• Test per la media di un campione di v.a. gaussiane con σ^2 ignota.

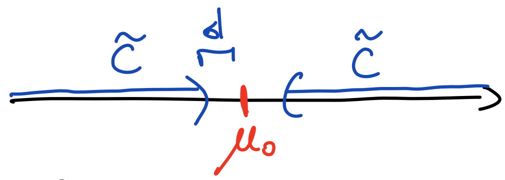
$$X_1, \dots, X_n \quad , \quad X_k \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \sigma^2 \text{ ignota}$$

Test per μ.

Statistica campionaria $\quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

· Test bilatero $\quad H_0)\ \mu = \mu_0 \quad H_1)\ \mu \neq \mu_0$

Preparazione del Test.



Fissato un livello $\alpha \in (0,1)$, trovare

$$C = \cancel{\{ |\bar{X} - \mu_0| > d \}} \quad \text{t.c.} \quad \mathbb{P}_{\mu_0}(C) \le \alpha.$$

$$C = \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}}{S} (\bar{X} - \mu_0) \right| > d \right\}$$

Trovare $d > 0$ t.c. $\mathbb{P}_{\mu_0}\left(\left| \frac{\sqrt{n}}{S} (\bar{X} - \mu_0) \right| > d \right) = \alpha$

$$\left\{ \omega : \left| \frac{\sqrt{n}}{S} (\bar{X} - \mu_0) \right| > d \right\} = \left\{ |\bar{X} - \mu_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} d \right\}$$

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\left| \frac{\sqrt{n}}{S} (\bar{X} - \mu_0) \right| > d \right) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(|T_{n-1}| > d \right) =$$

T_{n-1} è v.a. con densità di Student

a $(n-1)$ gradi di libertà

$$= \mathbb{P}_{\mu_0}(T_{n-1} > d) + \mathbb{P}_{\mu_0}(T_{n-1} < -d) =$$

$$= 1 - F_{n-1}(d) + F_{n-1}(-d) = 2\left[1 - F_{n-1}(d)\right] = \alpha$$

$$\iff F_{n-1}(d) = 1 - \alpha/2 \iff d = \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}$$

La regione critica C al livello α è data da

$$\boxed{C = \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}}{S}(\overline{X} - \mu_0) \right| > \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)} \right\}}$$

<u>OSS</u> Curva operativa non si definisce

Utilizzo dei dati $x_1, \dots, x_n \ (= X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$

L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \iff \Big(\omega \in A$

$$\iff \left| \frac{\sqrt{n}}{S(\omega)}(\overline{X}(\omega) - \mu_0) \right| \le \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)} \Big) \iff$$

$$\boxed{|\overline{x} - \mu_0| \le \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}}$$

P-value $\quad \alpha < \overline{\alpha} \implies |\overline{x} - \mu_0| \le \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}$

$\quad \alpha > \overline{\alpha} \implies |\overline{x} - \mu_0| > \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}} \tau_{(1-\alpha/2,\, n-1)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{\alpha} = 2\left[1 - F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,|\bar{x}-\mu_0|\right)\right]}$$

- Test unilateri

$H_0)$ $\mu \geq \mu_0$ $\quad H_1)$ $\mu < \mu_0$

Livello α deve verificare $\mathbb{P}_\mu(C) \leq \alpha \quad \forall \mu \geq \mu_0$

$$\boxed{C = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X}-\mu_0) < \tau_{(\alpha, n-1)} \right\}}$$

L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \iff$

$$\boxed{\bar{x} - \mu_0 \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\tau_{(\alpha, n-1)}} \left(= -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\tau_{(1-\alpha, n-1)}\right)$$

P-value $\quad \boxed{\bar{\alpha} = F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\mu_0)\right)}$

$H_0)$ $\mu \leq \mu_0$ $\quad H_1)$ $\mu > \mu_0$

$$\boxed{C = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X}-\mu_0) > \tau_{(1-\alpha, n-1)} \right\}}$$

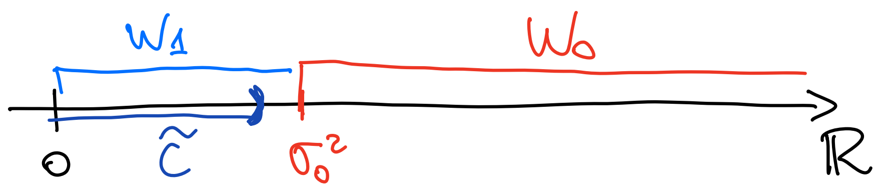
L'ipotesi è accettata al livello $\alpha \iff \boxed{\bar{x} - \mu_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\tau_{(1-\alpha, n-1)}}$

P-value $\quad \boxed{\bar{\alpha} = 1 - F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\mu_0)\right)}$

- Test per la varianza di un campione di v.a. gaussiane

$$X_1,\dots,X_n \quad , \quad X_k \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$H_0)\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad H_1)\ \sigma^2 < \sigma_0^2$$



Livello $\alpha \in (0,1)$ deve verificare che $\mathbb{P}_\sigma(C) \leq \alpha \ \forall \sigma \geq \sigma_0$.

$$C = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < d \right\} = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{d} < \sigma_0^2 \right\} =$$

$$= \left\{ S^2 < \frac{d}{n-1}\sigma_0^2 \right\}$$

<u>OSS</u> $\quad \mathbb{P}_\sigma(C) \leq \mathbb{P}_{\sigma_0}(C) \quad \forall \sigma \geq \sigma_0$

$$\mathbb{P}_\sigma(C) = \mathbb{P}_\sigma\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < d\right) = \mathbb{P}_\sigma\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{\sigma_0^2 d}{\sigma^2}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(C_{n-1} < \frac{\sigma_0^2 d}{\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}\left(C_{n-1} < d\right) =$$

$$= \mathbb{P}_{\sigma_0}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < d\right) = \mathbb{P}_{\sigma_0}(C)$$

È sufficiente cercare $d>0$ t.c. $\mathbb{P}_{\sigma_0}(C) = \alpha$.

$$\alpha = \mathbb{P}_{\sigma_0}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < d \right) = F_{\chi^2(n-1)}(d)$$

$$\Longleftrightarrow \quad d = \chi^2_{(\alpha, n-1)}$$

$$\boxed{C = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(\alpha, n-1)} \right\}}$$

Curva operativa

$$(0,+\infty) \ni \sigma \longmapsto \beta(\sigma) := \mathbb{P}_\sigma(A) =$$

$$= \mathbb{P}_\sigma\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(\alpha,n-1)} \right) = \mathbb{P}_\sigma\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi^2_{(\alpha,n-1)} \right)$$

$$= \boxed{1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi^2_{(\alpha,n-1)} \right) = \beta(\sigma)}$$

Utilizzo dei dati $x_1, \dots, x_n$

L'ipotesi è accettata al livello α $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(n-1)\,\overline{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(\alpha,n-1)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\overline{\sigma}^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2_{(\alpha,n-1)}}$$

P-value $\quad \boxed{\overline{\alpha} = F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{(n-1)\,\overline{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \right)}$

$\mathcal{H}_0) \ \sigma^2 \le \sigma_0^2 \qquad \mathcal{H}_1) \ \sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\boxed{C = \left\{ \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} \right\}}$$

$$\boxed{\beta(\sigma) = F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} \right)}$$

L'ipotesi è accettata al livello α ⟺

$$\boxed{\bar{\sigma}^2 \le \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2_{(1-\alpha, n-1)}}$$

P-value $\boxed{\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{(n-1)\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \right)}$

<u>Esercizio</u> Si vuole verificare l'affermazione che il consumo medio di acqua sia di 350 l al giorno per abitazione.
Supponiamo di fare una rilevazione su 20 abitazioni, ottenendo

$$\bar{x} = 353.8 , \qquad \bar{\sigma} = 21.8478$$

(a) L'affermazione è plausibile?

$X_1, \dots, X_{20}$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ, σ^2 ignote

Test sulla media bilatero

$$H_0)\ \mu = 350 \quad , \quad H_1)\ \mu \neq 350$$

P-value $\quad \bar{\alpha} = 2\left[1 - F_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\bar{\sigma}}\,|\bar{x} - \mu_0|\right)\right]$

$$\bar{\alpha} = 2\left[1 - F_{19}\left(\frac{\sqrt{20}}{21.8478}\,|353.8 - 350|\right)\right] \sim$$

$$\sim 2\left[1 - F_{19}(0.778)\right] \sim 2\left[1 - 0.775\right]$$

$$\sim 2 \cdot 0.225 \sim 0.45$$

$$\underset{(R)}{\sim}\ 0.446$$

$\Rightarrow$ l'ipotesi è molto plausibile.

(b) Per quale $\bar{x}$ l'ipotesi sarebbe accettata al livello del 5% ? (supponiamo che $\bar{\sigma}$ non vari)

L'ipotesi è accettata al livello α $\Leftrightarrow$

$$|\bar{x} - \mu_0| \leq \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}\,\tau_{(1-\alpha/2,\ n-1)}$$

$\alpha = 0.05$

$1 - \alpha/2 = 0.975$

$$|\bar{x} - 350| \leq \frac{21.8478}{\sqrt{20}}\,\tau_{(0.975,\ 19)}$$

$$\sim \frac{21.8478}{\sqrt{20}}\ 2.093$$

$\bar{x} \in (339.775, 360.225)$

<u>Es</u> Un produttore di bilance sostiene che i suoi prodotti abbiano una deviazione standard non superiore a 0.1 g. Pesando 30 volte un oggetto con una bilancia troviamo

$$\bar{\sigma}^2 = 0.015\ g \quad e \quad \boxed{\bar{x} = 1002\ g} \text{ (dato inutile)}$$

(a) È possibile accettare l'ipotesi del produttore al livello del 5%?

$x_1, \dots, x_{30}$ dati $\qquad X_1, \dots, X_{30}$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ, σ^2 ignote

Test per la varianza $\quad H_0)\ \sigma^2 \leq 0.01 = \sigma_0^2$

$H_1)\ \sigma^2 > 0.01$

$\alpha = 0.05 \qquad C = \left\{ \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} \right\} =$

$= \left\{ \frac{29\, S^2}{0.01} > \chi^2_{(0.95, 29)} \right\}$

L'ipotesi è accettata al livello del 5% $\iff$

$$0.015 = \bar{\sigma}^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} = \frac{0.01}{29} \chi^2_{(0.95, 29)}$$

$$\sim \frac{0.01}{29} 42.5569 \sim 0.01467$$

FALSO

$\Rightarrow$ l'ipotesi non è accettabile al livello del 5%

Segue che il p-value $\bar{\alpha} < 0.05$

$$\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{n-1}{\sigma_0^2}\,\bar{\sigma}^2\right) = 1 - F_{\chi^2(29)}\left(\frac{29}{0.01}\,0.015\right)$$

$$\sim 0.041$$

$\Rightarrow$ l'ipotesi è poco plausibile (da scartare)

<u>Es</u> Facciamo un test sul peso di confezioni di riso, il cui produttore sostiene che non pesino meno di 1 kg.

Pesiamo 50 confezioni e otteniamo

$$\bar{x} = 1.005 \text{ kg}, \quad \bar{\sigma} = 0.1 \text{ kg}.$$

(a) L'affermazione del produttore è accettabile al livello del 3% ?

$X_1, \dots, X_{50}$, $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ, σ^2 ignote

Test per la media $H_0)\ \mu \geq 1$ $\quad H_1)\ \mu < 1$.

$\alpha = 0.03$ $\qquad C = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu_0) < \tau_{(\alpha, n-1)} \right\}$

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{50}}{S}(\bar{X} - 1) < \tau_{(0.03, 49)} \right\}$$

L'ipotesi è accettata al livello del 3% $\Leftrightarrow$

$$\bar{x} - \mu_0 \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{(\alpha, n-1)}$$

$$\bar{x} - 1 \geq \frac{0.1}{\sqrt{50}} t_{(0.03, 49)} = -\frac{0.1}{\sqrt{50}} t_{(0.97, 49)}$$

$$0.005 \geq -\frac{0.1}{\sqrt{50}} 2 \sim -0.028$$