

INSIEMI E NUMERI

Nozione di insieme e terminologia collegata (appartenenza, inclusione, unione, intersezione e complementare). Leggi di De Morgan.

Formalizzazione del linguaggio: proposizioni e predicati (=proposizioni dipendenti da variabili). Connettivi logici e negazione. Quantificatori (per ogni/esiste) e loro funzionamento.

Numeri interi. Principio di induzione. Formula sulla differenza di due potenze.

Numeri Interi relativi, numeri razionali e numeri reali.

Definizione di estremo superiore e inferiore. Assioma di Dedekind.

Definizione di estremo superiore/inferiore infiniti.

Caratterizzazioni degli estremi inf. e sup. Massimo e minimo di un insieme e caratterizzazione della loro esistenza.

Nozione di funzione e nozioni collegate (punto, valore, dominio, immagine, iniettività, surgettività, bigettività, funzione composta e funzione inversa, grafico).

Definizione di massimo/minimo/estremo superiore/estremo inferiore di funzioni a valori reali.

Conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche). Funzione "valore assoluto" e sue proprietà.

LIMITI E CONTINUITA'

Nozione di successione. Limite di successioni. Classificazione del comportamento al limite (succ. convergenti/divergenti/irregolari).

Proprietà dei limiti di successioni: limiti e ordine (unicità del limite, permanenza del segno, monotonia, confronto, l'esistenza del limite implica la limitatezza, limite e operazioni nel caso di limiti finiti (limite della somma (DIM), del prodotto e del quoziente, prodotto di un infinitesimo per un limitato);

Esistenza del limite per successioni monotone e sua caratterizzazione (DIM+).

Introduzione della costante e di Neper (DIM-).

Operazioni con i limiti infiniti. Forme indeterminate. Limiti per eccesso e per difetto.

Teorema di Cesaro (con la radice n-esima) (DIM-).

Sottosuccessioni. Limite delle sottosuccessioni (DIM del teorema «di composizione»).

Successioni asintotiche, ordine di infinitesimo, principio di sostituzione degli infinitesimi (DIM), o piccoli o grandi e loro proprietà (DIM-).

Nozione di punto di accumulazione tramite le successioni. Definizione di limite di funzioni tramite le successioni. Definizione di punto di accumulazione destro/sinistro e di limite destro/sinistro; definizione di limite per eccesso/difetto; legame tra queste nozioni di limite.

Proprietà dei limiti di funzione: unicità del limite, permanenza del segno, monotonia del limite, teorema di confronto (due carabinieri), somme prodotti e quozienti di limiti finiti, operazioni con i limiti infiniti e forme indeterminate.

Teorema sul limite della composizione (o cambio di variabile nei limiti) (DIM).

Esistenza dei limiti destro e sinistro per funzioni monotone e loro caratterizzazioni mediante inf e sup. (DIM).

O piccoli e o grandi in un punto e principio di sostituzione degli infinitesimi per funzioni. Limiti di funzione notevoli (per $x \rightarrow 0$ $(\exp(x)-1)/x$, $\log(1+x)/x$, $\sin(x)/x$, $(1-\cos(x))/x^2$, $((1+x)^a-1)/x$ DIM-).

Definizione di funzione continua. Classificazione dei tipi di discontinuità.

Algebra delle funzioni continue (somme prodotti e quozienti).

Continuità della composizione tra funzioni continue.

Teorema degli zeri (DIM+).

Teorema di Weierstrass (DIM+).

Teorema dei valori intermedi (DIM+). Una funzione continua trasforma intervalli in intervalli (DIM).

Caratterizzazione della continuità per una funzione monotona (DIM).

Continuità dell'inversa di una funzione continua su un intervallo (DIM).

Continuità delle funzioni elementari.

DERIVAZIONE

Definizione di derivata. Derivabilità implica continuità (DIM). Retta tangente al grafico.

Derivate successive alla prima.

Regole di calcolo delle derivate (somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa).

Derivate delle funzioni elementari (DIM-).

Teorema di Fermat (sui massimi o minimi relativi)(DIM+)

Teorema di Lagrange (DIM+) e sue conseguenze: Rolle (DIM) e Cauchy (DIM).

Relazione tra segno della derivata e monotonia (DIM+).

Se f è derivabile su un intervallo, f è costante se e solo se f' è identicamente nulla (DIM)

Teoremi di de l'Hospital (DIM+ del caso $0/0$).

Polinomio di Taylor e sua caratterizzazione (DIM). Formula di Taylor con resto di Peano (DIM+) e con resto di Lagrange (DIM).

Sviluppi di Taylor di $\exp(x)$, $\log(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^a$.

Uso della formula di Taylor nel calcolo degli o piccoli e nei limiti di forme indeterminate.

Studi di funzione.

Convessità: definizione, caratterizzazione mediante la monotonia dei rapporti incrementali. Funzioni convesse derivabili e caratterizzazione della convessità

mediante la posizione della retta tangente al grafico (DIM). Funzioni convesse derivabili due volte e caratterizzazione della convessità mediante il segno della derivata seconda.

INTEGRAZIONE

Somme di Cauchy-Riemann, somme inferiori e superiori; definizione di integrale di Riemann; caratterizzazione dell'integrabilità mediante le somme inf/sup.

Proprietà dell'integrale; linearità, additività rispetto all'intervallo, monotonia, integrabilità del prodotto, integrabilità della composizione con una funzione lipschitziana (DIM.); integrale del modulo e modulo dell'integrale.

Classi di funzioni integrabili: integrabilità delle funzioni monotone (DIM+); integrabilità delle funzioni continue (DIM nel caso lipschitziano); esempio di funzione non integrabile.

Teorema della media integrale (DIM).

Antiderivata: definizione di primitiva e struttura dell'insieme delle primitive.

Teorema fondamentale del calcolo integrale I (DIM+).

Primitive delle funzioni elementari.

Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale II (di Torricelli) (DIM+).

Integrazione per sostituzione (DIM-) e per parti (DIM-).

Integrale improprio su un intervallo illimitato o per una funzione illimitata vicino a un punto (o combinazione tra le due situazioni); classificazione del carattere di un integrale improprio; integrale di funzioni positive; criterio del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri; integrabilità assoluta e integrabilità: assolutamente integrabile implica integrabile (DIM.).

Carattere dell'integrale di $1/x^a$ al variare di a , sia al finito che all'infinito (DIM)

SERIE

Definizione delle somme parziali di una successione; nozione di convergenza /divergenza/ irregolarità di una serie e di (eventuale) somma di una serie.

Se una serie converge il suo termine generale tende a zero (DIM).

Serie geometrica e sua convergenza a seconda della ragione (DIM).

Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata e suo carattere (DIM-).

Serie a termini positivi; una serie a termini positivi non può essere irregolare (DIM+); criterio del confronto e del confronto asintotico (DIM); criterio della radice (DIM) e criterio del rapporto.

Definizione di convergenza assoluta di una serie; criterio della convergenza assoluta (DIM+).

Serie a segni alterni e criterio di Leibniz (DIM).

Integrali e serie; un criterio di convergenza per le serie tramite l'integrale improprio

(DIM); un altro modo per discutere la serie armonica (DIM-).

Proprietà commutativa e associativa delle serie.

Prodotto alla Cauchy di due serie.

Serie di potenze e loro proprietà ; raggio di convergenza, derivazione per serie.

Alcune serie di potenze notevoli (usando la formula di Taylor).

Serie di Fourier e loro proprietà; teorema di convergenza, relazioni tra sommabilità dei coefficienti della serie di Fourier e la regolarità della funzione.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni lineari del primo ordine. Formula risolutiva (DIM-). Studio qualitativo della famiglia delle soluzioni.

Equazioni a variabili separabili. Formula risolutiva (DIM-). Studio qualitativo della famiglia delle soluzioni.

Teorema di esistenza e unicità di Cauchy per le equazioni (e più in generale per i sistemi) del primo ordine.

Proprietà delle soluzioni per i sistemi lineari del primo ordine con N equazioni: caratterizzazione delle soluzioni del sistema omogeneo (formano uno spazio lineare di dimensione $N - DIM$); caratterizzazione delle soluzioni del sistema non omogeneo (formano uno spazio affine di $dim N - DIM$). Proprietà delle soluzioni dell'equazione lineare di ordine N.

Studio dell'equazione lineare a coefficienti costanti di ordine due: polinomio caratteristico, soluzioni dell'omogenea, soluzioni dell'equazione generale per particolari termini noti.

Legenda:

DIM+ → «da sapere assolutamente»

DIM → «da sapere per arrivare a un risultato decente»

DIM- → «da sapere per arrivare al massimo risultato»

Testi da cui reperire il materiale indicato sopra:

- 1) Libro di testo: Analisi Matematica 1, M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Zanichelli.
- 2) Lucidi delle lezioni svolte – in rete.
- 3) Nota integrativa sulle serie – in rete.
- 4) Nota integrativa sulle equazioni differenziali – in rete.

Il materiale relativo ai punti 2), 3) e 4) si trova all'indirizzo:

<http://saccon.blog.dma.unipi.it/>