FORME DIFFERENZIALI IN $\mathbb{R}^3$ E INTEGRALI

CLAUDIO BONANNO

Contents

1. Spazio duale di uno spazio vettoriale

Dato uno spazio vettoriale reale V di dimensione n, indichiamo con $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, ossia un insieme di vettori linearmente indipendenti che verificano

$$V = \text{Span}\ (v_1, \dots, v_n) \tag{1.1}$$

Definizione 1.1 (**Spazio duale**)**.** Si chiama *spazio duale di V*, e si indica con il simbolo V^*, lo spazio vettoriale reale formato dalle applicazioni lineari ℓ su V a valori reali, ossia

$$V^* := \{\ell : V \to \mathbb{R} \ : \ \ell \text{ è lineare}\}$$

Consideriamo l'insieme delle applicazioni lineari $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ contenute in V^* che verificano

$$\ell_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$

sugli elementi della base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

Teorema 1.2. *Le applicazioni $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ definite in (1.2) sono linearmente indipendenti in V^* e ne costituiscono una base. In particolare dim$(V^*) =$ dim(V).*

Definizione 1.3 (**Base duale**)**.** Si chiama *base duale di V^** l'insieme delle applicazioni lineari $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ definite in (1.2).

Esempio 1.1 ($\mathbb{R}^3$)**.** Consideriamo il caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base costituita dai vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Lo spazio duale $(\mathbb{R}^3)^*$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, ed è quindi isomorfo a $\mathbb{R}^3$ stesso. Usiamo una rappresentazione in vettori riga (o *covettori*) per gli elementi di $(\mathbb{R}^3)^*$, e rappresentiamo l'azione sui vettori di $\mathbb{R}^3$ attraverso il prodotto riga per colonna. Data la base duale $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, i cui elementi sono rappresentati dai covettori

$$\ell_1 = (1 \;\; 0 \;\; 0) \qquad \ell_2 = (0 \;\; 1 \;\; 0) \qquad \ell_3 = (0 \;\; 0 \;\; 1)\,, \tag{1.4}$$

una generica applicazione lineare $\ell \in (\mathbb{R}^3)^*$ è una combinazione lineare a coefficienti reali della forma $\ell = c_1\ell_1 + c_2\ell_2 + c_3\ell_3$ Quindi ℓ è rappresentata dal covettore

$$\ell = (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3)$$

e scriviamo per un generico vettore $a \in \mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto \ell(a) = (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$$

$\diamondsuit$

Esempio 1.2. Allo stesso modo si costruiscono una base e una base duale per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e il suo duale $(\mathbb{R}^2)^*$. Nel seguito le indicheremo con

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \ell_1 = (1 \;\; 0) \quad \ell_2 = (0 \;\; 1) \tag{1.5}$$

Analogamente per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ e il suo duale $\mathbb{R}^*$ useremo i simboli

$$e = (1) \qquad \ell = (1) \tag{1.6}$$

$\diamondsuit$

Studiamo ora come si comportano le applicazioni lineari tra spazi vettoriali rispetto ai duali. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione n e m rispettivamente, con basi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Indichiamo con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V a W. Un'applicazione lineare $L \in \mathcal{L}$ si rappresenta, rispetto alle basi scelte, come una matrice $m \times n$, i cui elementi $\{L_{ij}\}$ verificano

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} L_{ij}\, w_i \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n \tag{1.7}$$

In forma matriciale si scrive quindi per un vettore $v \in V$

$$V \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = v \longmapsto L(v) = \begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \ldots & L_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W$$

All'applicazione lineare L è possibile associare un'applicazione lineare $L^* : W^* \to V^*$ tra gli spazi duali associati a W e V.

Definizione 1.4 (**Applicazione aggiunta**)**.** Data un'applicazione lineare $L : V \to W$ tra due spazi vettoriali, si chiama *applicazione aggiunta* L^* l'applicazione lineare $L^* : W^* \to V^*$ tra gli spazi duali di W e V rispettivamente, definita tramite

$$W^* \ni h \mapsto L^*(h) \in V^* \quad \text{tale che} \quad (L^*(h))(v) = h(L(v)) \;\; \forall\, v \in V$$

Siano poi $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ e $\{h_1, \ldots, h_m\}$ le basi duali degli spazi vettoriali V^* e W^* rispettivamente, duali rispetto alle basi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$. L'applicazione aggiunta L^* ha una rappresentazione matriciale rispetto alle basi duali come una matrice $n \times m$, i cui elementi $\{L^*_{rs}\}$ verificano

$$L^*(h_s) = \sum_{r=1}^{n} L^*_{rs}\, \ell_r \qquad \forall\, s = 1, \ldots, m \tag{1.8}$$

Teorema 1.5. *Siano: V e W spazi vettoriali di dimensione n e m, con basi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$; V^* e W^* gli spazi vettoriali duali con basi duali $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ e $\{h_1, \ldots, h_m\}$; $L : V \to W$ un'applicazione lineare e $L^* : W^* \to V^*$ la sua applicazione aggiunta. Le matrici associate alle applicazioni L e L^* rispetto alle basi date verificano*

$$L^* = L^T$$

Proof. Usando la relazione (1.8), scriviamo per ogni vettore v_j della base di V e per ogni h_s della base duale di W^*

$$(L^*(h_s))(v_j) = \sum_{r=1}^{n} L^*_{rs}\, \ell_r(v_j) = L^*_{js} \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n \;\; \forall\, s = 1, \ldots, m$$

usando nell'ultima uguaglianza la relazione (1.2). D'altra parte, per definizione di applicazione aggiunta e usando la relazione (1.7), si ottiene

$$(L^*(h_s))(v_j) = h_s(L(v_j)) = h_s\left(\sum_{i=1}^{m} L_{ij}\, w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} L_{ij}\, h_s(w_i) = L_{sj}$$

usando di nuovo nell'ultima uguaglianza la definizione di base duale. Quindi si ottiene $L^*_{js} = L_{sj}$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ e $s = 1, \ldots, m$, e il teorema è dimostrato. □

Scriviamo adesso la rappresentazione matriciale dell'applicazione aggiunta. Il Teorema 1.5 ci dice che la matrice di L^* rispetto alle basi duali è la matrice trasposta di L, ma bisogna porre attenzione nell'utilizzo dei covettori. Infatti dato un covettore $h = \sum_{s=1}^{m} d_s h_s$ l'espressione

$$L^T \,(d_1 \quad \ldots \quad d_m)$$

non ha senso, essendo L^T una matrice $n \times m$. Se vogliamo mantenere la rappresentazione in vettori riga per gli elementi di W^*, bisogna usare la rappresentazione matriciale

$$W^* \ni (d_1 \quad \ldots \quad d_m) = h \longmapsto L^T((d_1 \quad \ldots \quad d_m))^T = ((d_1 \quad \ldots \quad d_m)\, L)^T = ((c_1 \quad \ldots \quad c_m))^T$$

che è il trasposto di un covettore in V^*. Quindi concludiamo che la rappresentazione matriciale della matrice aggiunta si scrive tramite la moltiplicazione riga per colonna come

$$W^* \ni (d_1 \quad \ldots \quad d_m) = h \longmapsto (d_1 \quad \ldots \quad d_m)\, L = L^*(h) \in V^* \tag{1.9}$$

con la matrice L e il covettore a sinistra della matrice.

1.1. **Esercizi.**

Esercizio 1. Dimostrare che l'insieme V^* forma uno spazio vettoriale.

Esercizio 2. Dimostrare il Teorema 1.2.

Esercizio 3. Dimostrare che l'applicazione aggiunta L^* associata a un'applicazione lineare L è lineare.

2. Spazi tangente e cotangente

Indichiamo con $P = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ i punti dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che consideriamo lo spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$, ossia quello in cui sono immersi curve e superfici, diverso dallo spazio vettoriale $\text{Span}(e_1, e_2, e_3)$. A ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ è associato uno *spazio tangente*.

Definizione 2.1 (Spazio tangente a $\mathbb{R}^3$). Lo *spazio tangente a $\mathbb{R}^3$ in un punto P*, indicato con $T_P\mathbb{R}^3$, è uno spazio vettoriale di dimensione 3, isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Consideriamo come base di $T_P\mathbb{R}^3$ i vettori $\{e_1, e_2, e_3\}$ definiti in (1.3).

Osserviamo che nello scrivere $T_P\mathbb{R}^3 = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ dovremmo mettere una dipendenza dal punto P anche nei vettori della base. Tuttavia, non lo faremo per semplicità di notazione, e perché useremo sempre gli stessi vettori come base degli spazi tangente $T_P\mathbb{R}^3$ per ogni P.

La stessa definizione vale nel caso di spazio tangente a un insieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Ossia, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è un insieme aperto, si ha per ogni $P \in \Omega$

$$T_P\Omega = T_P\mathbb{R}^3$$

Avendo definito lo spazio tangente $T_P\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$, possiamo introdurre lo spazio duale, come abbiamo fatto nell'esempio 1.1.

Definizione 2.2 (Spazio cotangente a $\mathbb{R}^3$). Lo *spazio cotangente a $\mathbb{R}^3$ in un punto P*, indicato con $T_P^*\mathbb{R}^3$, è lo spazio vettoriale di dimensione 3 costituito dalle applicazioni lineari $\ell : T_P\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ossia $T_P^*\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(T_P\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Lo spazio $T_P^*\mathbb{R}^3$ è isomorfo allo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3)^*$, e consideriamo come base di $T_P^*\mathbb{R}^3$ i covettori $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ definiti in (1.4).

Esempio 2.1. Seguendo l'esempio 1.2, si possono riscrivere le definizioni di spazio tangente e cotangente a $\mathbb{R}^2$ e a $\mathbb{R}$, e ai loro sottoinsiemi aperti.

Introduciamo ora i concetti di spazio tangente e cotangente a una curva e a una superficie regolare.

Un *curva regolare* è data da una coppia (γ, r) dove: γ è un sottoinsieme dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$; r è una funzione di classe C^1 con dominio un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (può essere $a = -\infty$ e $b = +\infty$) e immagine l'insieme γ, tale che $\|r'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$. L'insieme γ si chiama *sostegno* e la funzione r si chiama *parametrizzazione* della curva. I punti $P \in \gamma$ sono quindi della forma $P = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

La funzione $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è differenziabile, quindi esiste in ogni punto $t \in (a, b)$ il differenziale $dr(t)$. Il differenziale è un'applicazione lineare che ha come dominio lo spazio tangente $T_t[a, b] = T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ con base $e = (1)$, e immagine un sottospazio vettoriale dello spazio tangente a $\mathbb{R}^3$ nel punto $P = r(t)$. Quindi

$$dr(t) : T_t\mathbb{R} \to T_{r(t)}\mathbb{R}^3 \qquad \forall\, t \in (a, b) \tag{2.1}$$

Si scrive anche che il differenziale dr è una funzione

$$dr : (a, b) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \tag{2.2}$$

dove abbiamo usato gli isomorfismi $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ e $T_{r(t)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ validi per ogni $t \in (a, b)$.

In forma matriciale, il differenziale $dr(t)$ si scrive quindi come una matrice 3×1, detta *matrice Jacobiana* e indicata con la notazione $Dr(t)$, data da

$$Dr(t) := \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{2.3}$$

Definizione 2.3 (**Spazio tangente a una curva**)**.** Lo *spazio tangente a una curva regolare* (γ, r) *in un punto* $P = r(t_0) \in \gamma$, indicato con $T_P\gamma$, è il sottospazio vettoriale di $T_P\mathbb{R}^3$ di dimensione uno, immagine dell'applicazione lineare $dr(t_0)$ definita in (2.1). Come base di $T_P\gamma$ consideriamo il vettore $r'(t_0)$ immagine del vettore $e = (1) \in T_t\mathbb{R}$ tramite la matrice $Dr(t_0)$, di coordinate

$$r'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $T_P\mathbb{R}^3$.

Sia P un punto della curva di sostegno γ. Essendo lo spazio tangente $T_P\gamma$ un sottospazio vettoriale di $T_P\mathbb{R}^3$, possiamo introdurre lo spazio cotangente alla curva come un sottospazio vettoriale di $T_P^*\mathbb{R}^3$.

Definizione 2.4 (**Spazio cotangente a una curva**)**.** Lo *spazio cotangente a una curva regolare* (γ, r) *in un punto* $P = r(t_0) \in \gamma$, indicato con $T_P^*\gamma$, è il sottospazio vettoriale di $T_P^*\mathbb{R}^3$ generato dal covettore ℓ_P duale a $r'(t_0)$ di coordinate

$$\ell_{r(t_0)} = \frac{1}{\|r'(t_0)\|^2} \begin{pmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^3)^* \tag{2.4}$$

nella base duale $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ di $T_P^*\mathbb{R}^3$.

Il differenziale $dr(t)$ è un'applicazione lineare da $T_t\mathbb{R}$ a $T_{r(t)}\mathbb{R}^3$, quindi possiamo introdurre la sua applicazione aggiunta $dr^*(t)$ secondo la Definizione 1.4. Si ottiene quindi che $dr^*(t)$ è un'applicazione lineare tra gli spazi cotangenti

$$dr^*(t) : T^*_{r(t)}\mathbb{R}^3 \to T_t^*\mathbb{R} \tag{2.5}$$

e in forma matriciale agisce secondo la regola (1.9), quindi

$$T^*_{r(t)}\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \ell \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} Dr(t) = \left(c_1 x'(t) + c_2 y'(t) + c_3 z'(t)\right) = dr^*(t)(\ell) \in T_t^*\mathbb{R} \tag{2.6}$$

Essendo un'applicazione lineare da uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}^3$ a valori in uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}$, si ha che il suo rango è al più uno, e il suo nucleo ha dimensione almeno due. Infatti, dato il covettore $\ell_{r(t)}$ definito in (2.4) si verifica che

$$dr^*(t)(\ell_{r(t)}) = (1) \qquad \operatorname{Ker} dr^*(t) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} y'(t) & -x'(t) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z'(t) & -y'(t) \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo ha sempre dimensione due, ma la base può essere diversa da quella di sopra nel caso in cui uno dei due covettori sia nullo.

Analogamente si tratta il caso delle superfici regolari. Una *superficie regolare* è data da una coppia (Σ, r) dove: Σ è un sottoinsieme dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$; r è una funzione di classe C^1 con dominio un insieme $K \subset \mathbb{R}^2$ e immagine l'insieme Σ, iniettiva sulla parte interna di K, $int(K)$, e tale che il differenziale $dr(u, v)$ sia un'applicazione lineare di rango due per ogni $(u, v) \in int(K)$. L'insieme Σ si chiama *sostegno* e la funzione r si chiama *parametrizzazione* della superficie. I punti $P \in \Sigma$ sono quindi della forma $P = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$.

Il differenziale $dr(u, v)$ è un'applicazione lineare che, per ogni $(u, v) \in int(K)$, ha come dominio lo spazio tangente $T_{(u,v)}K = T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ con base $\{e_1, e_2\}$ definita in (1.5), e immagine un sottospazio vettoriale dello spazio tangente a $\mathbb{R}^3$ nel punto $P = r(u, v)$. Quindi

$$dr(u, v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \to T_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \qquad \forall\, (u, v) \in int(K) \tag{2.7}$$

Si scrive anche che il differenziale dr è una funzione

$$dr : int(K) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \tag{2.8}$$

dove abbiamo usato gli isomorfismi $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ e $T_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ validi per ogni $(u,v) \in int(K)$.

In forma matriciale, il differenziale $dr(u,v)$ si scrive quindi come una matrice 3×2, detta *matrice Jacobiana* e indicata con la notazione $Dr(u,v)$, data da

$$Dr(u,v) := \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.9}$$

Definizione 2.5 (**Spazio tangente a una superficie**)**.** Lo *spazio tangente a una superficie regolare* (Σ, r) *in un punto* $P = r(u_0, v_0) \in \Sigma$, indicato con $T_P\Sigma$, è il sottospazio vettoriale di $T_P\mathbb{R}^3$ di dimensione due, immagine dell'applicazione lineare $dr(u_0, v_0)$ definita in (2.7). Come base di $T_P\Sigma$ consideriamo i vettori $\{D_ur(u_0,v_0), D_vr(u_0,v_0)\}$, immagine dei vettori $\{e_1, e_2\} \in T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2$ tramite la matrice $Dr(u_0,v_0)$, di coordinate

$$D_ur(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) \end{pmatrix} \qquad D_vr(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $T_P\mathbb{R}^3$.

Sia P un punto della superficie di sostegno Σ. Essendo lo spazio tangente $T_P\Sigma$ un sottospazio vettoriale di $T_P\mathbb{R}^3$, possiamo introdurre lo spazio cotangente alla superficie come un sottospazio vettoriale di $T^*_P\mathbb{R}^3$.

Definizione 2.6 (**Spazio cotangente a una superficie**)**.** Lo *spazio cotangente a una superficie regolare* (Σ, r) *in un punto* $P = r(u_0, v_0) \in \Sigma$, indicato con $T^*_P\Sigma$, è il sottospazio vettoriale di $T^*_P\mathbb{R}^3$ generato dai covettori $\{\ell_u, \ell_v\}$ duali ai vettori $\{D_ur(u_0,v_0), D_vr(u_0,v_0)\}$.

Il differenziale $dr(u,v)$ è un'applicazione lineare da $T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ a $T_{r(u,v)}\mathbb{R}^3$, quindi possiamo introdurre la sua applicazione aggiunta $dr^*(u,v)$ secondo la Definizione 1.4. Si ottiene quindi che $dr^*(u,v)$ è un'applicazione lineare tra gli spazi cotangenti

$$dr^*(u,v) : T^*_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \to T^*_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \tag{2.10}$$

e in forma matriciale agisce secondo la regola (1.9), quindi

$$\begin{aligned} T^*_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \ni (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3) = \ell \longmapsto (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3)\, Dr(u,v) = \\ = \begin{pmatrix} c_1x_u(u,v) + c_2y_u(u,v) + c_3z_u(u,v) \\ c_1x_v(u,v) + c_2y_v(u,v) + c_3z_v(u,v) \end{pmatrix}^T = dr^*(u,v)(\ell) \in T^*_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Essendo un'applicazione lineare da uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}^3$ a valori in uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}^2$, si ha che il suo rango è al più due, e il suo nucleo ha dimensione almeno uno. Infatti si verifica che

$$\text{Ker } dr^*(u,v) = \text{Span}\left\{\vec{n}^T(u,v)\right\}$$

dove $\vec{n}(u,v) = D_ur(u,v) \times D_vr(u,v)$ indica il vettore normale alla superficie nel punto $P = r(u,v)$.

2.1. Esercizi.

Esercizio 4. Seguire il suggerimento dell'esempio 2.1.

Esercizio 5. Verificare che il covettore $\ell_{r(t_0)}$ della Definizione 2.4 è duale al vettore $r'(t_0)$ della Definizione 2.3.

Esercizio 6. Trovare una base del nucleo dell'applicazione lineare dr^* per la cicloide nel punto $P = r(\pi)$.

Esercizio 7. Verificare che il covettore $\vec{n}^T(u,v)$, trasposto del vettore normale a una superficie, è in Ker $dr^*(u,v)$, e che la dimensione del nucleo è uno.

Esercizio 8. Sia $(\Sigma, \tilde{r})$ una riparametrizzazione regolare di una superficie regolare data (Σ, r) (ossia esiste $\varphi : \tilde{K} \to K$ tale che $\tilde{r} = r \circ \varphi$ e...). Trovare una base dello spazio tangente a $(\Sigma, \tilde{r})$ in un punto P in funzione della base dello spazio tangente in P a (Σ, r).

Esercizio 9. Scrivere le coordinate rispetto alla base duale $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ di $T_P^*\mathbb{R}^3$ di una base duale $\{\ell_u, \ell_v\}$ dello spazio cotangente a una sfera di raggio $R = 1$ nel punto $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Esercizio 10. Scrivere le coordinate rispetto alla base duale $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ di $T_P^*\mathbb{R}^3$ di una base duale $\{\ell_u, \ell_v\}$ nel caso di una superficie che si ottiene come grafico di una funzione C^1, e poi nel caso di una superficie di rivoluzione con funzione $f(z)$ per cui $f'(z) \neq 0$ per ogni z.

3. Le forme differenziali e i campi di vettori

Date le definizioni di spazio tangente e di spazio cotangente allo spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$ in un punto P, possiamo considerare funzioni che associano a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio tangente o cotangente.

Ricordiamo che ogni spazio tangente $T_P\mathbb{R}^3$ ha come base i vettori $\{e_1, e_2, e_3\}$ definiti in (1.3). Definiamo funzioni X, Y e Z che associano a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio tangente tramite

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto X_P = e_1 \in T_P\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto Y_P = e_2 \in T_P\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto Z_P = e_3 \in T_P\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definizione 3.1 (**Campo di vettori differenziale**)**.** Un *campo di vettori differenziale* è una funzione A che associa a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio tangente $T_P\mathbb{R}^3$, che si scrive come

$$\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto A_P = \alpha_1(P)X_P + \alpha_2(P)Y_P + \alpha_3(P)Z_P \in T_P\mathbb{R}^3$$

per funzioni $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Il *dominio di un campo vettoriale* A è l'insieme dei punti dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$ su cui sono ben definite tutte le funzioni α_i.

Usando $P = (x, y, z)$, per semplicità scriveremo che un campo di vettori è della forma

$$A = \alpha_1(x,y,z)X + \alpha_2(x,y,z)Y + \alpha_3(x,y,z)Z \tag{3.2}$$

per funzioni $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. L'insieme dei campi di vettori su $\mathbb{R}^3$, che indichiamo con $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$, si comporta come uno spazio vettoriale, ma rispetto alla moltiplicazione per una funzione regolare. I campi di vettori $\{X, Y, Z\}$ definiti in (3.1) sono una "base" dello spazio $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$. Dati due campi A e B con funzioni $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$, si ottiene

$$\begin{gathered} (A+B) = (\alpha_1(x,y,z) + \beta_1(x,y,z))X + (\alpha_2(x,y,z) + \beta_2(x,y,z))Y + (\alpha_3(x,y,z) + \beta_3(x,y,z))Z \\ (\beta(x,y,z)A) = (\beta(x,y,z)\,\alpha_1(x,y,z))X + (\beta(x,y,z)\,\alpha_2(x,y,z))Y + (\beta(x,y,z)\,\alpha_3(x,y,z))Z \end{gathered}$$

per ogni funzione $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Analogamente possiamo considerare il caso dello spazio cotangente. Ricordiamo che ogni spazio cotangente $T_P^*\mathbb{R}^3$ ha come base i covettori $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ definiti in (1.4). Definiamo funzioni dx, dy e dz che associano a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio cotangente tramite

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto dx_P = \ell_1 \in T_P^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto dy_P = \ell_2 \in T_P^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ &\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto dz_P = \ell_3 \in T_P^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definizione 3.2 (1-forma differenziale). Una *1-forma differenziale lineare* è una funzione ω che associa a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio cotangente $T^*_P\mathbb{R}^3$, che si scrive come

$$\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto \omega_P = f_1(P)dx_P + f_2(P)dy_P + f_3(P)dz_P \in T^*_P\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(T_P\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

per funzioni $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Il *dominio di una 1-forma differenziale* è l'insieme dei punti dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$ su cui sono ben definite tutte le funzioni f_i.

Usando $P = (x, y, z)$, per semplicità scriveremo che una 1-forma differenziale è della forma

$$\omega = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz \tag{3.4}$$

per funzioni $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. L'insieme delle 1-forme, che indichiamo con $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$, si comporta come uno spazio vettoriale, ma rispetto alla moltiplicazione per una funzione regolare. Le 1-forme $\{dx, dy, dz\}$ definite in (3.3) sono una "base" dello spazio $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Date due 1-forme ω e ν con funzioni $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$, si ottiene

$$\omega + \nu = (f_1(x, y, z) + g_1(x, y, z))\, dx + (f_2(x, y, z) + g_2(x, y, z))\, dy + (f_3(x, y, z) + g_3(x, y, z))\, dz$$

$$g(x, y, z)\omega = (g(x, y, z)f_1(x, y, z))\, dx + (g(x, y, z)f_2(x, y, z))\, dy + (g(x, y, z)f_3(x, y, z))\, dz$$

per ogni funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Essendo una 1-forma ω_P un elemento di uno spazio cotangente e un campo di vettori A_P un elemento di uno spazio tangente, si può considerare l'azione di ω su A. Iniziamo considerando l'azione degli elementi di base definiti in (3.1) e (3.3) che per ogni $P \in \mathbb{R}^3$ danno

$$\begin{array}{lll} dx(X) = \ell_1(e_1) = 1 & dx(Y) = \ell_1(e_2) = 0 & dx(Z) = \ell_1(e_3) = 0 \\ dy(X) = \ell_2(e_1) = 0 & dy(Y) = \ell_2(e_2) = 1 & dy(Z) = \ell_2(e_3) = 0 \\ dz(X) = \ell_3(e_1) = 0 & dz(Y) = \ell_3(e_2) = 0 & dz(Z) = \ell_3(e_3) = 1 \end{array}$$

In più l'azione di una 1-forma su un campo di vettori è lineare rispetto alla moltiplicazione per funzioni, quindi

$$\omega(A + B) = \omega(A) + \omega(B) \qquad \omega(g(x, y, z)\, A) = g(x, y, z)\, \omega(A)$$

per ogni funzione g. Quindi nel caso

$$\omega = x\, dx + x^2\, dy + z\, dz \qquad A = X + yY + xZ$$

si ha

$$\omega(A) = x\, dx(A) + x^2\, dy(A) + z\, dz(A) = x + x^2y + xz$$

che si può interpretare dicendo che $\omega(A)$ è la funzione

$$\mathbb{R}^3 \ni P = (x_0, y_0, z_0) \longmapsto \omega_P(A_P) = (x + x^2y + xz)|_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} \in \mathbb{R}$$

Esempio 3.1 ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$). Allo stesso modo possiamo definire i campi di vettori e le 1-forme differenziali su $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$. Nel caso di $\mathbb{R}^2$, i campi $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ sono della forma

$$A = \alpha_1(x, y)X + \alpha_2(x, y)Y \tag{3.5}$$

con $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e hanno come "base" la coppia $\{X, Y\}$. Le 1-forme differenziali lineari $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ sono della forma

$$\omega = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy \tag{3.6}$$

con $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e hanno come "base" la coppia $\{dx, dy\}$. Un esempio importante di 1-forma differenziale su $\mathbb{R}^2$ è dato da

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \tag{3.7}$$

Analogamente, nel caso di $\mathbb{R}$, i campi $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ sono della forma

$$A = \alpha(x)X \tag{3.8}$$

con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con "base" $\{X\}$, e le 1-forme differenziali lineari $\Omega^1(\mathbb{R})$ sono della forma

$$\omega = f(x)dx \tag{3.9}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con "base" $\{dx\}$.

$\diamondsuit$

Osservazione 3.3. Gli spazi $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ e $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ si possono interpretare come sottospazi di dimensione 2 degli spazi $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ rispettivamente, che hanno dimensione 3. Così gli spazi $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ e $\Omega^1(\mathbb{R})$ si possono interpretare come sottospazi di dimensione 1.

Possiamo generalizzare il concetto di 1-forma differenziale, pensando di introdurre funzioni che ad un punto P dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^3$ associano un'applicazione lineare a valori reali e con dominio dato da coppie di vettori dello spazio tangente. Pensiamo quindi a funzioni della forma

$$\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto \omega_P \in \mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$$

Definiamo la nozione di *prodotto esterno* $\wedge$ *tra 1-forme differenziali.* Definiamo per $\omega, \nu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega \wedge \nu : P \longmapsto \mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R}) \qquad (\omega \wedge \nu)(A, B) := \det \begin{pmatrix} \omega(A) & \omega(B) \\ \nu(A) & \nu(B) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Proposizione 3.4. *Il prodotto esterno tra 1-forme ha le seguenti proprietà che valgono per ogni* $\omega, \nu, \mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$*:*
(i) $\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega$*;*
(ii) $\omega \wedge \omega = 0$*;*
(iii) $f\omega \wedge g\nu = fg(\omega \wedge \nu)$*, per ogni* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*;*
(iv) $(\omega + \nu) \wedge \mu = \omega \wedge \mu + \nu \wedge \mu$*.*

Gli unici prodotti del tipo (3.10) che si possono formare usando le 1-forme di base $\{dx, dy, dz\}$ *sono (a meno di permutazione) i prodotti esterni* $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$*.*

Definizione 3.5 (2-forma differenziale). Una *2-forma differenziale lineare* è una funzione ω che associa a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio di applicazioni lineari $\mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ della forma

$$\omega = f_1(x, y, z)\, dx \wedge dy + f_2(x, y, z)\, dz \wedge dx + f_3(x, y, z)\, dy \wedge dz$$

con $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Lo spazio delle 2-forme differenziali su $\mathbb{R}^3$, indicato con $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$, ha come base le 2-forme $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$ rispetto alla moltiplicazione per funzioni regolari. Quindi diciamo che $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione tre e valgono le stesse relazioni per somma e moltiplicazione per una funzione regolare che valgono per le 1-forme.

Proposizione 3.6. *Per ogni* $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ *e per ogni* $A, B \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ *si ha:*
(i) $\omega(A, A) = 0$*;*
(ii) $\omega(A, B) = -\omega(B, A)$*.*

Le applicazioni lineari in $\mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ che verificano la Proposizione 3.6 sono dette *alternanti.* Le 2-forme differenziali associano quindi a un punto $P \in \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare alternante dallo spazio $T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3)$ a valori in $\mathbb{R}$.

Esempio 3.2. Vediamo un esempio di calcolo per 2-forme. Siano $\omega, \nu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ date da

$$\omega = xy\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy + z\,dz \qquad \nu = (x^2+y^2)\,dx + \frac{1}{z}\,dy$$

Abbiamo che il dominio di ω è l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, mentre il dominio di ν è $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$. Calcoliamo ora $\omega \wedge \nu$, il cui dominio è $\mathbb{R}^3 \setminus (\{x = y = 0\} \cup \{z = 0\})$. Usiamo le proprietà del prodotto esterno (Proposizione 3.4) per scrivere $\omega \wedge \nu$ nella base di $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Troviamo

$$\omega \wedge \nu = xy\,dx \wedge \nu + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \wedge \nu + z\,dz \wedge \nu$$

e sviluppiamo i tre termini singolarmente

$$dx \wedge \nu = (x^2+y^2)\,dx \wedge dx + \frac{1}{z}\,dx \wedge dy = \frac{1}{z}\,dx \wedge dy$$

$$dy \wedge \nu = (x^2+y^2)\,dy \wedge dx + \frac{1}{z}\,dy \wedge dy = -(x^2+y^2)\,dx \wedge dy$$

$$dz \wedge \nu = (x^2+y^2)\,dz \wedge dx + \frac{1}{z}\,dz \wedge dy = (x^2+y^2)\,dz \wedge dx - \frac{1}{z}\,dy \wedge dz$$

Mettendo insieme i termini troviamo quindi

$$\omega \wedge \nu = \left(\frac{xy}{z} - y\right)\,dx \wedge dy + z(x^2+y^2)\,dz \wedge dx - dy \wedge dz$$

Osserviamo che la 2-forma che abbiamo ottenuto si può estendere all'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$.

♢

Esempio 3.3 ($\mathbb{R}^2$ **e** $\mathbb{R}$)**.** Le 2-forme differenziali su $\mathbb{R}^2$, indicate con $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$, si possono considerare come il sottospazio di $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ di 2-forme del tipo

$$\omega = f(x,y)\,dx \wedge dy$$

con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Consideriamo cioè solo 2-forme che non dipendono da z e per le quali $dz = 0$. Le 2-forme su $\mathbb{R}^2$ hanno quindi dimensione uno.

Analogamente, per $\mathbb{R}$, si trova che $\Omega^2(\mathbb{R}) = \{0\}$. Infatti consideriamo solo 2-forme che non dipendono da y e da z, e per le quali $dy = dz = 0$.

♢

Possiamo continuare a generalizzare il concetto di forma differenziale, considerando applicazioni lineari definite su terne di vettori. Ossia

$$\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto \omega_P \in \mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$$

In più chiediamo che siano applicazioni lineari alternanti. Per introdurre il concetto di *3-forma differenziale*, proviamo a usare di nuovo il prodotto esterno. Generalizzando la definizione data in (3.10) al caso di tre 1-forme, poniamo per $\omega, \nu, \mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega \wedge \nu \wedge \mu : P \longmapsto \mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$$

dato da

$$(\omega \wedge \nu \wedge \mu)(A, B, C) := \det \begin{pmatrix} \omega(A) & \omega(B) & \omega(C) \\ \nu(A) & \nu(B) & \nu(C) \\ \mu(A) & \mu(B) & \mu(C) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Proposizione 3.7. *Per ogni $\omega, \nu, \mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ si ha che:*
(i) $\omega \wedge \nu \wedge \mu = -\omega \wedge \mu \wedge \nu = \mu \wedge \omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega \wedge \mu = \nu \wedge \mu \wedge \omega = -\mu \wedge \nu \wedge \omega$*;*
(ii) $\omega \wedge \omega \wedge \nu = \omega \wedge \nu \wedge \omega = \nu \wedge \omega \wedge \omega = 0$*;*
(iii) $f\omega \wedge g\nu \wedge h\mu = fgh(\omega \wedge \nu \wedge \mu)$ *per ogni f, g, h funzioni di classe C^1;*
(iv) $(\omega + \omega') \wedge \nu \wedge \mu = \omega \wedge \nu \wedge \mu + \omega' \wedge \nu \wedge \mu$ *con $\omega' \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.*

L'unico prodotto del tipo (3.11) che si può formare usando le 1-forme di base $\{dx, dy, dz\}$ è (a meno di permutazione) il prodotto esterno $dx \wedge dy \wedge dz$.

Otteniamo quindi dalla proposizione precedente che possiamo definire

Definizione 3.8 (3-forma differenziale). Una *3-forma differenziale lineare* è una funzione ω che associa a ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ un elemento dello spazio di applicazioni lineari $\mathcal{L}(T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ della forma

$$\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

con $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Lo spazio delle 3-forme differenziali su $\mathbb{R}^3$, indicato con $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$, ha come base la 3-forma $\{dx \wedge dy \wedge dz\}$ rispetto alla moltiplicazione per funzioni regolari. Quindi diciamo che $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione uno e valgono le stesse relazioni per somma e moltiplicazione per una funzione regolare che valgono per le 1-forme.

Si possono costruire 3-forme facendo il prodotto esterno anche tra una 2-forma e una 1-forma. Per ogni $\omega, \nu, \mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ poniamo

$$(\omega \wedge \nu) \wedge \mu = \omega \wedge (\nu \wedge \mu) = \omega \wedge \nu \wedge \mu$$

Esempio 3.4. Data la 2-forma $\omega \wedge \nu$ dell'esempio 3.2 e la 1-forma $\mu = dx + \frac{1}{z}\, dy + z\, dz$, calcoliamo in funzione della 3-forma $dx \wedge dy \wedge dz$ il prodotto esterno $(\omega \wedge \nu) \wedge \mu$. Si ha

$$(\omega \wedge \nu) \wedge \mu = \left(\frac{xy}{z} - y\right) dx \wedge dy \wedge \mu + z(x^2 + y^2)\, dz \wedge dx \wedge \mu - dy \wedge dz \wedge \mu$$

Per i tre termini singolarmente si trova

$$dx \wedge dy \wedge \mu = dx \wedge dy \wedge dx + \frac{1}{z}\, dx \wedge dy \wedge dy + z\, dx \wedge dy \wedge dz = z\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$dz \wedge dx \wedge \mu = dz \wedge dx \wedge dx + \frac{1}{z}\, dz \wedge dx \wedge dy + z\, dz \wedge dx \wedge dz = \frac{1}{z}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$dy \wedge dz \wedge \mu = dy \wedge dz \wedge dx + \frac{1}{z}\, dy \wedge dz \wedge dy + z\, dy \wedge dz \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$$

Mettendo insieme i tre termini otteniamo

$$(\omega \wedge \nu) \wedge \mu = \left(xy - yz + x^2 + y^2 - 1\right)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$\diamondsuit$

Esempio 3.5 ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$). Come nell'esempio 3.3, si dimostra che $\Omega^3(\mathbb{R}^2) = \Omega^3(\mathbb{R}) = \{0\}$.

$\diamondsuit$

Per completare l'esposizione delle forme differenziali, introduciamo il concetto di *0-forma differenziale*. Osserviamo che lo spazio vettoriale $\mathcal{L}((T_P\mathbb{R}^3)^0, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, quindi le 0-forme, che per analogia sono definite come funzioni

$$\mathbb{R}^3 \ni P \longmapsto \omega_P \in \mathcal{L}((T_P\mathbb{R}^3)^0, \mathbb{R})$$

non sono nient'altro che l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Lo stesso vale nel caso di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$.

3.1. **Operatori tra forme.** Il primo operatore che introduciamo è il *differenziale esterno*. Si tratta di un operatore, che indichiamo con d, che manda k-forme in $(k+1)$-forme. Quindi

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^3) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^3) \qquad \forall\, k = 0,1,2,3 \tag{3.12}$$

In particolare $d(\Omega^3(\mathbb{R}^3)) = \{0\} = \Omega^4(\mathbb{R}^3)$, ossia $d\omega = 0$ per ogni 3-forma su $\mathbb{R}^3$.

Diamo adesso la definizione del differenziale esterno per le 0-forme. Si ha $d(\Omega^0(\mathbb{R}^3)) \subset \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Le 0-forme sono funzioni reali di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$, definiamo allora

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \tag{3.13}$$

Quindi il differenziale esterno di una 0-forma è il differenziale classico della funzione.

Trattiamo ora il caso delle 1-forme. Sia f una funzione reale su $\mathbb{R}^3$ di classe C^1, poniamo

(3.14)
$$\begin{gathered} d\big(f(x,y,z)\,dx\big) := df \wedge dx = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx\wedge dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy\wedge dx + \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz\wedge dx = \\ = -\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dx\wedge dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz\wedge dx \\ d\big(f(x,y,z)\,dy\big) := df \wedge dy = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx\wedge dy - \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dy\wedge dz \\ d\big(f(x,y,z)\,dz\big) := df \wedge dz = -\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dz\wedge dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy\wedge dz \end{gathered}$$

Quindi per una 1-forma vale la formula

$$\begin{gathered} d\big(f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz\big) = df_1\wedge dx + df_2\wedge dy + df_3\wedge dz = \\ = \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x} - \tfrac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial z} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial y} - \tfrac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz \end{gathered} \tag{3.15}$$

Infine nel caso delle 2-forme, consideriamo di nuovo prima gli elementi della base di $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Data una funzione reale f su $\mathbb{R}^3$ di classe C^1, poniamo

(3.16)
$$\begin{gathered} d\big(f(x,y,z)\,dx\wedge dy\big) := df\wedge dx\wedge dy = \tfrac{\partial f}{\partial x}\,dx\wedge dx\wedge dy + \tfrac{\partial f}{\partial y}\,dy\wedge dx\wedge dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dy = \\ = \tfrac{\partial f}{\partial z}\,dx\wedge dy\wedge dz \\ d\big(f(x,y,z)\,dz\wedge dx\big) := df\wedge dz\wedge dx = \tfrac{\partial f}{\partial y}\,dx\wedge dy\wedge dz \\ d\big(f(x,y,z)\,dy\wedge dz\big) := df\wedge dy\wedge dz = \tfrac{\partial f}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz \end{gathered}$$

Quindi per una 2-forma vale la formula

$$d\big(f_1\,dx\wedge dy + f_2\,dz\wedge dx + f_3\,dy\wedge dz\big) = \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial z} + \tfrac{\partial f_2}{\partial y} + \tfrac{\partial f_3}{\partial x}\right) dx\wedge dy\wedge dz \tag{3.17}$$

Le formule (3.13), (3.15) e (3.17) definiscono quindi l'azione del differenziale esterno d. Vediamo ora alcune sue proprietà.

Proposizione 3.9. *Il differenziale esterno soddisfa le seguenti proprietà:*
(i) $d\circ d = 0$*;*
(ii) $d(\omega+\nu) = d\omega + d\nu$*, per ogni* $\omega,\nu \in \Omega^k(\mathbb{R}^3)$*;*
(iii) $d(f\omega) = df\wedge\omega + f\,d\omega$ *per ogni funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *e ogni forma* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^3)$*.*

Esempio 3.6. Il differenziale esterno d agisce nello stesso modo sulle forme differenziali su $\mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}$. Bisogna ricordare però che $\Omega^k(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ per $k\geq 3$ e $\Omega^k(\mathbb{R}) = \{0\}$ per $k \geq 2$, e che le funzioni dipendono da due e da una sola variabile, rispettivamente.

$\diamondsuit$

Consideriamo poi l'operatore chiamato *star di Hodges*. Lo star di Hodges, indicato con il simbolo $\star$, è un operatore tra forme differenziali, definito in maniera diversa per le forme differenziali su $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$. Vale la seguente formula generale

$$\star : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n) \qquad \star \circ \star = (-1)^{k(n-k)}\, Id \tag{3.18}$$

L'azione dell'operatore $\star$ è lineare rispetto alla somma e alla moltiplicazione per funzioni regolari, quindi basta studiare la sua azione sulle basi delle forme differenziali. Cominciamo con il caso di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{gathered} \star(1) = dx \wedge dy \wedge dz \\ \star(dx) = dy \wedge dz \qquad \star(dy) = dz \wedge dx \qquad \star(dz) = dx \wedge dy \\ \star(dx \wedge dy) = dz \qquad \star(dz \wedge dx) = dy \qquad \star(dy \wedge dz) = dx \\ \star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1 \end{gathered} \tag{3.19}$$

Su $\mathbb{R}^2$ si pone

$$\begin{gathered} \star(1) = dx \wedge dy \quad \star(dx \wedge dy) = 1 \\ \star(dx) = dy \qquad \star(dy) = -dx \end{gathered} \tag{3.20}$$

e su $\mathbb{R}$ vale

$$\star(1) = dx \qquad \star\,(dx) = 1 \tag{3.21}$$

Esempio 3.7. Nel calcolo di $\star(\omega)$ bisogna fare quindi attenzione allo spazio su cui sono definite le forme. Consideriamo per esempio

$$\omega = y\, dx + xy\, dy$$

La 1-forma ω può essere vista sia in $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ sia in $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, infatti dipende solo dalle variabili x e y. Se nel calcolo del differenziale esterno i due punti di vista sono equivalenti, nell'applicazione dello star di Hodges le cose cambiano. Sia vista infatti in $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$, allora applicando le regole in (3.19) si ottiene

$$\star(\omega) = y\, dy \wedge dz + xy\, dz \wedge dx \quad \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

mentre se la vediamo come 1-forma su $\mathbb{R}^2$, applicando le regole in (3.20) si ottiene

$$\star(\omega) = y\, dy - xy\, dx \quad \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

$\diamondsuit$

3.2. **Il calcolo vettoriale.** Concludiamo lo studio delle forme differenziali e dei campi di vettori introducendo due operatori di collegamento. Abbiamo visto che le 1-forme differenziali e i campi di vettori su $\mathbb{R}^3$ soddisfano le proprietà di spazio vettoriale rispetto alla moltiplicazione per funzioni regolari. Inoltre i due spazi $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ hanno entrambi dimensione tre. Possiamo quindi costruire un isomorfismo τ tra i due spazi, definendolo sugli elementi della "base"

$$\tau : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3) \qquad \begin{cases} \tau(X) = dx \\ \tau(Y) = dy \\ \tau(Z) = dz \end{cases} \tag{3.22}$$

Quindi τ "sostituisce" un campo di vettori con la 1-forma corrispondente.

Anche lo spazio di 2-forme $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione tre, possiamo quindi introdurre anche un isomorfismo tra $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Per farlo usiamo la composizione di τ e $\star$

$$\star \circ \tau : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3) \qquad \begin{cases} \star\,(\tau(X)) = dy \wedge dz \\ \star\,(\tau(Y)) = dz \wedge dx \\ \star\,(\tau(Z)) = dx \wedge dy \end{cases} \tag{3.23}$$

L'isomorfismo τ tra campi di vettori e 1-forme permette di usare gli operatori differenziale esterno e star di Hodges per introdurre le nozioni base del calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^3$, le nozioni di *gradiente* di una funzione, e di *divergenza* e *rotore* di un campo di vettori.

$$\begin{aligned}
&\Omega^0(\mathbb{R}^3) \ni f \longmapsto \text{grad } f := \tau^{-1}(d(f)) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \\
&\mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \ni A \longmapsto \text{div } A := \star(d(\star(\tau(A)))) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) \qquad (3.24)\\
&\mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \ni A \longmapsto \text{rot } A := \tau^{-1}(\star(d(\tau(A)))) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

In formule, si ottiene

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z$$

e per un vettore $A = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$, per funzioni regolari $\alpha_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(\text{div } A)(x,y,z) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z}(x,y,z)$$

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}\right) X + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x}\right) Y + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) Z$$

Ponendo

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} X + \frac{\partial}{\partial y} Y + \frac{\partial}{\partial z} Z$$

si può scrivere anche

$$\begin{aligned}
\text{grad } f &= \nabla f \\
\text{div } A &= \nabla \cdot A \\
\text{rot } A &= \nabla \times A
\end{aligned}$$

Esempio 3.8 (Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^2$). Nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e di un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$, le nozioni di gradiente e divergenza sono definite allo stesso modo. C'è una leggera differenza per il rotore, che dipende dal diverso ruolo che ha lo star di Hodges per forme su $\mathbb{R}^2$. La differenza sostanziale riguarda solo l'immagine del rotore di un campo di vettori, che è stavolta una funzione. Si ha

$$\begin{aligned}
&\Omega^0(\mathbb{R}^2) \ni f \longmapsto \text{grad } f := \tau^{-1}(d(f)) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \\
&\mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \ni A \longmapsto \text{div } A := \star(d(\star(\tau(A)))) \in \Omega^0(\mathbb{R}^2) \qquad (3.25)\\
&\mathcal{X}(\mathbb{R}^2) \ni A \longmapsto \text{rot } A := \star(d(\tau(A))) \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

In formule, si ottiene

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y$$

e per un vettore $A = \alpha_1 X + \alpha_2 Y$, per funzioni regolari $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(\text{div } A)(x,y) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(x,y)$$

$$(\text{rot } A)(x,y) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x,y)$$

$\diamondsuit$

Proposizione 3.10. *Per ogni funzione regolare f e per ogni campo di vettori A valgono le relazioni:*
(i) $div(rot(A)) = 0$;
(ii) $rot(grad(f)) = 0$;
(iii) $div(grad(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Proof. (i) Usando le definizioni date in (3.24) si ottiene

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(A)) = \star(d(\star(\tau(\tau^{-1}(\star(d(\tau(A)))))))) = \star(d(\star(\star(d(\tau(A)))))) = \star(d(d(\tau(A)))) = 0$$

usando $d \circ d = 0$. □

3.3. **Esercizi.**

Esercizio 11. Data la 1-forma $\omega = x^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz$ e il campo di vettori $A = Y + z\,Z$, calcolare $\omega_p(A_P)$ in $P = (1, 0, 1)$. [*Risultato* = 1.]

Esercizio 12. Determinare il dominio della 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ definita in (3.7).

Esercizio 13. Dimostrare la Proposizione 3.4.

Esercizio 14. Dimostrare che ogni 2-forma del tipo $\omega \wedge \nu$, con $\omega, \nu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, si scrive come nella Definizione 3.5.

Esercizio 15. Dimostrare la Proposizione 3.6.

Esercizio 16. Data la 2-forma $\omega \wedge \nu$ trovata nell'esempio 3.2, calcolare $(\omega \wedge \nu)(A, B)$ per campi vettoriali $A = z\,X + z\,Y + x\,Z$, $B = zx\,X + zy\,Y + x^2\,Z$. [*Risultato* $= z(y - x)(xy - yz + x)$.]

Esercizio 17. Dimostrare la Proposizione 3.7.

Esercizio 18. Scrivere la proposizione che vale per le 3-forme analoga alla Proposizione 3.6.

Esercizio 19. Calcolare il differenziale esterno delle seguenti forme

$$\omega = \arctan(y + z)\,dx + x\,dy + \log(1 + y^2)\,dz$$
$$\omega = xy\,dx \wedge dy + dy \wedge dz$$
$$\omega = \tfrac{y}{x^2+y^2}\,dx - \tfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
$$f(x, y, z) = xyz$$
$$\omega = z\,dx \wedge dy \wedge dz$$

Risultato =

$$d\omega = \left(\tfrac{(y+z)^2}{1+(y+z)^2}\right)\,dx \wedge dy + \left(\tfrac{1}{1+(y+z)^2}\right)\,dz \wedge dx + \left(\tfrac{2y}{1+y^2}\right)\,dy \wedge dz$$
$$d\omega = 0$$
$$d\omega = 0$$
$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
$$d\omega = 0$$

Esercizio 20. Dimostrare la Proposizione 3.9.

Esercizio 21. Calcolare $\star(\omega)$ per le forme differenziali dell'esercizio 19, considerando se si interpretano come forme su $\mathbb{R}^3$, su $\mathbb{R}^2$ o su $\mathbb{R}$.

Esercizio 22. Dimostrare che le definizioni di gradiente, divergenza e rotore date in (3.24) e (3.25) siano ben date, e verificare le formule.

Esercizio 23. Dimostrare i punti (ii) e (iii) della Proposizione 3.10.

4. Integrali curvilinei e superficiali

L'introduzione dei concetti di spazio cotangente e di forma differenziale riduce il calcolo di un integrale curvilineo o superficiale a un semplice cambio di variabile.

Iniziamo introducendo l'"idea" di integrazione di una forma differenziale. Anziché soffermarci sul concetto formale di integrale, useremo un approccio operativo. In parole, possiamo dire che: *il concetto di integrale di una forma differenziale su un insieme U è quello di "somma" dei valori che la forma assume quando viene valutata sulla base dello spazio tangente a U nei vari punti di U.*

Bisogna osservare che dalla definizione informale che abbiamo dato risulta che una k-forma differenziale si può integrare su un insieme di dimensione k, ossia tale che lo spazio tangente nei suoi punti abbia dimensione k.

Iniziamo considerando l'integrazione di una forma differenziale su un insieme aperto di un dato spazio "fisico". Cominciamo dal caso delle 3-forme. Abbiamo visto che una 3-forma differenziale ω è una funzione che associa ad un punto dello spazio "fisico" P un'applicazione lineare in $\mathcal{L}((T_P\mathbb{R}^3)^3, \mathbb{R})$. Dato quindi un insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^3$, ad ogni punto $P \in U$ possiamo associare lo spazio tangente $T_PU = T_P\mathbb{R}^3$, essendo U aperto, e la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di T_PU. Supponendo che U sia contenuto nel dominio di ω, e scrivendo $\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$, si pone per definizione

$$\int_U \omega = \int_U f(x,y,z)\, dx \wedge dy \wedge dz := \text{“}\textstyle\sum_P\text{”}\, \omega_P(e_1, e_2, e_3) = \text{“}\textstyle\sum_P\text{”}\, f(P)$$

dove con "$\sum_P$" si intende il limite delle somme su una partizione finita di U, per il diametro della partizione che tende a zero. Quello che si ottiene è quindi il "classico" concetto di integrale di una funzione in tre variabili. Ossia

(4.1)
$$\int_U \omega = \int_U f(x,y,z)\, dx \wedge dy \wedge dz := \int\int\int_U f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad \omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3),\quad U = int(U) \subset \mathbb{R}^3$$

Osserviamo che, come precisato prima, un insieme aperto di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione tre, quindi ha senso integrare su un aperto di $\mathbb{R}^3$ soltanto le 3-forme differenziali.

Analogamente si ha nel caso di integrali su insiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}$. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, e sia $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, si pone per definizione

$$\int_U \omega = \int_U f(x,y)\, dx \wedge dy := \int\int_U f(x,y)\, dx\, dy \qquad \omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2),\quad U = int(U) \subset \mathbb{R}^2 \tag{4.2}$$

e nel caso di una 1-forma su un aperto di $\mathbb{R}$

$$\int_U \omega = \int_U f(x)\, dx := \int_U f(x)\, dx \qquad \omega \in \Omega^1(\mathbb{R}),\quad U = int(U) \subset \mathbb{R} \tag{4.3}$$

Esempio 4.1. Siano dati la forma differenziale $\omega = y\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ e $U = \left\{x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\right\}$. Calcoliamo

$$\int_U \omega = \int_U y\, dx \wedge dy = \int\int_U y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} y\, dy \right) dx = 0$$

$\diamondsuit$

Osservazione 4.1. Ribadiamo che non ha senso integrare una k-forma su un aperto di dimensione diversa da k. Quindi le 2-forme possono essere integrate solo su aperti di $\mathbb{R}^2$, e le 1-forme solo su aperti di $\mathbb{R}$. Diversa è la situazione quando integriamo su insiemi non aperti.

Definiamo adesso l'integrale di una forma differenziale per sottoinsiemi dello spazio "fisico" più generali di un aperto. Tuttavia dalla definizione informale che abbiamo dato risulta che abbiamo bisogno che sia ben definito lo spazio tangente all'insieme.

4.1. **Integrale su curve e superfici parametrizzate.** Cominciamo con il caso delle curve regolari e semplici. Ricordiamo che una curva è una coppia (γ, r), dove $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ e r è la parametrizzazione, ossia una funzione di classe C^1

$$r : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \qquad \|Dr(t)\| \neq 0 \quad \forall\, t \in (a, b)$$

e supponiamo che sia iniettiva su (a, b). Una curva è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di dimensione uno, infatti uno è la dimensione dello spazio tangente $T_P\gamma$ per ogni $P = r(t) \in \gamma$. Quindi su una curva possiamo integrare una 1-forma differenziale $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ secondo la definizione informale

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = \text{“}{\textstyle\sum_{P\in\gamma}}\text{”}\ \omega_P(r'(r^{-1}(P)))$$

dove se $P = r(t)$ allora $r'(r^{-1}(P)) = r'(t)$ è il vettore che genera $T_P\gamma$. Per calcolare l'integrale di sopra introduciamo però una definizione che si presta alla generalizzazione al caso delle superfici. Introduciamo l'idea del cambio di variabile.

Come abbiamo visto nella Sezione 2, la parametrizzazione r induce un'applicazione lineare tra gli spazi cotangenti a $\mathbb{R}^3$ e a (a, b), l'applicazione aggiunta del differenziale

$$dr^*(t) : T^*_{r(t)}\mathbb{R}^3 \to T^*_t\mathbb{R}$$

Quindi per ogni $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$T^*_{r(t)}\mathbb{R}^3 \ni \omega_{r(t)} \longmapsto dr^*(t)(\omega_{r(t)}) \in T^*_t\mathbb{R}$$

dove, usando (2.6), si ottiene

$$dr^*(t)(\omega_{r(t)}) = \left(\begin{pmatrix} f_1(r(t)) & f_2(r(t)) & f_3(r(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \right) dt \in T^*_t\mathbb{R}$$

e si pone per definizione

$$\int_\gamma \omega = \int_{r([a,b])} \omega := \int_a^b dr^*(t)(\omega_{r(t)}) \tag{4.4}$$

Per semplificare il calcolo, possiamo usare la linearità dell'applicazione dr^* e scrivere

$$dr^*(t)(\omega_{r(t)}) = f_1(r(t))dr^*(t)(dx_{r(t)}) + f_2(r(t))dr^*(t)(dy_{r(t)}) + f_3(r(t))dr^*(t)(dz_{r(t)})$$

e usare

$$\begin{aligned} dr^*(t)(dx_{r(t)}) &= \Big((1\ \ 0\ \ 0)\ Dr(t) \Big)\, dt = x'(t)\, dt \\ dr^*(t)(dy_{r(t)}) &= \Big((0\ \ 1\ \ 0)\ Dr(t) \Big)\, dt = y'(t)\, dt \\ dr^*(t)(dz_{r(t)}) &= \Big((0\ \ 0\ \ 1)\ Dr(t) \Big)\, dt = z'(t)\, dt \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \big(f_1(r(t))x'(t) + f_2(r(t))y'(t) + f_3(r(t))z'(t) \big)\ dt \tag{4.5}$$

Esempio 4.2. Integriamo la 1-forma $\omega = xy\, dy + z\, dz$ sulla curva (γ, r) con

$$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad r(t) = (\cos t)\, \vec{i} + (2 \sin t)\, \vec{j} + (t)\, \vec{k}$$

Calcoliamo innanzitutto $dr^*(t)(\omega_{r(t)})$. Abbiamo

$$Dr(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \omega_{r(t)} = (2\sin t\,\cos t)\, dy_{r(t)} + t\, dz_{r(t)}$$

quindi

$$dr^*(t)(\omega_{r(t)}) = \Big(\begin{pmatrix} 0 & (2\sin t\,\cos t) & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \Big) dt = (4\sin t\,\cos^2 t + t)\, dt \in T_t^*\mathbb{R}$$

Usando (4.4) troviamo quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (4\sin t\,\cos^2 t + t)\, dt = 2\pi^2$$

Consideriamo adesso la curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{r})$ con

$$\tilde{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad \tilde{r}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (-2\sin t)\,\vec{j} + (2\pi - t)\,\vec{k}$$

Questa curva è equivalente alla precedente, hanno cioè lo stesso sostegno, ma è percorsa in senso opposto, quindi è orientata in senso opposto. Calcoliamo

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_0^{2\pi} \big(4\sin t\,\cos^2 t - 2\pi + t\big)\; dt = -4\pi^2 + 2\pi^2 = -2\pi^2$$

$\diamondsuit$

L'integrale definito in (4.4) dipende dall'orientazione della parametrizzazione. Ossia

Proposizione 4.2. *Siano (γ, r) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{r})$ due curve regolari e semplici equivalenti, ossia $\gamma = \tilde{\gamma}$ ed esiste una funzione φ di cambio di variabile, iniettiva e di classe C^1, per cui $\tilde{r} = r \circ \varphi$. Allora per ogni $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$*

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = sign\ (\varphi') \int_\gamma \omega$$

Proof. Usiamo l'espressione (4.5). Otteniamo

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \big(f_1(\tilde{r}(\tilde{t}))(\tilde{x})'(\tilde{t}) + f_2(\tilde{r}(\tilde{t}))(\tilde{y})'(\tilde{t}) + f_3(\tilde{r}(\tilde{t}))(\tilde{z})'(\tilde{t})\big)\; d\tilde{t} =$$

$$= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \big(f_1(r(\varphi(\tilde{t})))x'(\varphi(\tilde{t})) + f_2(r(\varphi(\tilde{t})))y'(\varphi(\tilde{t})) + f_3(r(\varphi(\tilde{t})))z'(\varphi(\tilde{t}))\big)\; \varphi'(\tilde{t})\, d\tilde{t} =$$

$$= \text{sign}\ (\varphi') \int_a^b \big(f_1(r(t))x'(t) + f_2(r(t))y'(t) + f_3(r(t))z'(t)\big)\; dt = \text{sign}\ (\varphi') \int_\gamma \omega$$

$\square$

Analogamente possiamo trattare il caso dell'integrale su una superficie regolare (Σ, r). La parametrizzazione r soddisfa

$$r : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{dim (Imm } dr(u,v)) = 2 \quad \forall\, (u,v) \in int(K)$$

Una superficie è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due, infatti due è la dimensione dello spazio tangente $T_P\Sigma$ per ogni $P = r(u,v) \in \Sigma$. Quindi su una superficie possiamo integrare una 2-forma differenziale $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ secondo la definizione informale

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma f_1\, dx \wedge dy + f_2\, dz \wedge dx + f_3\, dy \wedge dz = \text{“}\textstyle\sum_{P\in\Sigma}\text{”}\ \omega_P(D_u r(r^{-1}(P)), D_v r(r^{-1}(P)))$$

dove se $P = r(u,v)$ allora $D_u r(r^{-1}(P)) = D_u r(u,v)$ e $D_v r(r^{-1}(P)) = D_v r(u,v)$ sono una base di $T_P\Sigma$. Come nel caso delle curve, usiamo l'applicazione aggiunta del differenziale

$$dr^*(u,v) : T^*_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \to T^*_{(u,v)}\mathbb{R}^2$$

e definiamo l'azione sul prodotto esterno di due 1-forme tramite

$$dr^*(\mu \wedge \nu) = dr^*(\mu) \wedge dr^*(\nu) \qquad \forall\, \mu, \nu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \tag{4.6}$$

per ottenere per ogni $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ una 2-forma su K

$$\mathcal{L}((T_{r(u,v)}\mathbb{R}^3)^2, \mathbb{R}) \ni \omega_{r(u,v)} \longmapsto dr^*(u,v)(\omega_{r(u,v)}) \in \mathcal{L}((T_{(u,v)}\mathbb{R}^2)^2, \mathbb{R})$$

e si pone per definizione

$$\int_\Sigma \omega = \int_{r(K)} \omega := \int_K dr^*(u,v)(\omega_{r(u,v)}) \tag{4.7}$$

Usando la linearità dell'applicazione dr^* possiamo scrivere

$$dr^*(u,v)(\omega_{r(u,v)}) = f_1(r(u,v))dr^*(dx \wedge dy) + f_2(r(u,v))dr^*(dz \wedge dx) + f_3(r(u,v))dr^*(dy \wedge dz)$$

e usare

$$\begin{gathered} dr^*(u,v)(dx \wedge dy) = dr^*(u,v)(dx) \wedge dr^*(u,v)(dy) = \\ = (1\ \ 0\ \ 0)\ Dr(u,v) \wedge (0\ \ 1\ \ 0)\ Dr(u,v) = (x_u\, du + x_v\, dv) \wedge (y_u\, du + y_v\, dv) = \\ = (x_u y_v - x_v y_u)\, du \wedge dv \\ dr^*(u,v)(dz \wedge dx) = dr^*(u,v)(dz) \wedge dr^*(u,v)(dx) = \\ = (0\ \ 0\ \ 1)\ Dr(u,v) \wedge (1\ \ 0\ \ 0)\ Dr(u,v) = (z_u\, du + z_v\, dv) \wedge (x_u\, du + x_v\, dv) = \\ = (z_u x_v - z_v x_u)\, du \wedge dv \\ dr^*(u,v)(dy \wedge dz) = dr^*(u,v)(dy) \wedge dr^*(u,v)(dz) = \\ = (0\ \ 1\ \ 0)\ Dr(u,v) \wedge (0\ \ 0\ \ 1)\ Dr(u,v) = (y_u\, du + y_v\, dv) \wedge (z_u\, du + z_v\, dv) = \\ = (y_u z_v - y_v z_u)\, du \wedge dv \end{gathered}$$

da cui si ottiene

$$\begin{gathered} \textstyle\int_\Sigma \omega = \\ = \textstyle\int_K\ (f_1(r(u,v))(x_u y_v - x_v y_u) + f_2(r(u,v))(z_u x_v - z_v x_u) + f_3(r(u,v))(y_u z_v - y_v z_u))\ du \wedge dv \end{gathered} \tag{4.8}$$

Osserviamo che i termini ottenuti sono legati ai minori 2×2 della matrice Jacobiana Dr, quindi sono legati alle componenti del vettore normale $n(u,v)$. Precisamente, indicando con n_1, n_2, n_3 le componenti del vettore normale, vale

$$\begin{aligned} dr^*(u,v)(dx \wedge dy) &= (x_u y_v - x_v y_u)\, du \wedge dv = n_3(u,v)\, du \wedge dv \\ dr^*(u,v)(dz \wedge dx) &= (z_u x_v - z_v x_u)\, du \wedge dv = n_2(u,v)\, du \wedge dv \\ dr^*(u,v)(dy \wedge dz) &= (y_u z_v - y_v z_u)\, du \wedge dv = n_1(u,v)\, du \wedge dv \end{aligned} \tag{4.9}$$

Osservazione 4.3. Ci si potrebbe chiedere se l'integrale dipende dall'ordine con cui abbiamo scelto le variabili (u, v) in $K \subset \mathbb{R}^2$. Se le considerassimo in ordine inverso, ossia (v, u), le cose non cambiano se l'ordine viene mantenuto anche negli altri conti, ossia se nella matrice Jacobiana la prima colonna è $D_v r$ e la seconda è $D_u r$, e se usiamo come 2-forma base per $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$ il prodotto esterno $dv \wedge du$. L'ordine con cui vengono considerate le variabili, è infatti anche l'ordine con cui vengono scelte le basi degli spazi tangenti e le basi duali, e le basi di campi di vettori e forme differenziali.

Come nel caso delle curve parametrizzate, l'integrale di una 2-forma su una superficie regolare dipende dall'orientazione della parametrizzazione.

Proposizione 4.4. *Siano (Σ, r) e $(\tilde{\Sigma}, \tilde{r})$ due superfici equivalenti, ossia $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ ed esiste una funzione φ di cambio di variabile, iniettiva, di classe C^1 e con determinante jacobiano non nullo, per cui $\tilde{r} = r \circ \varphi$. Allora per ogni $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$*

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \omega = sign\ (det\ D\varphi) \int_{\Sigma} \omega$$

Esempio 4.3. Calcoliamo l'integrale della 2-forma

$$\omega = x^2\, dx \wedge dy + yz\, dz \wedge dx + z\, dy \wedge dz$$

sulla sfera di raggio $R = 2$ di parametrizzazione

$$r(\vartheta, \varphi) = (2 \sin\vartheta\, \cos\varphi)\, \vec{i} + (2 \sin\vartheta\, \sin\varphi)\, \vec{j} + (2 \cos\vartheta)\, \vec{k}, \qquad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

La matrice Jacobiana e il vettore normale associati alla parametrizzazione sono

$$Dr(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\vartheta\, \cos\varphi & -2\sin\vartheta\, \sin\varphi \\ 2\cos\vartheta\, \sin\varphi & 2\sin\vartheta\, \cos\varphi \\ -2\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \qquad n(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\vartheta\, \cos\varphi \\ 4\sin^2\vartheta\, \sin\varphi \\ 4\sin\vartheta\, \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Mettendo insieme (4.8) e (4.9), otteniamo

$$\int_{\Sigma} \omega =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[x^2(\vartheta, \varphi)(4\sin\vartheta\, \cos\vartheta) + y(\vartheta, \varphi)z(\vartheta, \varphi)(4\sin^2\vartheta\, \sin\varphi) + z(\vartheta, \varphi)(4\sin^2\vartheta\, \cos\varphi)\right]\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[16\sin^3\vartheta\, \cos\vartheta + 8\sin^2\vartheta\, \cos\vartheta\, \cos\varphi\right]\, d\varphi\, d\vartheta = 0$$

$\diamondsuit$

Osserviamo che le formule per il calcolo della lunghezza di una curva e dell'area di una superficie sono conseguenze del calcolo degli integrali delle forme differenziali.

Proposizione 4.5. *(i) Sia data una curva semplice e regolare (γ, r) e la 1-forma $\mu_{(\gamma,r)} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ che sui punti $P = r(t)$ della curva assume la forma*

$$\mu_{(\gamma,r)} = \frac{x'(t)}{\|r'(t)\|}\, dx + \frac{y'(t)}{\|r'(t)\|}\, dy + \frac{z'(t)}{\|r'(t)\|}\, dz \quad \in\ T^*_{r(t)}\gamma$$

Allora lunghezza$\,(\gamma) = \int_\gamma \mu_{(\gamma,r)}$.

(ii) Sia data una superficie regolare (Σ, r) e la 2-forma $\nu_{(\Sigma,r)} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ che sui punti $P = r(u, v)$ della curva assume la forma

$$\nu_{(\Sigma,r)} = \frac{n_3(u, v)}{\|n(u, v)\|}\, dx \wedge dy + \frac{n_2(u, v)}{\|n(u, v)\|}\, dz \wedge dx + \frac{n_1(u, v)}{\|n(u, v)\|}\, dy \wedge dz \quad \in\ T^*_{r(u,v)}\Sigma$$

Allora area$\,(\Sigma) = \int_\Sigma \nu_{(\Sigma,r)}$.

4.2. **Integrale su insiemi regolari orientati.** Supponiamo invece di avere un insieme "regolare" $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione uno, ossia tale che in ogni punto $P \in \gamma$ esiste la retta tangente a γ. Ad esempio γ potrebbe essere una curva in $\mathbb{R}^2$ ottenuta localmente come grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 (confronta con il Teorema delle Funzioni Implicite).

In questo caso il concetto di integrale di una 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ è definito come in (4.5), una volta che abbiamo scritto una parametrizzazione regolare e semplice di γ. Quindi il segno dipende dall'orientazione che la parametrizzazione induce sulla curva (vedi Proposizione 4.2).

Tuttavia l'insieme γ di dimensione uno può avere una sua orientazione "naturale", come nel caso di una curva γ in $\mathbb{R}^2$ che è bordo di un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$. In questo caso si scrive $\gamma := \partial U$. Ad esempio se $U = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, l'insieme ∂U è una curva regolare che è orientata in modo naturale in senso antiorario. Indicheremo la scelta dell'orientazione naturale su una curva che è bordo di un aperto U con il simbolo $\partial^+ U$. L'integrale di una 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ su una curva regolare $\gamma = \partial^+ U$ si calcola allora come in (4.5), ma facendo attenzione a scegliere una parametrizzazione che induce su γ la stessa orientazione di quella naturale.

Esempio 4.4. Dato $U = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ sia $\gamma = \partial^+ U$, e calcoliamo

$$\int_{\partial^+ U} \omega \qquad \text{dove } \ \omega = y\,dx + xy\,dy$$

Consideriamo la parametrizzazione regolare e semplice $r(t) = (\cos\, t, \sin\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. L'orientazione della curva (γ, r) è data dal verso del vettore tangente $r'(t) = (-\sin\, t, \cos\, t)$. Essendo la curva regolare il verso del vettore tangente è uguale in ogni t, quindi basta studiarne il verso ad esempio per $t = 0$. Si trova $r'(0) = (0, 1)$, e quindi la curva (γ, r) è orientata in senso antiorario, che coincide con l'orientazione naturale di $\gamma = \partial^+ U$.

Otteniamo quindi

$$\int_{\partial^+ U} y\,dx + xy\,dy = \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) + (\cos t\, \sin t)(\cos t)]\; dt = -\pi$$

$\diamondsuit$

Esempio 4.5. Dato $U = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ sia $\gamma = \partial^+ U$, e calcoliamo

$$\int_{\partial^+ U} \omega \qquad \text{dove } \ \omega = y\,dx + xy\,dy$$

In questo caso il bordo $\partial^+ U$ è costituito da due componenti connesse, la curva $\gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 9\}$ orientata in senso antiorario e la curva $\gamma_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ orientata in senso orario. Le parametrizziamo con le funzioni $r_1(t) = (3\cos\, t, 3\sin\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $r_2(t) = (\cos\, t, \sin\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Troviamo che r_1 induce su γ_1 l'orientazione coincidente con quella naturale, mentre r_2 induce l'orientazione opposta a quella naturale, quindi otteniamo

$$\int_{\partial^+ U} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega =$$

$$\int_0^{2\pi} [(3\sin t)(-3\sin t) + (9\cos t\, \sin t)(3\cos t)]\; dt - \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) + (\cos t\, \sin t)(\cos t)]\; dt$$

$$= -9\pi + \pi = -8\pi$$

$\diamondsuit$

Analogamente accade nel caso di un insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione due per cui il piano tangente a Σ è definito in ogni punto $P \in \Sigma$. Ad esempio nel caso in cui Σ sia localmente il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 (si confronti con il Teorema delle Funzioni Implicite). L'integrale di una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ è definito come in (4.8), una volta che abbiamo scritto una parametrizzazione regolare di Σ. Quindi il segno dipende dall'orientazione che la parametrizzazione induce sulla superficie (vedi Proposizione 4.4).

Tuttavia l'insieme Σ di dimensione due può avere una sua orientazione "naturale", come nel caso di una superficie Σ in $\mathbb{R}^3$ che è bordo di un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$. In questo caso si scrive $\Sigma := \partial U$. Ad esempio se $U = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, l'insieme ∂U è la superficie regolare orientata in modo naturale con il vettore normale rivolto verso l'esterno dell'aperto U. Indicheremo la scelta dell'orientazione naturale su una superficie che è bordo di un aperto U con il simbolo $\partial^+ U$. L'integrale di una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ su una superficie regolare $\Sigma = \partial^+ U$ si calcola allora come in (4.8), ma facendo attenzione a scegliere una parametrizzazione che induce su Σ la stessa orientazione di quella naturale.

Esempio 4.6. Dato $U = \left\{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1\right\}$ sia $\Sigma = \partial^+ U$, e calcoliamo

$$\int_{\partial^+ U} \omega \qquad \text{dove} \;\; \omega = 4y\, dx \wedge dy - z\, dz \wedge dx + yz\, dy \wedge dz$$

Consideriamo la parametrizzazione regolare di $\Sigma = \partial U$ data da

$$r(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \, \cos\varphi \\ \cos\vartheta \, \sin\varphi \\ 2\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

con $K = \left\{(\vartheta, \varphi) \; : \; -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$. L'orientazione della superficie (Σ, r) è data dal verso del vettore normale

$$n(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -2\cos^2\vartheta \, \cos\varphi \\ -2\cos^2\vartheta \, \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \, \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Essendo la superficie regolare il verso del vettore normale è uguale in ogni (ϑ, φ), quindi basta studiarne il verso ad esempio per $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$. Si trova

$$n(0,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la superficie (Σ, r) ha il vettore normale rivolto verso l'interno di U, che è l'opposto dell'orientazione naturale di $\Sigma = \partial^+ U$.

Nell'integrale bisogna quindi cambiare il segno e usare (4.8)

$$\int_{\partial^+ U} \omega = -\int_\Sigma \omega =$$

$$= -\int_K \big[4(\cos\vartheta\,\sin\varphi)(-\sin\vartheta\,\cos\vartheta) - (2\sin\vartheta)(-2\cos^2\vartheta\,\sin\varphi) + (\cos\vartheta\,\sin\varphi)(2\sin\vartheta)(-2\cos^2\vartheta\,\cos\varphi)\big]\, d\vartheta \wedge d\varphi =$$

$$= \int\!\!\int_K \big[4\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,\sin\varphi - 4\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,\sin\varphi + 4\cos^3\vartheta\,\sin\vartheta\,\sin\varphi\,\cos\varphi\big]\, d\vartheta d\varphi =$$

$$= 4\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\,\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,\cos\varphi\, d\varphi\right) = 0$$

$\diamondsuit$

4.3. **Il teorema di Stokes.** Introduciamo ora un risultato molto generale che permette di semplificare il calcolo di alcuni integrali, e permette di dimostrare in maniera immediata i teoremi integrali del calcolo differenziale.

Teorema 4.6 (Stokes). *Sia U un sottoinsieme aperto dello spazio "fisico" $\mathbb{R}^k$ con bordo $\partial^+ U$ regolare. Allora per ogni $(k-1)$-forma differenziale $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ il cui dominio contenga U, vale*

$$\int_{\partial^+ U} \omega = \int_U d\omega$$

Osserviamo che nel caso $k = 1$, il Teorema di Stokes diventa

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx \qquad \forall\, f \in \Omega^0(\mathbb{R}) = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \forall\, a, b$$

Nel caso $k = 2$, invece la sua formulazione è la seguente: sia $\gamma = \partial^+ U$ una curva regolare orientata e chiusa, che si ottiene come bordo di un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, allora per ogni $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vale

$$\int_\gamma (f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy) = \int_U \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right) dx \wedge dy \tag{4.10}$$

Nel caso $k = 3$, la formulazione del Teorema di Stokes diventa: sia $\Sigma = \partial^+ U$ una superficie regolare che si ottiene come bordo di un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$, allora per ogni $f, g, h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vale

$$\int_\Sigma (f\, dx \wedge dy + g\, dz \wedge dx + h\, dy \wedge dz) = \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz \tag{4.11}$$

Esempio 4.7. Calcoliamo l'integrale della 2-forma

$$\omega = (\log(1 + x^2) + y)\, dx \wedge dy + (\arctan(z^3))\, dz \wedge dx + (x + z)\, dy \wedge dz$$

sulla sfera orientata di raggio $R = 2$. Poiché $\Sigma = \partial^+ U$ dove $U = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$ e il dominio di ω è tutto $\mathbb{R}^3$, possiamo applicare il Teorema di Stokes e otteniamo

$$\int_\Sigma \omega = \int_U d\omega$$

Calcolando il differenziale esterno della 2-forma ω si trova la 3-forma

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

Quindi

$$\int_\Sigma \omega = \int_U d\omega = \int_U dx \wedge dy \wedge dz = \int \int \int_U dx\, dy\, dz = \text{Volume di } U = \frac{32}{3}\, \pi$$

$\diamondsuit$

Studiamo adesso le sue conseguenze nel calcolo vettoriale.

Definizione 4.7 (Lavoro di un campo di vettori). Dati un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ e una curva regolare $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ contenuta nel dominio di A, con la 1-forma μ_γ definita nella Proposizione 4.5-(i), si definisce *lavoro del campo A lungo la curva γ* l'integrale

$$L(A, \gamma) := \int_\gamma (A \cdot \hat{\sigma})\, \mu_\gamma$$

dove $\hat{\sigma}$ rappresenta il versore tangente a γ.

La stessa definizione vale nel caso di un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$. Per calcolare il lavoro di un campo lungo una curva chiusa possiamo allora applicare il Teorema di Stokes e otteniamo

Corollario 4.8 (**Teorema del rotore**). *Il lavoro che un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ compie lungo una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ regolare e chiusa, ossia $\gamma = \partial^+ U$ per un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, e tale che U sia contenuto nel dominio di A, si calcola tramite*

$$L(A, \gamma) = L(A, \partial^+ U) = \int_U (rot\, A)\, dx \wedge dy$$

Proof. Dalla definizione di lavoro otteniamo

$$L(A, \partial^+ U) = \int_{\partial^+ U} (A \cdot \hat{\sigma})\, \mu_\gamma = \int_{\partial^+ U} \tau(A)$$

e applicando il Teorema di Stokes alla 1-forma $\tau(A)$ otteniamo

$$L(A, \partial^+ U) = \int_U d(\tau(A)) = \int_U (\star(d(\tau(A))))\, dx \wedge dy$$

e si usa la definizione di rotore data in (3.25). □

Definizione 4.9 (**Flusso di un campo di vettori**). Dati un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ e una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ contenuta nel dominio di A, con la 2-forma ν_Σ definita nella Proposizione 4.5-(ii), si definisce *flusso del campo A attraverso la superficie* Σ l'integrale

$$F(A, \Sigma) := \int_\Sigma (A \cdot \hat{n})\, \nu_\Sigma$$

dove $\hat{n}$ rappresenta il versore normale a Σ.

Per calcolare il flusso di un campo lungo una superficie chiusa possiamo allora applicare il Teorema di Stokes e otteniamo

Corollario 4.10 (**Teorema della divergenza**). *Il flusso che un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ compie attraverso una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ regolare e chiusa, ossia $\Sigma = \partial^+ U$ per un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$, e tale che U sia contenuto nel dominio di A, si calcola tramite*

$$F(A, \Sigma) = F(A, \partial^+ U) = \int_U (div\, A)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

Proof. Dalla definizione di flusso otteniamo

$$F(A, \partial^+ U) = \int_{\partial^+ U} (A \cdot \hat{n})\, \nu = \int_{\partial^+ U} \star(\tau(A))$$

e applicando il Teorema di Stokes alla 2-forma $\star(\tau(A))$ otteniamo

$$F(A, \partial^+ U) = \int_U d(\star(\tau(A))) = \int_U (\star(d(\star(\tau(A)))))\, dx \wedge dy \wedge dz$$

e si usa la definizione di divergenza data in (3.24). □

4.4. **Esercizi.**

Esercizio 24. Calcolare l'integrale di $\omega = z\, dx \wedge dy \wedge dz$ su $U = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1,\, z > 0\}$.

Esercizio 25. Calcolare l'integrale di $\omega = xy\, dx \wedge dy \wedge dz$ su $U = \left\{\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 < 1,\, z > 0\right\}$.

Esercizio 26. Calcolare l'integrale di $\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \wedge dy$ su $U = \{x^2 + y^2 < 2\}$.

Esercizio 27. Calcolare l'integrale di $\omega = dx + y\, dy$ lungo la curva di parametrizzazione $r(t) = (t - \sin t)\, \vec{i} + (1 - \cos t)\, \vec{j}$ per $t \in [0, 2\pi]$. [*Risultato* $= 2\pi$]

Esercizio 28. Calcolare l'integrale della 1-forma ω definita in (3.7) lungo la curva di parametrizzazione $r(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j}$ per $t \in [0, 2\pi]$. [*Risultato* $= -2\pi$]

Esercizio 29. Calcolare l'integrale di $\omega = x^2 y\, dx - xy^3\, dy$ lungo la curva di parametrizzazione $r(t) = t^3\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ per $t \in [0, 1]$. [*Risultato* $= \frac{1}{11}$]

Esercizio 30. Calcolare l'integrale di $\omega = \frac{z}{1+x}\, dx + \frac{x}{1+y}\, dy - x\, dz$ lungo la curva di parametrizzazione $r(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ per $t \in [0, 1]$. [*Risultato* $= -\frac{1}{6}$]

Esercizio 31. Calcolare l'integrale di $\omega = -z\, dz \wedge dx$ sulla sfera di raggio $R = 1$ parametrizzata come nell'esempio 4.3. [*Risultato* $= 0$]

Esercizio 32. Calcolare l'integrale di $\omega = x\, dy \wedge dz$ sulla superficie regolare (Σ, r) dove $r(u, v) = v^2\,\vec{i} + u\,\vec{j} + 2uv\,\vec{k}$ e $K = \{0 < u < 1,\ 0 < v < 1\}$. [*Risultato* $= \frac{1}{3}$]

Esercizio 33. Calcolare l'integrale di $\omega = (x^2 + y^2 + z)\, dx \wedge dy$ sulla superficie regolare di rotazione (Σ, r) ottenuta facendo ruotare il grafico della funzione $y = f(z) = z^4$ per $z \in [0, 1]$ intorno all'asse z. [*Risultato* $= \frac{25}{18}\,\pi$]

Esercizio 34. Calcolare l'integrale di $\omega = y\, dy \wedge dz$ sulla superficie regolare (Σ, r) dove $r(\vartheta, v) = (\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2})\,\vec{i} + (\frac{1}{2}\sin\vartheta)\,\vec{j} + v\,\vec{k}$ e $K = \left\{0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le v \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\vartheta\right\}$. [*Risultato* $= 0$]

Esercizio 35. Dimostrare la Proposizione 4.5.

Esercizio 36. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma = \left\{(x, y)\ :\ y \ge x \ge 0,\ x^2 + y^2 = (\arctan \frac{y}{x})^2\right\}$. [*Suggerimento: Usare le coordinate polari per trovare una parametrizzazione di* γ *e usare la Proposizione 4.5*] [*Risultato* $= \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{\pi^2 + 4} - \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 16}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2+4}}{\pi + \sqrt{\pi^2+16}}\right) + \frac{1}{2}\log 2$]

Esercizio 37. Parametrizzare e determinare la 1-forma μ_γ della Proposizione 4.5 per la curva $\gamma = \left\{y = x^2,\ 0 \le x \le 2\right\}$. Calcolare poi l'integrale $\int_\gamma x\,\mu_\gamma$. [*Risultato* $= \frac{1}{12}\,(17^{\frac{3}{2}} - 1)$]

Esercizio 38. Cosa succede se nell'esempio 4.4 uso la parametrizzazione $r(t) = (\sin t, \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$?

Esercizio 39. Calcolare l'integrale di $\omega = y\, dx + y^2\, dy$ su $\partial^+ U$ dove $U = \left\{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$. [*Risultato* $= -2\pi$]

Esercizio 40. Nell'esempio 4.6 trovare una parametrizzazione di $\Sigma = \partial^+ U$ che induca l'orientazione naturale sulla superficie e calcolare l'integrale della 2-forma data.

Esercizio 41. Calcolare l'area di $\Sigma = \left\{x^2 + y^2 - (z-4)^2 = 0,\ 4 \le z \le 5\right\}$. [*Suggerimento: Trovare una parametrizzazione di* Σ *e usare la Proposizione 4.5*] [*Risultato* $= \pi\sqrt{2}$]

Esercizio 42. Parametrizzare e determinare la 2-forma ν_Σ della Proposizione 4.5 per le superfici ottenute facendo ruotare il grafico $\{(y, z)\ :\ y = f(z)\}$ delle seguenti funzioni intorno all'asse z: (i) $f(z) = \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$ per $z \in [1, 2]$; (ii) $f(z) = \frac{z^2}{2}$ per $z \in [0, \frac{3}{4}]$; (iii) $f(z) = \sin z$ per $z \in [0, \pi]$. Calcolare l'area delle superfici ottenute.

Esercizio 43. Calcolare l'integrale di $\omega = -z\, dz \wedge dx$ sulla superficie orientata $\Sigma = \partial^+ U$ dove $U = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$. [*Risultato* $= 0$]

Esercizio 44. Calcolare l'integrale di $\omega = \left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{9}xy^2 + xz^2\right)\, dy \wedge dz$ su $\partial^+ U$ dove $U = \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1\right\}$. [*Risultato* $= \frac{24}{5}\,\pi$]

Esercizio 45. Calcolare l'integrale di $\omega = (\arctan x^2)\, dx \wedge dy + y\, dy \wedge dz$ su $\partial^+ U$ dove $U = \left\{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$. [*Risultato* $= 0$]

Esercizio 46. Calcolare l'integrale di $\omega = 2y\, dx + x\, dy$ lungo la curva chiusa orientata in maniera naturale che si ottiene unendo $\gamma_1 = \{y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi\}$ e $\gamma_2 = \{y = 0,\ 0 \leq x \leq \pi\}$. [*Risultato* $= -2$]

Esercizio 47. Usando il Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^2$ e l'identità $d(x\, dy) = dx \wedge dy$, dimostrare che l'area dell'insieme U delimitato dalle curve γ_1 e γ_2 dell'esercizio precedente è uguale alla somma $\int_{\gamma_1} x\, dy + \int_{\gamma_2} x\, dy$.

5. Forme chiuse ed esatte

Studiamo adesso le proprietà del differenziale esterno come applicazione tra spazi di forme differenziali. Ricordiamo che il differenziale esterno è un'applicazione

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, k = 0, \dots, n$$

e che $\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ se $k > n$. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ si forma allora la catena di spazi di forme

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \{0\}$$

e una domanda molto importante quando si formano queste catene di spazi è la relazione che c'è tra l'immagine di un'applicazione e il nucleo dell'applicazione successiva. Studiamo per questo motivo il nucleo e l'immagine del differenziale esterno. Iniziamo dal nucleo.

Definizione 5.1 (**Forma differenziale chiusa**)**.** Una k-forma differenziale $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ si dice *chiusa* se $d\omega = 0$.

Ad esempio sono chiuse tutte le 1-forme su $\mathbb{R}$, le 2-forme su $\mathbb{R}^2$ e le 3-forme su $\mathbb{R}^3$. Allo stesso modo si verifica facilmente che sono chiuse tutte le forme differenziali del tipo

$$\omega = f(x)\, dx + g(y)\, dy + h(z)\, dz$$
$$\omega = f(x,y)\, dx \wedge dy + g(x,z)\, dz \wedge dx + h(y,z)\, dy \wedge dz$$

Esempio 5.1. Un esempio interessante di 1-forma differenziale chiusa è

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \tag{5.1}$$

Si verifica infatti che

$$d\omega = \left[-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \right] dx \wedge dy = 0$$

♢

Corollario 5.2. *Se ω è in $\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ed è chiusa, allora per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ contenuto nel dominio di ω e con bordo $\partial^+ U$ regolare, si ha*

$$\int_{\partial^+ U} \omega = 0$$

Definizione 5.3 (**Campo di vettori irrotazionale**)**.** Un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ si dice *irrotazionale* se la 1-forma $\tau(A)$ è chiusa (quindi se $\mathrm{rot}(A) = 0$).

Il Teorema del rotore (Corollario 4.8) per campi irrotazionali diventa

Corollario 5.4. *Il lavoro di un campo di vettori in $\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ irrotazionale lungo una curva regolare e chiusa, e tale che la sua parte interna sia contenuta nel dominio del campo, è nullo.*

Esempio 5.2. Consideriamo il campo di vettori

$$A = \frac{y}{x^2+y^2}\,X - \frac{x}{x^2+y^2}\,Y \tag{5.2}$$

La 1-forma $\tau(A)$ è la forma differenziale 5.1, quindi è chiusa, e il campo A è irrotazionale. Il dominio di A è l'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, quindi per applicare il corollario precedente dobbiamo stare attenti a controllare che l'aperto U scelto sia contenuto nel dominio di A.

Consideriamo la curva $\gamma = \partial^+ U$, dove $U = \left\{x^2+y^2 \le 1\right\}$, allora

$$L(A,\gamma) = \int_\gamma \tau(A) = \int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = -2\pi$$

Questo risultato non è in contraddizione con il corollario poiché $U = \left\{x^2+y^2 \le 1\right\}$ non è contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\diamondsuit$

Definizione 5.5 (Campo di vettori a divergenza nulla). Un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ si dice *a divergenza nulla* se la 2-forma $\star(\tau(A))$ è chiusa (quindi se $\mathrm{div}(A) = 0$).

Il Teorema della divergenza (Corollario 4.10) per campi a divergenza nulla diventa

Corollario 5.6. *Il flusso di un campo di vettori in $\mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ a divergenza nulla attraverso una superficie regolare e chiusa, e tale che la sua parte interna sia contenuta nel dominio del campo, è nullo.*

Studiamo ora l'immagine del differenziale esterno.

Definizione 5.7 (Forma differenziale esatta). Una k-forma differenziale $\nu \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ si dice *esatta* se esiste una $(k-1)$-forma $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tale che: (i) il dominio di ω contenga o sia uguale al dominio di ν; (ii) $\nu = d\omega$. Una tale forma ω si dice essere una *primitiva* di ν. L'insieme di tutte le primitive di ν si scrive come $\left\{\omega + \mu \ : \ \mu \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n),\ d\mu = 0\right\}$.

Nel caso $n = 1$, la definizione di primitiva si riduce a quella classica del calcolo integrale. Sia infatti $\nu \in \Omega^1(\mathbb{R})$ esatta, allora l'insieme delle sue primitive si determina trovando una 0-forma f tale che $df = \nu$ e che abbia lo stesso dominio di ν e sommando a f tutte le 0-forme g chiuse. Nel caso in cui il dominio di ν è connesso le funzioni g chiuse sono le costanti, quindi si ritrova il risultato che tutte le primitive di ν sono uguali a f a meno di una costante additiva.

Tuttavia in generale, al contrario della proprietà di essere chiusa, stabilire se una forma differenziale è esatta è un problema non semplice. Iniziamo con alcuni esempi.

Esempio 5.3. Un esempio di 1-forma differenziale esatta è

$$\nu = \frac{2}{y}\,dx - \frac{2x+z}{y^2}\,dy + \frac{1}{y}\,dz$$

Si verifica infatti che scelta la funzione (o 0-forma)

$$f(x,y,z) = \frac{2x+z}{y}$$

si ha: (i) *dominio* $(f) = \{y \neq 0\} =$ *dominio* (ν); (ii) $df = \nu$.

$\diamondsuit$

Esempio 5.4. Esempi interessanti di forme differenziali esatte sono la 2-forma

$$\nu = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2) \qquad \nu = d(x\,dy) = d(-y\,dx)$$

e la 3-forma

$$\nu = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3) \qquad \nu = d(x\,dy \wedge dz) = d(y\,dz \wedge dx) = d(z\,dx \wedge dy)$$

L'esattezza di queste forme è interessante per il calcolo delle aree e dei volumi. Sia infatti U un aperto di $\mathbb{R}^2$ con bordo regolare, allora per definizione abbiamo

$$\text{Area}(U) \ = \int\int_U dx\,dy = \int_U dx \wedge dy = \int_U d(x\,dy) = \int_{\partial^+ U} x\,dy$$

dove abbiamo applicato il Teorema di Stokes.

Analogamente per un aperto U di $\mathbb{R}^3$ con bordo regolare, per definizione abbiamo

$$\text{Volume}(U) \ = \int\int\int_U dx\,dy\,dz = \int_U dx \wedge dy \wedge dz = \int_U d(x\,dy \wedge dz) = \int_{\partial^+ U} x\,dy \wedge dz$$

Formule analoghe valgono usando le altre primitive della forma di area o di volume data.

$\diamondsuit$

Studiamo la proprietà di esattezza. La prima semplice osservazione è che poiché $d \circ d = 0$ (vedi Proposizione 3.9), si ha

(I) $$\omega \text{ ESATTA} \implies \omega \text{ CHIUSA}$$

Quindi troviamo una condizione sufficiente per la non esattezza, ossia

$$\omega \text{ NON CHIUSA} \implies \omega \text{ NON ESATTA}$$

Purtroppo l'implicazione inversa di (I) non vale in generale, ma diventa vera sotto un'ipotesi aggiuntiva per il dominio di ω.

Definizione 5.8 (Insieme semplicemente connesso). Un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, si dice *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa contenuta in V si può "deformare con continuità" facendola diventare un punto.

Esempi di insiemi semplicemente connessi sono la parte interna delle sfere e degli ellissoidi, mentre insiemi non semplicemente connessi sono per esempio le corone circolari e sferiche. Non è semplicemente connesso il piano $\mathbb{R}^2$ meno un punto, mentre è semplicemente connesso lo spazio $\mathbb{R}^3$ meno un punto. Per rendere non semplicemente connesso lo spazio $\mathbb{R}^3$ bisogna togliere una retta.

Teorema 5.9 (Lemma di Poincaré). *Se ω è una forma differenziale chiusa con dominio semplicemente connesso allora ω è esatta.*

Troviamo quindi la condizione

(II) $$\omega \text{ CHIUSA e con DOMINIO SEMPL. CONNESSO} \implies \omega \text{ ESATTA}$$

Nello studio dell'esattezza di una 1-forma differenziale valgono inoltre le seguenti condizioni equivalenti.

Teorema 5.10 (Condizioni equivalenti). *(i) Una 1-forma differenziale ω è esatta se e solo se il suo integrale lungo una qualsiasi curva regolare contenuta nel suo dominio dipende solo dagli estremi della curva.*

(ii) Una 1-forma differenziale ω è esatta se e solo se il suo integrale lungo una qualsiasi curva regolare chiusa contenuta nel suo dominio è nullo.

Nella pratica è impossibile verificare che gli integrali di una 1-forma lungo tutte le possibili curve chiuse siano nulli, ma il teorema si può usare come condizione sufficiente per la non esattezza.

(III) $$\text{Se } \exists\, \gamma \text{ chiusa t.c. } \int_\gamma \omega \neq 0 \implies \omega \text{ NON ESATTA}$$

Per ottenere esattezza usando gli integrali lungo curve chiuse, enunciamo il seguente criterio: supponiamo che il dominio di ω non sia semplicemente connesso, ma abbia N "buchi", chiamiamo

$\{\gamma_i\}$ per $i = 1, \ldots, N$ circonferenze di centro i "buchi" e tali che ciascuna contenga esattamente un solo "buco", allora

$$\text{(IV)} \qquad \text{Se } \int_{\gamma_i} \omega = 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, N \implies \omega \text{ ESATTA}$$

Studiamo adesso la nozione di esattezza per i campi di vettori.

Definizione 5.11 (**Campo di vettori conservativo**)**.** Un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ si dice *conservativo* se la 1-forma $\tau(A)$ è esatta (quindi se esiste una funzione f definita su un dominio che contiene il dominio di A e tale che $A = \nabla f$).

Osserviamo che un campo di vettori conservativo è anche irrotazionale. Trascrivendo le condizioni equivalenti del Teorema 5.10 nel caso di un campo di vettori otteniamo

Corollario 5.12. *(i) Un campo di vettori A è conservativo se e solo se il suo lavoro lungo una qualsiasi curva regolare contenuta nel suo dominio dipende solo dagli estremi della curva.*

(ii) Un campo di vettori A è conservativo se e solo se il suo lavoro lungo una qualsiasi curva regolare chiusa contenuta nel suo dominio è nullo.

Esempio 5.5. Consideriamo il campo di vettori

$$A = \frac{2}{y} X - \frac{2x + z}{y^2} Y + \frac{1}{y} Z \tag{5.3}$$

Il dominio di A è l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0\}$ e la 1-forma $\tau(A)$ è la forma differenziale dell'esempio 5.3, che abbiamo visto essere esatta, quindi il campo A è conservativo. In particolare si trova che

$$A = \nabla f \qquad f(x, y, z) = \frac{2x + z}{y}$$

Consideriamo la curva (γ, r) di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{pmatrix} \log(1 + t^2) \\ 1 + \sin^2(2\pi t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 1]$$

Applicando il Corollario 5.12-(i) troviamo

$$L(A, \gamma) = \int_\gamma \tau(A) = f(r(1)) - f(r(0)) = f(\log 2, 1, 1) - f(0, 1, 0) = 2 \log 2 + 1$$

$\diamondsuit$

Definizione 5.13 (**Campo di vettori di tipo rotore**)**.** Un campo di vettori $A \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ si dice *di tipo rotore* se la 2-forma $\star(\tau(A))$ è esatta (quindi se esiste un campo $B \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ il cui dominio contiene quello di A e per cui $A = \operatorname{rot}(B)$).

Osserviamo che in particolare un campo di tipo rotore è a divergenza nulla.

5.1. **Ricerca delle primitive.** Per trovare una primitiva di una forma differenziale esatta, bisogna avere un po' di "intuito". Nel caso di 2-forme e 3-forme quello che si può consigliare è di provare a integrare rispetto a una delle variabili che appare nel prodotto esterno e verificare se la forma ottenuta è una primitiva.

Esempio 5.6. Cerchiamo una primitiva della 2-forma esatta $\nu = (x + 2y)\, dx \wedge dy$. Se integriamo il termine $(x + 2y)$ rispetto alla variabile x (che compare nel prodotto esterno $dx \wedge dy$), otteniamo la funzione $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy$. Verifichiamo che la 1-forma

$$\omega = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right)\, dy$$

è una primitiva di ν.

Avremmo potuto integrare il termine $(x+2y)$ rispetto alla variabile y (che compare nel prodotto esterno $dx \wedge dy$), ottenendo la funzione $F(x, y) = xy + y^2$. Anche la 1-forma

$$\omega = -\left(xy + y^2\right)\, dx$$

è una primitiva di ν.

Non avrebbe avuto senso provare a integrare rispetto alla variabile z, semplicemente perché z non compare nel termine $dx \wedge dy$, quindi non avremmo potuto ottenere una primitiva di ν.

$\diamondsuit$

Nel caso delle 1-forme invece possiamo aiutarci con il calcolo di un integrale. Sia ν una 1-forma esatta con dominio connesso, dato un punto fissato $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (ad esempio si può scegliere $P_0 = (0, 0, 0)$ se appartiene al dominio di ν), una primitiva $f(x_1, y_1, z_1)$ si ottiene calcolando l'integrale

$$f(x_1, y_1, z_1) = \int_\gamma \omega$$

per una qualsiasi curva regolare (a tratti) che abbia come punto di partenza il punto P_0 e come punto di arrivo il "generico" punto di coordinate $P = (x_1, y_1, z_1)$.

Esempio 5.7. Un esempio di curva regolare a tratti che unisce $P_0 = (0, 0, 0)$ al "generico" punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ si ottiene considerando la concatenazione della tre curve

$$\begin{array}{lll} (\gamma_1, r_1) & r_1(t) = (tx_1)\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} & t \in [0, 1] \\ (\gamma_2, r_2) & r_2(t) = (x_1)\,\vec{i} + (ty_1)\,\vec{j} + 0\,\vec{k} & t \in [0, 1] \\ (\gamma_3, r_3) & r_3(t) = (x_1)\,\vec{i} + (y_1)\,\vec{j} + (tz_1)\,\vec{k} & t \in [0, 1] \end{array}$$

$\diamondsuit$

5.2. **Esercizi.**

Esercizio 48. Determinare se le seguenti forme differenziali sono chiuse e se sono esatte, e trovare tutte le primitive di quelle esatte (usare se possibile la curva definita nell'esempio 5.7):

$$\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\omega = \tfrac{y}{x^2+y^2}\, dx - \tfrac{x}{x^2+y^2}\, dy + z\, dz$$

$$\omega = \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dx + \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dy \qquad \textit{Sugg: usare il metodo (IV) per l'esattezza.}$$

$$\omega = xyz\, dy \wedge dz$$

$$\omega = (1 + ye^{xy})\, dx + (xe^{xy} + \cos y)\, dy$$

$$\omega = (2 \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y)\, dx + (\sin x\, \cos y + 2 \cos x\, \sin y)\, dy$$

$$\omega = \tfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\, dx + \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}\, dy$$

$$\omega = \left(1 - \tfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\, dx + \left(1 - \tfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\, dy$$

Esercizio 49. Trovare la primitiva dell'ultima forma dell'esercizio precedente che nel punto $P = (1, 1, 1)$ vale 1. [*Risultato* : $f(x, y, z) = x + y + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{3}{2}$]

Esercizio 50. Usare il Teorema di Stokes per calcolare l'integrale della 2-forma $\nu = xy\, dx \wedge dy$ sull'insieme $U = \left\{x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$. [*Risultato* $= \frac{1}{8}$]

Esercizio 51. Calcolare l'integrale della 2-forma $\nu = (x + 2y)\, dx \wedge dy$ sull'insieme delimitato dall'asse x e dalla curva (γ, r) con $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. [*Risultato* $= 5\pi + 3\pi^2$]

Esercizio 52. Usare il Teorema di Stokes per calcolare l'area della corona circolare $\left\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Esercizio 53. Calcolare l'integrale della 2-forma $\nu = y\, dx \wedge dy$ sull'insieme $U = \left\{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$. [*Risultato* $= 0$]

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Bruno Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italy
E-mail address: `claudio.bonanno@unipi.it`