Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 24-02-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^3 - 4y^3 + 4$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Dire poi se la funzione ammette massimo assoluto o minimo assoluto;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^4 + y^4 \leq 1\big\}$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0\,,\,2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0\,,\,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin t\,,\, \frac{1}{2}\cos t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1,0)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -xy^2 + \sin(\log(1+x^2)) \\ e^y + x^2 y + x \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 = z^3 - 2z^2 - z + 2\,,\; 1 < z \leq 3\big\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

ii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{x(3z^2 - 4z - 1)}{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

dove

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 \leq z^3 - 2z^2 - z + 2\,,\; 1 < z \leq 3\,,\; x \geq \frac{1}{2}\sqrt{z^3 - 2z^2 - z + 2}\right\}.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^3 - 4y^3 + 4$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Dire poi se la funzione ammette massimo assoluto o minimo assoluto;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque differenziabile infinite volte. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 0 \\ 4y^3 - 12y^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2(x-3) = 0 \\ 4y^2(y-3) = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni hanno ciascuna due soluzioni, e otteniamo dunque i quattro punti critici

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 24x & 0 \\ 0 & 12y^2 - 24y \end{pmatrix},$$

e sostituiamo i punti. Troviamo

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(0,0) = 0$, e quindi la matrice Hessiana non è sufficiente per caratterizzare il punto;

$$Hf(3,0) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(3,0) = 0$, e quindi la matrice Hessiana non è sufficiente per caratterizzare il punto;

$$Hf(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(0,3) = 0$, e quindi la matrice Hessiana non è sufficiente per caratterizzare il punto;

$$Hf(3,3) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(3,3) = 36^2 > 0$ e traccia $Hf(3,3) = 72 > 0$, e quindi C_4 è un punto di minimo locale.

I punti di massimo assoluto e minimo assoluto vanno ricercati tra eventuali punti di non differenziabilità e punti critici. La funzione è sempre differenziabile, ma tre dei quattro punti critici non siamo stati in grado di classificarli, dunque C_1, C_2 o C_3 potrebbe essere un punto di massimo locale, e quindi potenzialmente un punto di massimo assoluto. Mentre siamo sicuri che C_4 è un punto di minimo locale.

Iniziamo a studiare l'esistenza del massimo assoluto. Guardando il comportamento della funzione lungo gli assi, ci accorgiamo ad esempio che

$$\lim_{x\to+\infty\,,\,y=0} f(x,y) = \lim_{x\to\infty} (x^4 - 4x^3 + 4) = +\infty\,,$$

quindi la funzione non è limitata superiormente, e non ha quindi massimo assoluto.

Per studiare l'esistenza del minimo assoluto, il comportamento della funzione lungo gli assi non ci aiuta, il limite viene sempre infatti uguale a $+\infty$. Confrontando i valori della funzione sui punti critici otteniamo che

$$f(C_1) = 4 \,>\, f(C_2) = f(C_3) = -23 \,>\, f(C_4) = -50\,.$$

Quindi solo C_4 può essere un punto di minimo assoluto. Per dimostrare che lo è, basta osservare che dallo studio della funzione di una variabile $g(t) = t^4 - 4t^3$ otteniamo che $g(t) \geq g(3) = -27$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi possiamo affermare che $x^4 - 4x^3 \geq -27$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $y^4 - 4y^3 \geq -27$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, e dunque

$$f(x,y) = x^4 - 4x^3 + y^4 - 4y^3 + 4 \geq -27 - 27 + 4 = -50 = f(C_4)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\;\; x^4 + y^4 \leq 1\right\}$$

L'insieme Ω è rappresentato in figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, mentre i punti critici liberi sono stati trovati al punto precedente. Solo uno, C_1, è interno ad Ω e quindi da considerare.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Non ci sono spigoli e il bordo è composto da un unico pezzo

$$\Gamma = \left\{x^4 + y^4 = 1\right\}$$

Possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ come insieme di livello della funzione $G(x,y) = x^4 + y^4$. Notiamo che tutti i punti di Γ sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni (x,y,λ) del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 4\lambda x^3 \\ 4y^3 - 12y^2 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

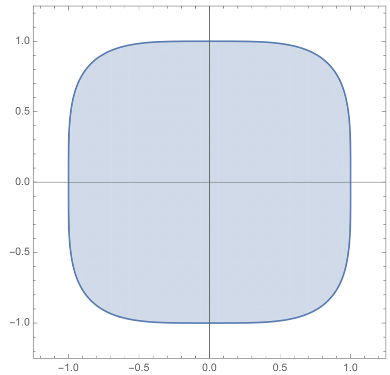

Figure 1: L'insieme Ω.

Dalla prima equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y^3 - 12y^2 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = 1 - \frac{3}{x} \\ 4y^3 - 12y^2 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $y = \pm 1$ e otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ nella terza equazione, per cui otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = 1 - \frac{3}{x} \\ xy^2 = y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

e si ottiene facilmente che la terza equazione è equivalente a

$$y^2(y - x) = 0$$

da cui si ottengono la soluzione $y = 0$ e la condizione $y = x$, che vanno sostituite nell'equazione del vincolo $x^4 + y^4 = 1$. Da $y = 0$, si ottiene $x = \pm 1$, e dunque altri due punti critici vincolati

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla condizione $y = x$, si ottiene invece $2x^4 = 1$, e dunque i due punti critici vincolati

$$Q_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_1) = 4\,, \quad f(Q_1) = f(Q_3) = 1\,, \quad f(Q_2) = f(Q_4) = 9\,,$$

$$f(Q_5) = 5 - 4\sqrt[4]{2}\,, \quad f(Q_6) = 5 + 4\sqrt[4]{2}$$

Usando che $\sqrt[4]{2} > 1$ si ottiene $5 - 4\sqrt[4]{2} < 1$ e $5 + 4\sqrt[4]{2} > 9$, per cui su Ω, il minimo di f è $5 - 4\sqrt[4]{2}$, e il massimo è $5 + 4\sqrt[4]{2}$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin t\,,\ \frac{1}{2}\cos t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1, 0)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (1, 0)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in [0, 2\pi]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \sin t_0 = 1 \\ \frac{1}{2}\cos t_0 = 0 \end{cases}$$

Si ricava immediatamente che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{2}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ -\frac{1}{2}\sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$x = 1\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -xy^2 + \sin(\log(1 + x^2)) \\ e^y + x^2 y + x \end{pmatrix}$$

Il sostegno della curva è il bordo dell'ellisse

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 \leq 1\big\}$$

percorso in senso orario. Per quanto riguarda il campo $\mathbf{F}$, il suo dominio è $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2xy + 1 - (-2xy) = 4xy + 1$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, e di conseguenza non è conservativo.

La curva è chiusa e la parte che racchiude D è interamente contenuta nel dominio del campo, dunque possiamo calcolare il lavoro usando il Teorema del Rotore. Poiché la curva è orientata in senso orario abbiamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -\iint_D \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = -\iint_D (4xy+1)\,dxdy$$

Scriviamo D come insieme semplice rispetto alla y,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1\,,\, -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right\}$$

e dunque

$$\iint_D (4xy+1)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} (4xy+1)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[2x\left(y^2\Big|_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}\right) + \left(y\Big|_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \left(\frac{t - \sin t\,\cos t}{2}\right)_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

In conclusione otteniamo quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^3 - 2z^2 - z + 2\,,\, 1 < z \le 3\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo;

Si tratta di una superficie di rotazione della forma

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = g^2(z)\,,\, a \le z \le b\right\}$$

con $g(z) = \sqrt{z^3 - 2z^2 - z + 2}$, e con a, b da determinare nell'intervallo $(1,3]$ in modo che $g(z) \ge 0$. Scrivendo

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z+1)(z-1)(z-2)$$

si ottiene che se ci restringiamo all'intervallo $(1,3]$, la funzione $g(z)$ è ben definita per $z \in [2,3]$ e verifica $g(z) \ge 0$. Dunque abbiamo $a = 2$ e $b = 3$.

Ne segue che un disegno approssimativo di Σ si ottiene facendo ruotare il grafico di $y = g(z)$ nell'intervallo $[2,3]$ intorno all'asse z. Otteniamo così la figura 2.

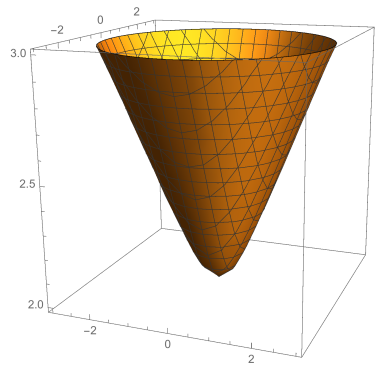

Figure 2: La superficie Σ.

ii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{x(3z^2-4z-1)}{x^2+y^2}\, dxdydz$$

dove

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le z^3-2z^2-z+2\,,\ 1 < z \le 3\,,\ x \ge \frac{1}{2}\sqrt{z^3-2z^2-z+2}\right\}.$$

Usando quanto trovato al punto i), sappiamo che V si scrive come il solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \le z \le b\,,\ x^2+y^2 \le g^2(z)\right\}$$

dove $a = 2$, $b = 3$ e $g(z) = \sqrt{z^3-2z^2-z+2}$, intersecato con l'insieme

$$\left\{x \ge \frac{1}{2}\, g(z)\right\}.$$

Calcoliamo l'integrale triplo su V integrando per strati

$$\iiint_V \frac{x(3z^2-4z-1)}{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_2^3 (3z^2-4z-1)\left(\iint_{V_z} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy\right) dz$$

dove per ogni $z \in [2,3]$

$$V_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le g^2(z)\,,\ x \ge \frac{1}{2}\, g(z)\right\}.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su V_z usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[-\pi,\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{S_z} \cos\theta\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \, : \, \rho^2 \le g^2(z) \, , \, \rho \cos\theta \ge \frac{1}{2} \, g(z) \right\} .$$

La prima condizione ci dice che per ogni $z \in [2, 3]$ fissato

$$\rho \in [0, g(z)] \, .$$

Dalla seconda ricaviamo che $\cos\theta > 0$, quindi

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{2} \right] .$$

e riscriviamo la seconda condizione come

$$\rho \ge \frac{g(z)}{2\cos\theta} \, .$$

Dunque mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo per ogni $z \in [2, 3]$ l'insieme

$$S_z = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \, : \, 0 \le \rho \le g(z) \, , \, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \, , \, \rho \ge \frac{g(z)}{2\cos\theta} \right\}$$

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare le soluzioni in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ di

$$\frac{g(z)}{2\cos\theta} = g(z)$$

che sono i due angoli

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{3} \, .$$

Possiamo quindi scrivere S_z come

$$S_z = \left\{ (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \, : \, -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \, , \, \frac{g(z)}{2\cos\theta} \le \rho \le g(z) \right\} .$$

Quindi

$$\iint_{V_z} \frac{x}{x^2 + y^2} \, dxdy = \iint_{S_z} \cos\theta \, d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{g(z)}{2\cos\theta}}^{g(z)} \cos\theta \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} g(z) \, \cos\theta \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{g(z)}{2} \, d\theta = g(z) \, \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{g(z)}{2} \, \theta \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = g(z) \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) .$$

Tornando allora al calcolo del volume di V troviamo, ponendo $g(z) = \sqrt{z^3 - 2z^2 - z + 2}$,

$$\iiint_V \frac{x(3z^2 - 4z - 1)}{x^2 + y^2} \, dxdydz = \int_2^3 (3z^2 - 4z - 1) \left(\iint_{V_z} \frac{x}{x^2 + y^2} \, dxdy \right) dz =$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \int_2^3 (3z^2 - 4z - 1) \, \sqrt{z^3 - 2z^2 - z + 2} \, dz = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \frac{2}{3} \, \left[(z^3 - 2z^2 - z + 2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_2^3 =$$

$$= \frac{32}{3} \sqrt{2} \, \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) .$$