$f: X \to X$, $(X, \mathcal{B})$ sp. misurabile , f misurabile

Misure f-invarianti : • $\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \delta_{f^j(x_0)}$ per x_0 periodico di periodo p

• $\mu(A) = \int_A h(x)\, dx$ per $X \subseteq \mathbb{R}^d$

supporto $\mu = \overline{\{ x \in X : h(x) > 0 \}}$

m_d(supporto μ) > 0

<u>OSS</u> Misura μ si dice <u>fisica</u> se l'insieme

$$A_\mu := \left\{ x \in X \,/\, \forall \varphi \in C^0(X) \, , \, \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X \varphi \, d\mu \right\}$$

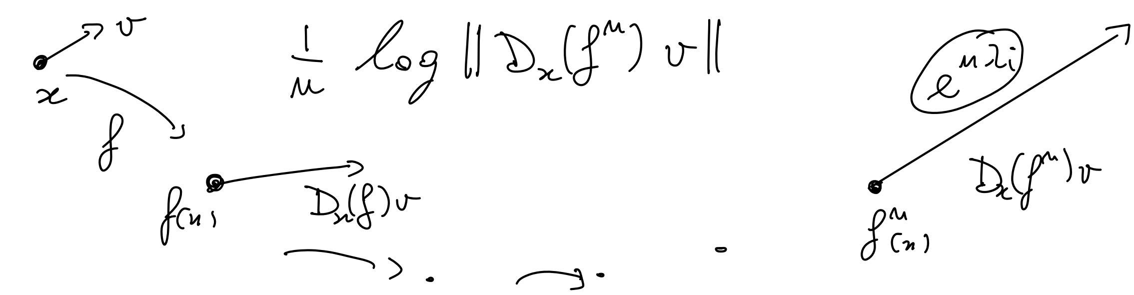
soddisfa $m_d(A_\mu) > 0$ ed è f-invariante.

<u>Entropia e complessità</u>

1. Esponenti di Lyapunov

$X \subseteq \mathbb{R}^d$, $f: X \to X$ diffeomorfismo (invertibile, $\det Df \neq 0$)

$$\frac{1}{n} \log \| D_x(f^n)\, v \|$$



<u>Teorema (Oseledets)</u> Se μ è una misura di probabilità su X che sia f-invariante ed ergodica, allora esistono:

$k \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_k$ sottosp. vett. di $\mathbb{R}^d$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

tali che per μ-q.o. $x \in X$ (per ogni $x \in \tilde{X} \subset X$ con $\mu(\tilde{X}) = 1$)

(i) $\mathbb{R}^d = T_x X = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k$

(ii) $\sum_{i=1}^{k} \dim E_i = d$

(iii) $\forall i = 1, \dots, k$,

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| D_x(f^n) v \| \qquad \forall v \in E_i$$

$$= - \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \log \| D_x(f^n) v \|$$

λ_i sono gli esponenti di Lyapunov, $\dim E_i$ è la molteplicità di λ_i

<u>ES</u> Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$, f preserva l'area, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

<u>Def</u> f è iperbolico se $\lambda_i \neq 0 \ \forall i$

f è caotico se $\exists i$ t.c. $\lambda_i > 0$.

<u>OSS</u> $f : [0,1] \to [0,1]$, $f \in C^1$, μ mis. di prob. f-invariante ed ergodica.

$$\frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |f'(f^j(x))| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \log |f'(x)| \, d\mu$$

$$(f^n)'(x) = \frac{d}{dx} (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-volte}})(x) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^j(x))$$

2. Entropia metrica o di Kolmogorov - Sinai

$(X, \mathcal{B}, f)$, μ di probabilità f-invariante ed ergodica.

$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$ partizione finita e misurabile di X

$P_i \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{i=1}^{N} P_i = X$, $\mu(P_i \cap P_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

<u>Def</u> Entropia di $\mathcal{P}$

$$H_\mu(\mathcal{P}) := - \sum_{i=1}^{N} \mu(P_i) \log \mu(P_i)$$

<u>OSS</u> $x \mapsto \mathrm{Inf}_{\mathcal{P}}(x) := - \log \mu(\underset{\substack{\parallel \\ P_i \in \mathcal{P} \text{ t.c. } x \in P_i}}{\mathcal{P}(x)})$, $\quad H_\mu(\mathcal{P}) = \int_X \mathrm{Inf}_{\mathcal{P}}(x) \, d\mu$

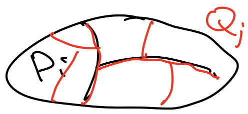
Def $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ partizioni finite, $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^N$, $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^M$

Entropia di $\mathcal{P}$ condizionata a $\mathcal{Q}$.

$$H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) := \sum_{j=1}^{M} \mu(Q_j) \left(- \sum_{i=1}^{N} \mu(P_i \mid Q_j) \log \mu(P_i \mid Q_j) \right)$$

$$\mu(P_i \mid Q_j) := \frac{\mu(P_i \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}$$

Def Diciamo che $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$, se $\forall\, Q_j \in \mathcal{Q}$ $\exists\, P_i \in \mathcal{P}$ t.c. $Q_j \subset P_i$.



X

Def Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, l'unione $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è la partizione

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{ P_i \cap Q_j \,/\, P_i \in \mathcal{P},\ Q_j \in \mathcal{Q} \}.$$

Oss $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$, $\quad \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \succ \mathcal{Q}$.

Prop (i) $0 \le H_\mu(\mathcal{P}) \le \log(\#\mathcal{P})$

(ii) $0 \le H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) \le H_\mu(\mathcal{P})$, inoltre

$$H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = 0 \iff \mathcal{Q} \succ \mathcal{P},$$

$$H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}) \iff \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q} \text{ indip.}$$

$$(\mu(P_i \cap Q_j) = \mu(P_i)\mu(Q_j))$$

(iii) $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ part. finite e misurabili

se $\mathcal{Q} \succ \mathcal{R}$ allora $H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{Q}) \le H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{R})$

(iv) $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{P}) \le H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$

Def Data $\mathcal{P}$ part. finita e misurabile, si chiamano <u>partizioni iterate di $\mathcal{P}$</u> per $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}^n := \mathcal{P} \vee f^{-1}(\mathcal{P}) \vee f^{-2}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{P})$$

- $n=1$, $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}$

  $n=2$, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \vee f^{-1}(\mathcal{P}) = \{ P_i \cap f^{-1}(P_j) \,/\, P_i, P_j \in \mathcal{P} \}$

$$\mathcal{P}^2(x) = P_i \cap f^{-1}(P_j) \ni x \iff x \in P_i \text{ e } f(x) \in P_j.$$

n, $x \in P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap f^{-2}(P_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}}) \in \mathcal{P}^n$

$\iff x \in P_{i_0}, f(x) \in P_{i_1}, \dots, f^{n-1}(x) \in P_{i_{n-1}}$.

Def Entropia metrica di f rispetto a μ e a $\mathcal{P}$

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

Def Entropia metrica (o di Kolmogorov–Sinai) di f rispetto a μ

$$h_\mu(f) := \sup \{ h_\mu(f, \mathcal{P}) \,/\, \mathcal{P} \text{ part. finita e mis} \}$$

- Una partizione $\mathcal{P}$ si dice <u>generatrice</u> se $\forall \varepsilon > 0$ $\forall Q$ part. finita $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$, $d(Q, \mathcal{P}^n) < \varepsilon$.

  Teo $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ se $\mathcal{P}$ è generatrice.

- **Teo** $X = [0,1]$ o compatto in $\mathbb{R}^d$, $f : X \to X$ continua. Se $\{\mathcal{P}_k\}$ succ. di partizioni t.c. $\mathcal{P}_{k+1} > \mathcal{P}_k$ $\forall k$ e diam $\mathcal{P}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, allora $h_\mu(f, \mathcal{P}_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} h_\mu(f)$.

Prop $\mathcal{P}$ part. finita e misurabile

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to +\infty} H_\mu(\mathcal{P} \mid f^{-1}(\mathcal{P}^n)) = \lim_{n \to +\infty} H_\mu(f^{-n}\mathcal{P} \mid \mathcal{P}^n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[H_\mu(\mathcal{P}^{n+1}) - H_\mu(\mathcal{P}^n) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x)) \right] \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x \in X$$

<u>Def</u> f si dice caotico se $\exists\, \mu$ f-inv. di probabilità fisica t.c. $h_\mu(f) > 0$.

<u>Oss</u> In casi "buoni", $h_\mu(f) = \sum \lambda_i^+$
esp. di Lyapunov positivi

<u>Def</u> $(X, \mathcal{B}, f)$ e μ misura f-inv. di prob.
$(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{f})$ e $\tilde{\mu}$ " $\tilde{f}$-inv. di prob.
sono isomorfi

se $\exists\, \varphi : X \to \tilde{X}$ misurabile, invertibile, con inv. misurabile
t.c. $\varphi \circ f = \tilde{f} \circ \varphi$ e $\varphi_* \mu = \tilde{\mu}$

(dove $\forall\, \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{B}}$, $\varphi_* \mu(\tilde{A}) = \mu(\varphi^{-1}(\tilde{A}))$).

<u>Prop</u> Se $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ è isomorfo a $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{f}, \tilde{\mu})$, allora
$$h_\mu(f) = h_{\tilde{\mu}}(\tilde{f}).$$

<u>Rappresentazione simbolica</u> $(X, \mathcal{B})$, $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $f : X \to X$, μ mis. di prob. f-invariante.

$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$ part. finita e misurabile, t.c.
$\mu(\mathring{P}_i) > 0$, $\mu(\partial P_i) = 0$.

$$\varphi : X \to \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}_0} = \Omega = \{ \omega = (\omega_0 \omega_1 \dots) \,/\, \omega_i \in \{1, \dots, N\} \ \forall i \in \mathbb{N}_0 \}$$

$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} \omega(x) = (\omega_0(x)\ \omega_1(x)\ \omega_2(x) \dots) \quad \text{dove}$$
$$f^n(x) \in P_{\omega_n(x)} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

t.c. $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$ dove σ è lo shift su Ω.

$\nu_\varphi := \varphi_* \mu$ è σ-invariante.

$$\nu_\varphi(\mathcal{C}(k,0,s_1,\dots s_k)) = \nu_\varphi(\{\omega \in \Omega \,/\, \omega_{i-1} = s_i \ \forall i = 1,\dots,k\})$$

$$\omega = (\underbrace{s_1 \dots s_k}, \dots)$$

$$= \mu(\varphi^{-1}(\mathcal{C}(k,0,s_1,\dots,s_k))) = \mu(\underbrace{P_{s_1} \cap f^{-1}(P_{s_2}) \cap \dots \cap f^{-(k-1)}(P_{s_k})}_{\in \mathcal{P}^k})$$

Allora $h_{\nu_\varphi}(\sigma) = h_\mu(f, \mathcal{P})$