- Analisi Matematica (calcolo): studio di funzioni
- Statistica e Probabilità
- Algebra Lineare.

Analisi Matematica

Insiemi numerici.

- $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $+, -$
- $\mathbb{Z}$ = " " interi

$0 \in \mathbb{Z}$, el. neutro per $+$

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n+m \in \mathbb{Z}$, $n-m \in \mathbb{Z}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.c. $n+m=0$, $m=-n$.

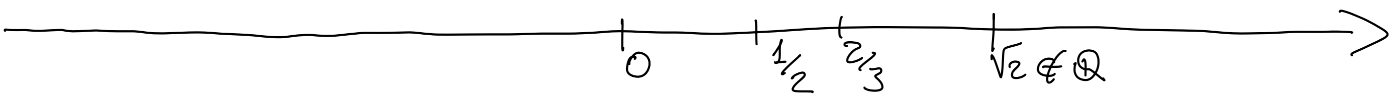
$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \cdot m \in \mathbb{Z}$

$1 \in \mathbb{Z}$, el. neutro per $\cdot$

ma $\nexists m \in \mathbb{Z}$ t.c. $n \cdot m = 1$.

- $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali $= \left\{ \frac{m}{n} \;/\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $\exists \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = 1$.

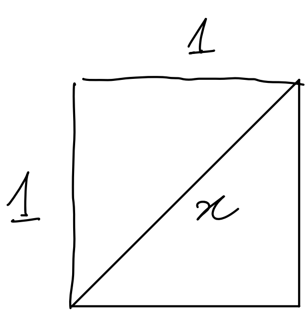


Su $\mathbb{Q}$ $\exists$ $<, >, \leq, \geq$. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato.

$\forall \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$ si ha $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ opp.

$\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$ opp.

$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.



$$1^2 + 1^2 = x^2$$
$$2 = x^2$$

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad\qquad$ $MCD(m,n)=1$ ridotte

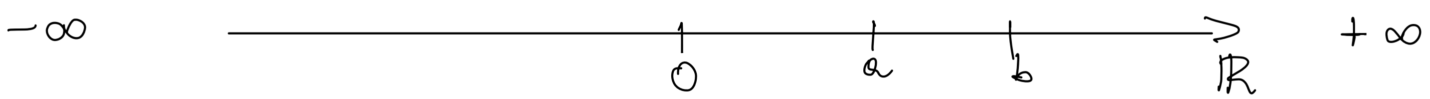
Supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora $\exists\, m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
Allora $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$, ossia ($\Leftrightarrow$) $2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2$.
Allora m è pari, quindi $\exists\, h \in \mathbb{N}$ t.c. $m = 2h$.
Allora $2n^2 = (2h)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4h^2 \Leftrightarrow n^2 = 2h^2$.
Allora n è pari. Assurdo perché m, n pari $\Rightarrow MCD(m,n) \geq 2$.

$\square$

- $\underset{a_0}{1}, \quad \frac{1}{2}(1+2) = \underset{a_1}{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \underset{a_2}{\frac{17}{12}}, \ldots$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \geq 0.$$

- $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$, campo ordinato



Notazioni intervalli

- dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\quad (a,b)$ = intervallo aperto =
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

$[a,b]$ = intervallo chiuso $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

$(a,b]$, $[a,b)$, ad es: $a \in [a,b)$, $a \notin (a,b]$
$b \in (a,b]$, $b \notin [a,b)$.

- $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$

non ha senso $[-\infty, a)$.

- $[b, +\infty)$, $(b, +\infty)$; $\quad [b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq b\}$.

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si chiama MAGGIORANTE di A un $k \in \mathbb{R}$ t.c. $k \geq a \ \forall a \in A$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si chiama MINORANTE di A un $h \in \mathbb{R}$ t.c. $h \leq a \ \forall a \in A$.

Es $A = (-2, 5]$. Maggioranti di $A = \{k \in \mathbb{R} / k \geq 5\}$

Minoranti di $A = \{h \in \mathbb{R} / h \leq -2\}$.

$A = (2, +\infty)$. Maggioranti di $A = \emptyset$

Minoranti di $A = \{h \in \mathbb{R} / h \leq 2\}$.

$A = (-\infty, 1]$. Maggioranti di $A = \{k \in \mathbb{R} / k \geq 1\}$

Minoranti di $A = \emptyset$.

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se esiste almeno un maggiorante di A.

" si dice LIMITATO INFERIORMENTE se esiste almeno un minorante di A.

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice LIMITATO se è limitato superiormente e inferiormente.

ES $A = (-\infty, 1] \cup [2, 3)$. Maggioranti di $A = [3, +\infty)$

Minoranti di $A = \emptyset$

A è limitato superiormente ma non inferiormente.

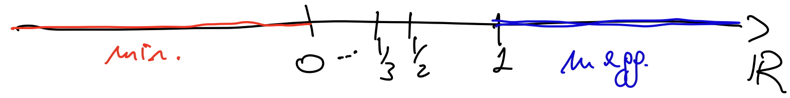
$A = \{(-1)^n / n \in \mathbb{N}\}$ Maggioranti di $A = [1, +\infty)$

$= \{-1, +1\}$ Minoranti di $A = (-\infty, -1]$

A è limitato.

$A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$ Maggioranti di $A = [1, +\infty)$

$= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ Minoranti di $A = (-\infty, 0]$

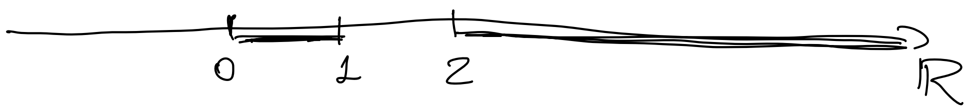


Sia $h>0$ minorante di A. $\iff h \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\left(\iff n \le \frac{1}{h} \ \forall n \in \mathbb{N}\right)$ <u>Assurdo</u>

<u>Def</u> Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, se $k \in \mathbb{R}$ è maggiorante di A e $k \in A$
allora k si dice MASSIMO di A.
se $h \in \mathbb{R}$ è minorante di A e $h \in A$
allora h si dice MINIMO di A.

<u>ES</u> $A = (-1, 3]$. 3 è massimo di A (Magg. di $A = [3, +\infty)$)
A non ha minimo (Minoranti $= (-\infty, -1]$).

$A = [0,1] \cup (2, +\infty)$ A ha massimo? <u>NO</u>, magg. di $A = \emptyset$



A ha minimo? SÌ, minoranti $= (-\infty, 0]$
$0 \in A \Rightarrow \min_A = 0$.