x^2-2x+4)}{x^2-1}$$

	3	−8	0	8
2		6	−	−8
	3	−2	4	0

che si annulla in $x=2$ e $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$; è facile vedere che i segni di f' sono dati da: (si noti che $-1<x_1<0<1<x_2<2$)

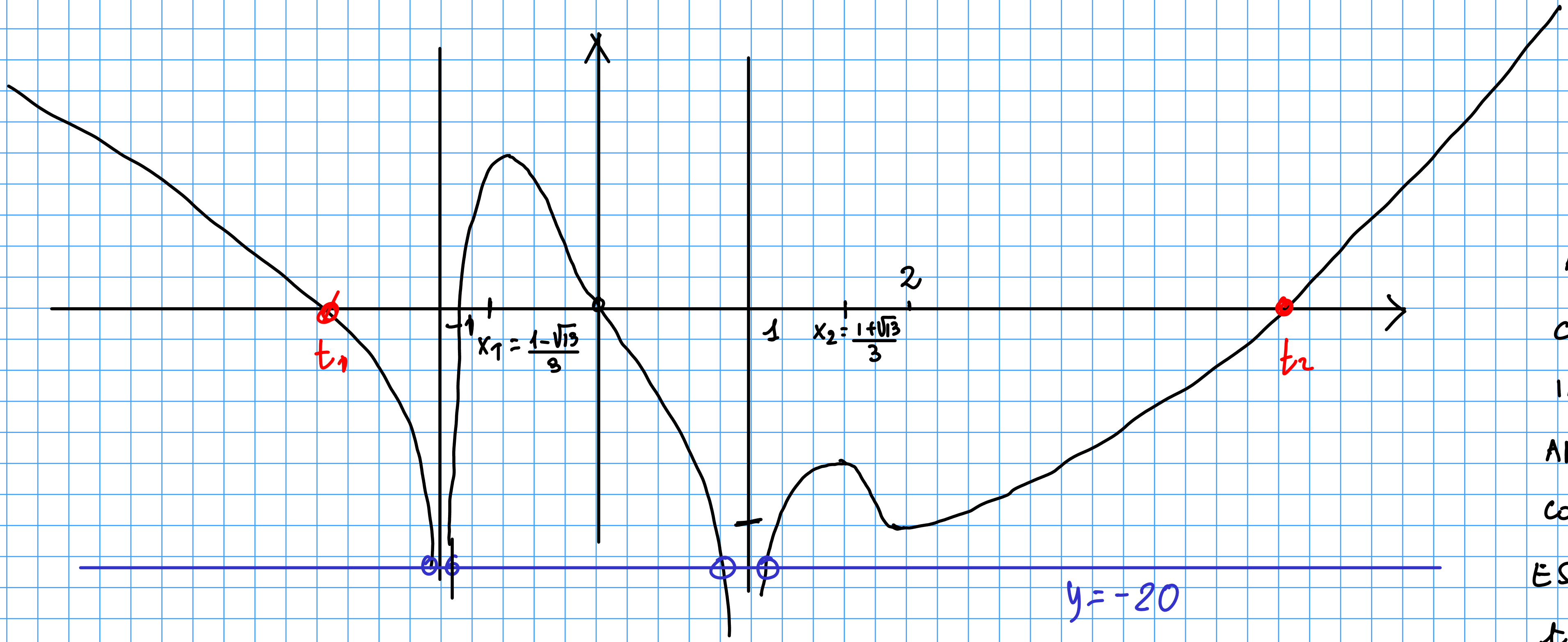


SI HA INOLTRE

$f(0)=0$

$f(2)=3\ln(3)-20$

DA CUI:



VOLENDO POSSIAMO ANCHE DIRE COME CAMBIA IL SEGNO ANCHE SE NON CONOSCIAMO ESPLICITAMENTE t_1 e t_2

DATO CHE $-20<3\ln(3)-20$ l'equazione $f(x)=-20$ $\boxed{\text{HA 4 SOLUZIONI}}$

(10) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+2}}\,dx = \left(\text{PONGO } e^x = y \iff x=\ln(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}\right)$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{y-1}{y+2}}\,\frac{dy}{y} = \left(\text{Pongo } \sqrt{\frac{y-1}{y+2}} = t \iff y-1 = t^2(y+2) \iff\right.$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(2t^2+1)^2}\, t\, \frac{6t}{(1-t^2)^2}\,dt = \qquad \left. y = \frac{2t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow dy = \frac{6t\,dt}{(1-t^2)^2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{6t^2}{(2t^2+1)^2}\,dt = \qquad t = \frac{s}{\sqrt2} \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt2}$$

$$\frac{1}{\sqrt2}\int_0^{\sqrt2}\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\,ds = -\frac{3\sqrt2}{4}\int_0^{\sqrt2}\frac{(-2s)}{(s^2+1)^2}\cdot s\,ds = \left(\text{NOTO CHE } \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right.$$

$$\left.\text{e quindi integro per parti}\right)$$

$$-\frac{3\sqrt2}{4}\left[\frac{s}{1+s^2}\right]_0^{\sqrt2} + \frac{3\sqrt2}{4}\int_0^{\sqrt2}\frac{ds}{s^2+1} = -\frac{3\sqrt2}{4}\,\frac{\sqrt2}{3} + \frac{3\sqrt2}{4}\left[\arctan(s)\right]_0^{\sqrt2} =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt2}{4}\arctan(\sqrt2)$$