Probabilità condizionata

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $B \in \mathcal{A}$ non-trascurabile

Def Si chiama <u>probabilità di $A \in \mathcal{A}$ condizionata a B</u> la quantità
$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Prop $\mathcal{A} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ è una probabilità

ES Lanciamo due volte un dado. Calcolare la probabilità di ottenere un "2" almeno una volta sapendo che la somma dei due lanci è uguale a 8.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\} \qquad \# \Omega = 36$$

$$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \qquad \# B = 5$$

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\# \Omega}}{\frac{\# B}{\# \Omega}} = \frac{\#(A \cap B)}{\# B} = \frac{2}{5}$$

$$A \cap B = \{(2,6), (6,2)\}$$

ES La signora Maria ha due figli/figlie, di età diverse, e sappiamo che una è femmina. Calcolare la probabilità che siano entrambe femmine.

$$\Omega = \{ MM, MF, FM, FF \} \qquad A = \{ FF \}$$

$$B = \{ MF, FM, FF \}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Se sapessimo che il maggiore è una femmina.

$$B = \{ FM, FF \} \qquad \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

<u>ES</u> Estraiamo un numero tra $\{1, \dots, 90\}$ con reimmissione per $(n+1)$ volte. Sapendo che il numero 90 non è stato estratto nelle prime n estrazioni, qual è la probabilità che venga estratto alla $(n+1)$-esima?

$$\Omega = \{ \text{esiti di } (n+1)\text{-estrazioni} \} =$$

$$= \{ \text{stringhe di lunghezza } (n+1) \text{ nell'alfabeto } \{1, 2, \dots, 90\} \}$$

$$\# \Omega = 90^{n+1}$$

$A = \{$ esiti per cui 90 non appare nelle prime n posizioni, e appare in posizione $(n+1) \}$

$$\# A = 89^{n}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{89^n}{90^{n+1}} = \frac{1}{90} \cdot \left(\frac{89}{90}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

$A = \{$ 90 viene estratto all'$(n+1)$-esima estrazione $\}$

$B = \{$ 90 non è stato estratto nelle prime n estrazioni $\}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{90} \cdot \left(\frac{89}{90}\right)^n}{\frac{89^n \cdot 90}{90^{n+1}}} = \frac{1}{90}$$

<u>ES</u> Sia dato un mazzo di 52 carte, e ne estraiamo tre. Calcolare la probabilità che siano estratte tre carte di cuori.

(I) $\Omega = \{$ sottoinsiemi di tre elementi sulle 52 carte $\}$

$$\# \Omega = \binom{52}{3}$$

$A = \{$ sottoinsiemi di tre elementi sulle carte di cuori $\}$

$$\# A = \binom{13}{3}$$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{13!}{10!\,3!}}{\frac{52!}{49!\,3!}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

(II) $$P(A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50}$$

$A_1 = \{$ cuori alla prima $\}$ $A_2 = \{$ cuori alla seconda $\}$

$A_3 = \{\text{curo alla terza}\}$

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathbb{P}(\cancel{A_2 \cap A_1})}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \cdot \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}$$

__Prop__ (Formula di condizionamento ripetuto). Se abbiamo $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ t.c. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ sia non trascurabile, si ha

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot$$
$$\cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

__Prop__ (Formula di Bayes) Siano A e B due eventi non trascurabili, allora

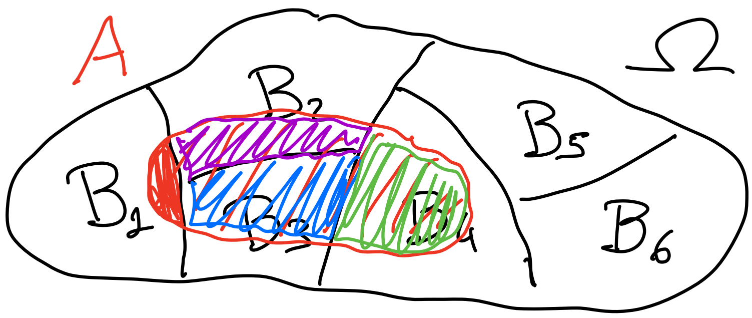
$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

__dim__ $$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \square$$

__Def__ Si chiama __sistema di alternative__ una collezione

$B_1, B_2, \dots, B_n$ di eventi non trascurabili t.c.

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad e \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega .$$



$B_i \sim$ CAUSE

__Prop__ Dato un sistema di alternative $B_1, \dots, B_n$, si ha che per ogni evento A non trascurabile, valgono:

(1) (Formula di fattorizzazione)

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$$

__dim__ $$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$$

(2) (Formula di Bayes o delle probabilità delle cause)

Per ogni B_i si ha

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)}$$

__dim__ $$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)} \qquad \square$$

ES Supponiamo che in una popolazione ci siano:

- il 28 % di giovani (0 – 29)
- il 48.8% di adulti (30 – 64)
- il 23.2 % di anziani (65 –)

Sapendo che il 2.8 % dei giovani è coniugato
65 % degli adulti "
62 % degli anziani " .

(a) Determinare la percentuale di coniugati.

(b) Sapendo che la signora Maria è coniugata, qual è la probabilità che sia adulta?

$B_1 = \{\text{giovani}\}$, $B_2 = \{\text{adulti}\}$, $B_3 = \{\text{anziani}\}$ alternative

$\mathbb{P}(B_1) = 0.28$ $\qquad \mathbb{P}(B_2) = 0.488$ $\qquad \mathbb{P}(B_3) = 0.232$

$A = \{\text{coniugati}\}$ evento non trascurabile

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0.028$ $\qquad \mathbb{P}(A|B_2) = 0.65$ $\qquad \mathbb{P}(A|B_3) = 0.62$

(a) $\mathbb{P}(A) = ?$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\,\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\,\mathbb{P}(B_3)$$

$$= 0.46888 \sim 46.9\,\%$$

(b) $\mathbb{P}(B_2 \mid A) = ?$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A \mid B_3)\,\mathbb{P}(B_3)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.65 \times 0.488}{0.46888} \sim 0.677$$