$(X, \mathcal{B}, f)$

μ f-invariante ed ergodica

$\mathcal{P}$ partizione finita e misurabile

$h_\mu(f, \mathcal{P})$

$\xrightarrow{\varphi}$

$(\Omega = \{0, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$

ν σ-invariante ed ergodica

$h_\nu(\sigma) = h_\nu(\sigma, \mathcal{C})$

$\mathcal{C} = \{ \mathcal{C}(1, 0, s) \}_{s \in \{0, \dots, N-1\}}$

Complessità di Stringhe

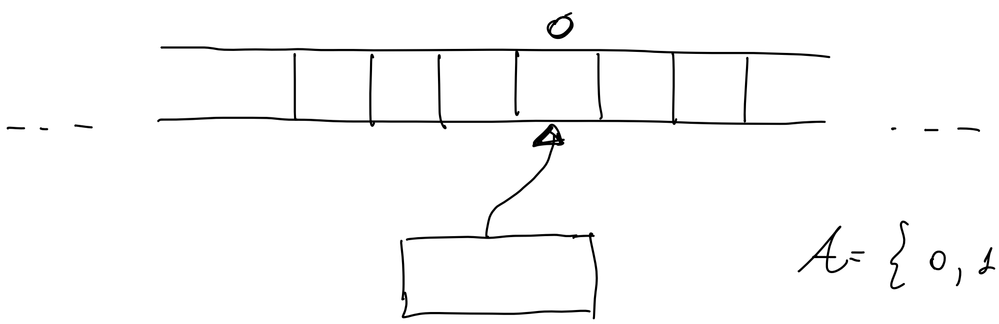
$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, ν σ-invariante ed ergodica

- $\omega \in$ supporto ν, come usare ω per misurare $h_\nu(\sigma)$?
- $\varphi(x) = \omega$, posso usare x e $\mathcal{O}(x)$ per misurare $h_\mu(f, \mathcal{P})$?

$\longleftrightarrow$

$S_1 = 0101010101$, $S_2 = 0011101100$

"Def" Macchina di Turing



$A = \{0, 1, \lambda\}$

$Q = \{q_i, q_f, \dots\}$ stati, q_i = stato iniziale

q_f = stato finale

$\mathcal{O} = \{0, 1, \lambda, D, S\}$ operazioni

$r : A \times Q \longrightarrow \mathcal{A} \times Q$ regole

- Ad una MdT è possibile associare il suo numero di Gödel

"Def" Una MdT universale è una macchina U che accetta input (k, p), $k \in \mathbb{N}$, $p \in \{0,1\}^*$ e se k è il numero di Gödel di U_k allora calcola $U_k(p)$.

Def Data $s \in \{0,1\}^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{0,1\}^n$, si definisce contenuto algoritmico di informazione di s ($AIC(s)$)

$$AIC(s) := \min \{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lunghezza di } p}}{|p|} \ / \ p \in \{0,1\}^*, \ U(p) = s \}$$

U MdT univ.

Prop (i) $AIC(s) \leq |s| + \text{cost}$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $AIC(n) \leq \log_2 n + \text{cost}$

OSS $AIC(2^{2^{2^{2^k}}}) \leq \log_2 k + \text{cost}$

Domanda $AIC(\pi_1^n) \leq n \cancel{+ \text{cost}}$

$\log_2 n + \text{cost}.$

(iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $c \in \mathbb{N}$ fissato, per almeno $2^n - 2^{n-c} + 1$ stringhe di $\{0,1\}^n$ vale

$$AIC(s) \geq |s| - c.$$

dim $\#\{p \in \{0,1\}^* / |p| < n-c\} = \sum_{k=0}^{n-c-1} 2^k = 2^{n-c} - 1.$

$\#\{s \in \{0,1\}^n / AIC(s) < n-c\} \leq 2^{n-c} - 1$ $\square$

Def $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, $K(\omega)$ complessità di ω,

$$K(\omega) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{AIC(\omega_1^n)}{n}$$

$$\omega_1^n = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n)$$

Teorema (Brudno – White) Sia ν misura di probabilità σ-invariante ed ergodica su $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Per ν-q.o. $\omega \in \Omega$, $K(\omega) = h_\nu(\sigma)$.

oss $\omega = (\omega_0\, \omega_1 \dots\dots\dots \omega_n | \dots)$

$\{0,1\}^h$ " " "

Algoritmi di compressione ottimali

Def $C : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ t.c. $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{|C(\omega_1^n)|}{n} = K(\omega)$.

- Lempel – Ziv, LZ77 – LZ78
- CASToRe (Compression Algorithm Sensitive To Regularity)

$s = 00|11|10|1100 \longrightarrow$

'0' $\to$ 0

'1' $\to$ 1

'2' = ('0', '0') $\to$ 00

'3' = ('1', '1') $\to$ 11

'4' = ('1', '0') $\to$ 10

'5' = ('3', '2') $\to$ 1100

$s = 01|0101|0101 \longrightarrow$

'0' $\to$ 0

'1' $\to$ 1

$'2' = ('0', '1') \longrightarrow 01$

$'3' = ('2', '2') \longrightarrow 0101$

$'4' = ('3', \dots)$

Applicazioni

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$ serie storica, $u_i \in [a,b]$, N lunghezza

Ipotesi $\exists\, f : [a,b] \to [a,b]$ t.c. $u_{i+1} = f(u_i)$

$\exists\, \mu$ mis. f-invariante ed ergodica t.c. $u_1 \in \operatorname{supp} \mu$

Quantificatore $h_\mu(f)$

Metodo AIC Scelgo $\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_0^\varepsilon, \dots, P_{A-1}^\varepsilon\}$ partizione di $[a,b]$ in intervalli di lungh. $\varepsilon > 0$

uso la rappresentazione simbolica $\varphi_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \Omega = \{0, \dots, A-1\}^{\mathbb{N}_0}$

dove $A \sim \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$, $\omega(\underline{u}) \in \{0, \dots, A-1\}^N$ con $u_j \in P^\varepsilon_{\omega(\underline{u})_j}$ $\forall j = 1, \dots, N$.

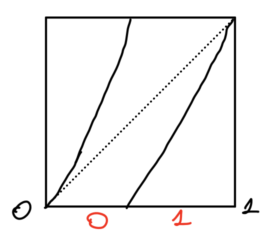
L'idea è che per $N \gg 1$, $\dfrac{|C(\omega(\underline{u}))|}{N} \sim h_\mu(f, \mathcal{P}_\varepsilon)$

lunghezza binaria della stringa $\omega(\underline{u})$ compressa

Per $\varepsilon \sim 0$, $\dfrac{|C(\omega(\underline{u}))|}{N} \sim h_\mu(f)$.

OSS $h_\mu(f) = 0$ per ogni misura f-invariante di probabilità

Esempio $f : S^1 \to S^1$, $x \longmapsto x + x^\alpha \pmod 1$, $\alpha > 1$



$f'(x) = 1 + \alpha x^{\alpha - 1}$

Se $\alpha \geq 2$, tutte le misure di probabilità f-invarianti fisiche hanno entropia nulla

L'unica misura di probabilità "fisica" $= \delta_0$

$$AIC(\varphi(x)_1^n) \asymp \begin{cases} n^{\frac{1}{\alpha-1}} & , \alpha > 2 \\ \frac{n}{\log n} & , \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\frac{AIC(\varphi(x)_1^n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Metodo Approximate Entropy 1991

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$, fissiamo $r > 0$ "tolleranza", $m \in \mathbb{N}$ $(m=1)$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_{N-m+1})$ $\qquad x_i = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1}) \in [a,b]^m$

$$C_i^m(r) := \frac{1}{N-m+1} \# \{ j \in \{1, \dots, N-m+1\} \,/\, d(x_i, x_j) < r \}$$

$$\phi^m(r) := \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^m(r)$$

<u>Prop</u> $\lim_{r \to 0} \lim_{m \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} \left[\phi^m(r) - \phi^{m+1}(r) \right] = h_\mu(f)$

$$\overset{\shortparallel}{\text{'}\lim_{r \to 0} \lim_{m \to +\infty} \left[-H_\mu(\mathcal{P}_r^m) + H_\mu(\mathcal{P}_r^{m+1}) \right]\text{'}} = \lim_{r \to 0} h_\mu(f, \mathcal{P}_r)$$

$$ApEn(m, r, N) = \phi^m(r) - \phi^{m+1}(r) =$$

$= $ " media su i di

$$- \log Prob\left(|u_{i+m} - u_{j+m}| < r \,\middle|\, \underbrace{d_\infty(x_i, x_j) < r}_{\shortparallel} \right) \text{"}$$

$$\forall \ell = 0, \dots, m-1, \ |u_{i+\ell} - u_{j+\ell}| < r$$

$$d_\infty(x_i, x_j) = \max_{\ell = 0, \dots, m-1} |u_{i+\ell} - u_{j+\ell}|$$

$$x_i = (u_i, \dots, u_{i+m-1}), \quad x_j = (u_j, \dots, u_{j+m-1})$$