

Analisi Matematica III
Corso di Ingegneria Civile
Prima prova in itinere del 08-04-2008

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli (anche quelli della brutta).
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (10 punti) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right); \quad x \geq 0$$

- i) calcolare l'insieme di convergenza puntuale e il limite puntuale $f(x)$;
- ii) dire su quali intervalli si ha convergenza totale per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n(x)$$

Esercizio 2. (12 punti) Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}} x^{2n}$$

- i) determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha convergenza assoluta;
- ii) calcolare la funzione somma $S(x)$;
- iii) usare i punti precedenti per giustificare l'identità

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(Sugg: integrare l'uguaglianza $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}} x^{2n}$ tra 0 e...)

Esercizio 3. (12 punti) Data la funzione

$$F(x, y) = x^2 - y^3$$

- i) dire se è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite in qualcuno dei punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$;
- ii) trovare l'equazione cartesiana della retta tangente all'insieme $\{F(x, y) = 0\}$ nel punto $P = (1, 1)$.
- iii) parametrizzare come curva semplice e regolare e calcolare la lunghezza dell'insieme

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$