Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 27-07-2016

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}\right)$$

i) dimostrare che è differenziabile su tutto il suo dominio naturale;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}\,.$$

Esercizio 2. (12 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1\,,\,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t + \sin(e^t - 1)\,,\, \log(e - t^2)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (0\,,\,1)$;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) per il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \\ 1 + \frac{2x^2-2y}{(y+1)(x^2+y^2)} \end{pmatrix}\,.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^6\,,\, -1 \leq z \leq 1\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) calcolare l'area di Σ.

Svolgimento

Esercizio 1 *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}\right)$$

i) dimostrare che è differenziabile su tutto il suo dominio naturale;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(t) = \log(1+t)$ e $h(x,y) = (x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}$. La funzione g è differenziabile su tutto il suo dominio $\{t > -1\}$, e h è differenziabile certamente su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dunque f è differenziabile certamente sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e rimane da studiare come si comporta in $(0,0)$.

Iniziamo dimostrando l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$. Usando $\log(1+\tau) \sim \tau$ per $\tau \to 0$, si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + t^{\frac{4}{3}})}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + 4^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{4}{3}})}{t} = 0$$

Dobbiamo poi dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene ancora per l'andamento asintotico della funzione logaritmo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1 + (x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che l'ultimo limite è uguale a 0, usiamo il criterio del confronto e scriviamo

$$0 \le \left|\frac{(x^2 + 4\,y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 4^{\frac{2}{3}}\, \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{2}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$$

e osserviamo che la funzione $G(x,y) = 4^{\frac{2}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$ è continua nell'origine essendo composizione di funzioni continue.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

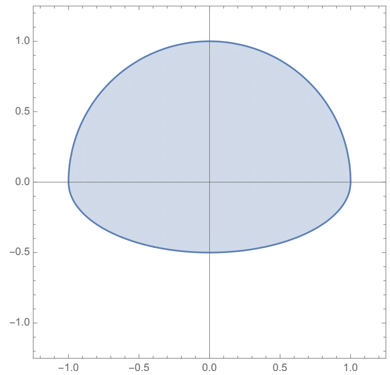

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f abbiamo dimostrato essere differenziabile su $\mathbb{R}^2$, dunque non ci sono punti di non differenziabilità. Studiamo l'esistenza di punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$. Abbiamo visto che le derivate parziali di f si annullano in $(0,0) \in \Omega$, dunque il primo punto critico libero da tenere in considerazione è

$$C = (0,0)\,.$$

Per cercare altri punti critici liberi dobbiamo cercare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\frac{x}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 0 \\ \frac{16}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

È immediato verificare che il sistema non ha soluzioni, e dunque non ci sono punti critici liberi in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\,,\; y \geq 0\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{x^2 + 4y^2 = 1\,,\; y \leq 0\right\}\,.$$

Per Γ_1 utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $G_1(x,y) = x^2 + y^2$.

Ogni punto di Γ_1 è regolare, per cui cerchiamo soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\frac{x}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 2\lambda x \\ \frac{16}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \\ y>0 \end{cases}$$

che studiando la prima equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{16}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \\ y>0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x\neq 0 \\ \frac{2}{3}\frac{1}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = \lambda \\ \frac{16}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \\ y>0 \end{cases}$$

Il primo sottosistema ha come unica soluzione $(x, y, \lambda) = (0, 1, 2^{\frac{8}{3}}3^{-1}(1+2^{\frac{4}{3}})^{-1})$, e quindi troviamo il punto critico vincolato

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Per il secondo sottosistema, sostituiamo il valore di λ dalla seconda equazione nella terza e troviamo

$$\frac{16}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3}\frac{y}{[1+(x^2+4\,y^2)^{\frac{2}{3}}]\,(x^2+4\,y^2)^{\frac{1}{3}}}$$

che ha come unica soluzione $y = 0$, che non è ammissibile. Dunque non ci sono altre soluzioni del sistema, e dunque troviamo un solo punto critico vincolato, Q.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(\cos t\,,\ \frac{1}{2}\sin t\right), \qquad t \in [\pi\,,\ 2\pi]\ .$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log 2\,, \qquad t \in [\pi\,,\ 2\pi]\ ,$$

essendo g_2 costante, tutti i punti sono critici. Basta considerare il valore assunto sugli spigoli.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \log 2\,, \quad f(Q) = \log(1+4^{\frac{2}{3}})\,.$$

Dunque il massimo di f è $\log(1+4^{\frac{2}{3}})$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva* (γ, I)*, con* $I = [-1\,,\,1]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t + \sin(e^t - 1)\,,\, \log(e - t^2)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (0\,,\,1)$*;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-1\,,\,1)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (0\,,\,1)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-1\,,\,1)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 + \sin(e^{t_0} - 1) = 0 \\ \log(e - t_0^2) = 1 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $t_0 = 0$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 + e^{t_0}\ \cos(e^{t_0} - 1) \\ -\frac{2t_0}{e - t_0^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$y = 1\,.$$

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo* (γ, I) *per il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ 1 + \frac{2x^2 - 2y}{(y+1)(x^2+y^2)} \end{pmatrix}\,.$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus (\{(0,0)\} \cup \{y = -1\})$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) =$$

$$= \frac{4x(y+1)(x^2+y^2) - 2x(y+1)(2x^2 - 2y)}{(y+1)^2\,(x^2+y^2)^2} - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). I punti iniziale e finale sono

$$P = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} -1 + \sin(e^{-1} - 1) \\ \log(e - 1) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(e - 1) \\ \log(e - 1) \end{pmatrix}$$

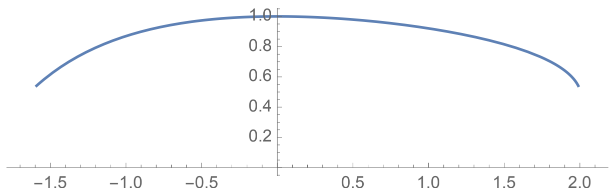

Figure 2: Il sostegno di (γ, I).

dunque la curva non è chiusa. Disegniamo in figura 2 il suo sostegno, che è interamente contenuto nel semipiano $\Omega = \{y > 0\}$. Possiamo dunque considerare $\mathbf{F}$ ristretto a Ω. Essendo $\mathbf{F}$ irrotazionale e Ω semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω. Possiamo quindi cercare un potenziale per $\mathbf{F}$ su Ω, o calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un'altra curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ che abbia punti iniziale e finale in P e Q, e abbia sostegno contenuto in Ω.

Nel primo caso, dobbiamo cercare una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile con derivate parziali continue tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \frac{2x^2-2y}{(y+1)(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova

$$f(x,y) = x - \log(x^2+y^2) + g(y)$$

che sostituita nella seconda porta a

$$-\frac{2y}{x^2+y^2} + g'(y) = 1 + \frac{2x^2-2y}{(y+1)(x^2+y^2)} \quad \Leftrightarrow \quad g'(y) = 1 + \frac{2}{y+1}$$

da cui

$$g(y) = y + 2\log(y+1)\,.$$

Un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω è dunque dato dalla funzione

$$f(x,y) = x + y + 2\log(y+1) - \log(x^2+y^2)\,.$$

Per il calcolo del lavoro possiamo quindi scrivere

$$L(\mathbf{F},\gamma) = f(Q) - f(P) = 2 + \sin(e-1) - \sin(e^{-1}-1) + \log\frac{(\log(e-1))^2 + (-1+\sin(e^{-1}-1))^2}{(\log(e-1))^2 + (1+\sin(e-1))^2}$$

Nel secondo caso, possiamo invece considerare la curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ con

$$\tilde{\gamma}(t) = (t\,,\, \log(e-1)) \quad \text{con} \quad t \in \left[-1+\sin(e^{-1}-1)\,,\, 1+\sin(e-1)\right]\,,$$

e calcolare

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_{-1+\sin(e^{-1}-1)}^{1+\sin(e-1)} \left(1 - \frac{2t}{t^2+(\log(e-1))^2}\right) dt =$$

$$= \Big(t - \log(t^2+(\log(e-1))^2)\Big)_{-1+\sin(e^{-1}-1)}^{1+\sin(e-1)} = 2+\sin(e-1)-\sin(e^{-1}-1)+\log\frac{(\log(e-1))^2+(-1+\sin(e^{-1}-1))^2}{(\log(e-1))^2+(1+\sin(e-1))^2}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^6 \,,\ -1 \le z \le 1 \right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

La superficie Σ è di rotazione intorno all'asse z, generata dal grafico della funzione $g(z) = \sqrt{z^6} = |z|^3$ con $z \in [-1, 1]$. Si ottiene quindi la superficie in figura 3.

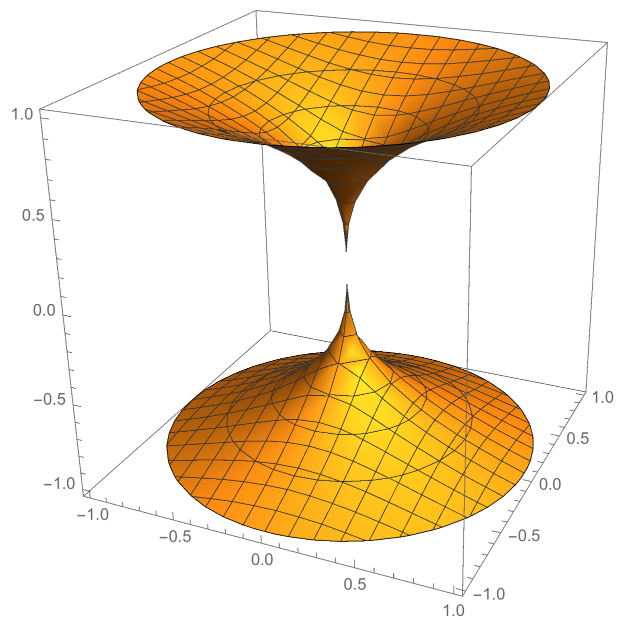

Figure 3: La superficie Σ.

ii) calcolare l'area di Σ.

Dobbiamo innanzitutto scrivere una parametrizzazione di Σ. Essendo una superficie di rotazione, possiamo usare la parametrizzazione

$$\sigma(t,\theta) = \Big(g(t)\cos\theta \,,\, g(t)\sin\theta \,,\, t \Big) \quad \text{con} \quad t \in [-1\,,\,1]\,, \quad \theta \in [0\,,\,2\pi]\,.$$

Il vettore normale $n(t,\theta)$ ottenuto dalla parametrizzazione è dato da

$$n(t,\theta) = \begin{pmatrix} -g(t)\cos\theta \\ -g(t)\sin\theta \\ g(t)\,g'(t) \end{pmatrix} \quad \text{che verifica} \quad \|n(t,\theta)\| = g(t)\,\sqrt{1 + (g'(t))^2}\,.$$

Scriviamo quindi

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\,dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{1} \|n(t,\theta)\|\,dt \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{1} g(t)\,\sqrt{1 + (g'(t))^2}\,dt \right) d\theta$$

e sostituendo $g(t) = |t|^3$ otteniamo per simmetria rispetto al piano $\{z = 0\}$

$$\text{Area}(\Sigma) = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt \right) d\theta = \frac{2}{27}\,\pi\, \left((1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}} \right)_0^1 = \frac{2}{27}\,\pi\,(10^{\frac{3}{2}} - 1)\,.$$