Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 30-06-2020

Esercizio 1 (2 punti). Data la funzione

$$f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$$

quale affermazione è falsa?

- $(0,0)$ è un punto di minimo locale;
- $(0,0)$ è un punto di sella;
- $(0,0)$ non è un punto critico;
- la funzione f è continua in $(0,0)$;
- $f(0,0) = 0$.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,,\; y \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Dati il campo di vettori $\mathbf{F}$ e la curva (γ, I)

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+2x \\ 3y^2+2y\,e^{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \Big(t\cos(2\pi t)\,,\, t\sin(2\pi t) \Big)\,.$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I).

Esercizio 4 (1 punto). Calcolare l'area di

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\,,\; x \geq y \right\}\,.$$

Esercizio 5 (1 punto). Data la superficie Σ

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+x+y^3+z = 0 \right\}$$

quale punto appartiene al piano tangente a Σ nel punto $P = (0,0,0)$?

- $(1, 1, 1)$
- $(0, 0, 1)$
- $(1, -1, 1)$
- $(1, 0, 0)$
- nessuno degli altri.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x, y)$ ha dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$ e si può scrivere come composizione delle funzioni $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $h(t) = \sin t$. Quindi per i teoremi di carattere generale è continua su $\mathbb{R}^2$ e $f(0, 0) = 0$, e inoltre f è differenziabile certamente su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$, verifichiamo innanzitutto l'esistenza delle derivate parziali. Si ha che il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin |t|}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}$$

non esiste. Quindi f non è differenziabile in $(0, 0)$, e di conseguenza $(0, 0)$ non può essere un punto critico.

Mostriamo che $(0, 0)$ è comunque un punto di minimo locale. Scegliendo ad esempio

$$B_{\frac{\pi}{4}}(0, 0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < \frac{\pi^2}{16}\right\}$$

si ha infatti, usando il fatto che la funzione $h(t) = \sin t$ è crescente per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \geq \sin(0) = f(0, 0)\,, \quad \forall\, (x, y) \in B_{\frac{\pi}{4}}(0, 0).$$

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$.

La funzione f è un polinomio con dominio naturale $X = \mathbb{R}^2$, e quindi è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, e per calcolare le derivate parziali possiamo applicare le usuali regole di derivazione in ogni punto. Per cercare punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ cerchiamo dunque le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

che sono interne a $\bar{\Omega}$. Il sistema ammette come unica soluzione $C = (0, 0)$ che è interno a $\bar{\Omega}$, e quindi è il primo punto da considerare.

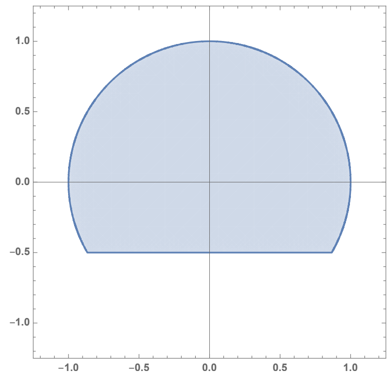

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Come spigoli indichiamo i punti

$$S_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad S_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, -\frac{1}{2} \right)$$

poiché dividiamo il bordo in due parti

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + y^2 = 1 \,,\, y \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y = -\frac{1}{2} \,,\, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (\cos t \,,\, \sin t) \,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{6} \,,\, \frac{7}{6}\pi \right] \,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1 + \cos^2 t \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{6} \,,\, \frac{7}{6}\pi \right] \,.$$

Si trova $g_1'(t) = -2 \sin t \cos t$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nei punti $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, e identifica quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1(0) = (1 \,,\, 0) \,, \qquad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0 \,,\, 1) \quad \text{e} \quad Q_3 = \gamma(\pi) = (-1 \,,\, 0)$$

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t \,,\, -\frac{1}{2} \right) \,, \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 2t^2 + \frac{1}{4}, \qquad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \,.$$

Si trova $g_2'(t) = 2t$, che nell'intervallo in considerazione si annulla nel punto 0, e identifica quindi il punto critico vincolato

$$Q_4 = \gamma_2(0) = \left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right).$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \frac{7}{4}\,,$$

$$f(Q_1) = f(Q_3) = 2\,, \quad f(Q_2) = 1\,, \quad f(Q_4) = \frac{1}{4}$$

Quindi il massimo di f è 2 e il minimo è 0.

Esercizio 3. Il campo di vettori $\mathbf{F}$ è definito su $X = \mathbb{R}^2$ e verifica

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0 - 0 = 0\,.$$

Quindi, applicando il Lemma di Poincaré, concludiamo che $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Un calcolo agevole mostra che un suo potenziale è la funzione

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + y^3 + e^{y^2}\,.$$

La curva (γ, I) non è chiusa, essendo $\gamma(1) = (1,0)$ diverso da $\gamma(2) = (2,0)$. Quindi per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I), possiamo applicare la formula per i campi conservativi, ossia

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(\gamma(2)) - f(\gamma(1)) = f(2,0) - f(1,0) = 12 - 2 = 10\,,$$

oppure consideriamo una curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ che abbia lo stesso punto iniziale e finale di (γ, I). Se poniamo

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{\gamma}(t) = (t+1\,,\,0)$$

si ha $\tilde{\gamma}(0) = (1,0) = \gamma(1)$ e $\tilde{\gamma}(1) = (2,0) = \gamma(2)$, e quindi, per le proprietà dei campi conservativi,

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \; < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t))\,,\,\tilde{\gamma}'(t) > \,dt = \int_0^1 \; < \begin{pmatrix} 3(1+t)^2 + 2(1+t) \\ 0 \end{pmatrix} \,,\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \,dt =$$

$$= \int_0^1 \Big(3\,(1+t)^2 + 2\,(1+t)\Big)\,dt = \Big((1+t)^3 + (1+t)^2\Big)\Big|_0^1 = 10\,.$$

Esercizio 4. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

Si tratta dell'ottava parte di un cerchio di raggio 4, quindi la sua area è $\frac{1}{8}\,\pi 4^2 = 2\pi$. Tramite un integrale doppio, il calcolo si può fare usando le coordinate polari, e osservando che Ω corrisponde all'insieme

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, 0 \le \rho \le 4\,,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

e quindi

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1\,dxdy = \iint_S \rho\,d\rho d\theta =$$

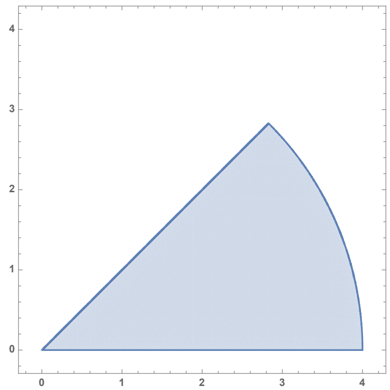

Figure 2: L'insieme Ω.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^4 \rho \, d\rho \right) d\theta == \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 \, d\theta = 2\pi \, .$$

Esercizio 5. La superficie Σ si può interpretare come insieme di livello della funzione $F(x, y, z) = x^2 + x + y^3 + z$, che è di classe C^1 su tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$. Quindi calcoliamo

$$\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 3y^3 \\ 1 \end{pmatrix} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

e ne segue che l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in $P = (0,0,0)$ è data da

$$x + z = 0 \, .$$

Si ottiene che nessuno dei punti indicati appartiene a questo piano tangente.